Riemann-Webers

Differentialgleichungen der Physik

II.

Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. in Braunschweig

UNIVERSITY OF MAINE
LIBRARIES

Bequest of

PROFESSOR THOMAS BUCK

CLASS OF 1901

Die Differential- und Integralgleichungen

der Mechanik und Physik

als 7. Auflage von Riemann-Webers Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik

herausgegeben von

Dr. Philipp Frank und Dr. Richard v. Mises
o. Professor an der Deutschen Universität in Prag
o. Professor an der Universität Berlin

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
Braunschweig 1927

Die Differential- und Integralgleichungen

der Mechanik und Physik

Zweiter / physikalischer / Teil

unter Mitarbeit von H. Faxén-Uppsala, R. Fürth-Prag, Th. v. Kármán-Aachen, Fr. Noether-Breslau, C. W. Oseen-Uppsala, A. Sommerfeld-München, E. Trefftz-Dresden

herausgegeben von

Dr. Philipp Frank

o. Professor an der Deutschen Universität in Prag

Mit 88 Abbildungen

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
Braunschweig 1927

Alle Rechte vorbehalten

Vorwort.

Gegenüber dem stürmischen Wandel, in dem die theoretische Physik begriffen ist, darf man nicht vergessen, daß es in ihrem Aufbau wesentliche Stücke gibt, die sich sehr viel langsamer ändern. So wie beim raschesten Modewechsel in der Kleidung sich Schere und Nadel fast gar nicht, die Webstühle nur langsam ändern, so bleiben beim raschesten Auf- und Abstieg der physikalischen Hypothesen doch die mathematischen Methoden verhältnismäßig konstant, mit deren Hilfe man von den allgemeinen Annahmen zu den Einzelfällen übergeht, die der durch Erfahrung prüfbaren Wirklichkeit schon so nahe liegen, daß man sich auf Grund der Rechnungsergebnisse Versuche ausdenken kann, die eine Bestätigung oder Widerlegung der Hypothese gestatten.

Das vorliegende Buch soll kein Lehrbuch der theoretischen Physik sein, sondern nur von diesem „langsam veränderlichen" Mittelstück handeln, das zwischen Hypothesensystem und Erfahrung eingeschaltet ist und sich wie ein gutes Werkzeug im Dienst der verschiedensten Zwecke verwenden läßt. Die von Laplace und Lagrange zur Berechnung der gegenseitigen Beeinflussung der Planetenbahnen entwickelte Störungstheorie läßt sich heute ebenso gut auf die in der Quantentheorie der Spektren so wichtige Änderung der Atomenergie durch elektrische Felder beim Starkeffekt anwenden. Die von Fourier in seiner Theorie der Wärmeleitung entwickelten Methoden konnten Einstein und Smoluchowski fast unverändert zur Herleitung der Gesetze der Brownschen Bewegung unter gegebenen äußeren Umständen verwenden. Die von D'Alembert, Euler und Poisson entwickelten Methoden zur Berechnung der Eigentöne von schwingenden Saiten und Membranen kehren in der Schrödingerschen Wellenmechanik zur Kennzeichnung der ausgezeichneten Zustände des Atoms wieder. Die von Laplace und Gauß, Cauchy und Riemann erdachte Potentialtheorie dient heute unter anderem zur Berechnung des Auftriebes der Flugzeuge.

Es wäre ein großer Irrtum anzunehmen, daß dieses Gebiet der eigentlichen „mathematischen Physik", wie wir uns unter Verwendung

eines alten Namens ausdrücken wollen, im Gegensatz zu der Welt der genialen Hypothesen, auf denen die theoretische Physik beruht, eine nur dienende Rolle spielt. Im Gegenteil, die meisten Hypothesen sind immer so aufgestellt worden, daß sie ein bereitstehendes mathematisches Werkzeug aufgreifen konnten, um mit seiner Hilfe sich mit den beobachtbaren Tatsachen in Beziehung zu setzen. Die vorhandenen Theorien der mathematischen Physik haben stets die Phantasie zur Hypothesenbildung angeregt. Es soll gar nicht von den zahlreichen Theorien gesprochen werden, die nichts sind als eine Umschreibung des Ansatzes linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten oder der Potentialgleichung, eines Ansatzes, der deshalb bevorzugt wurde, weil man die ganzen Folgen desselben in gut ausgearbeiteten mathematischen Systemen vor Augen hatte. Aber noch in unserer Zeit war es die Hamiltonsche Analogie zwischen Lichtstrahlen und Bahnkurven sowie die damit verbundene Hamilton-Jacobische Integrationstheorie, die Schrödinger zu seiner neuen Wellenmechanik anregte, die ja ihrem Wesen nach ein physikalisches Ernstnehmen jener formalen Analogie ist.

Während im ersten Bande des vorliegenden Werkes die allgemeine Theorie der Anfangs- und Randwertprobleme behandelt wurde, die bei der Integration von Differentialgleichungen auftreten, geht der zweite Band von den speziellen Differentialgleichungen, den speziellen Anfangs- und Randbedingungen aus, die sich auf den einzelnen Gebieten der Physik ergeben. Die Notwendigkeit, den ersten Band zwei Jahre vor dem zweiten erscheinen zu lassen, hat vielleicht die Absicht der Herausgeber, aus beiden Bänden ein einheitliches Ganzes zu machen, nicht so gelingen lassen, wie sie es gewünscht hätten, und wie es bei einer künftigen Auflage, wie wir hoffen, möglich sein wird.

Um den Stoff der mathematischen Physik, der sich am stetigsten bis zur Gegenwart erhalten hat, möglichst eingehend behandeln zu können, haben wir die Probleme, die an Statistik und Relativitätstheorie anknüpfen, leider zum größten Teil ausscheiden müssen. Sie sind für die heutige Physik wohl von wesentlicher Bedeutung, erfordern aber mathematische Hilfsmittel, deren Aufnahme den Umfang des Buches zu sehr erweitert hätte, den wir nicht zu sehr über den des alten Riemann-Weber hinaus wollten anwachsen lassen. Von den mathematischen Problemen dieser beiden Gebiete sind nur die aufgenommen, die sich zwanglos an die Diffusionsgleichung (Brownsche Bewegung) bzw. an die Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen (spezielle Relativitätstheorie) anschließen.

Um dem Buche trotz der Zusammenarbeit mehrerer Verfasser den Charakter eines Lehrbuches zu wahren, und nicht in den eines Handbuches zu geraten, sind folgende Grundsätze, soweit es möglich war, festgehalten worden:

Das Ziel, keine Referate über Theorien zu bringen, sondern nur wirklich durchgeführte Ableitungen und Rechnungen, wurde dadurch zu erreichen gesucht, daß der Stoff nach mehreren Richtungen begrenzt wurde. Zunächst wurde daran festgehalten, keine Erörterungen über physikalische Hypothesen (wie z. B. Quantentheorie) zu bringen, ebensowenig Vergleiche von Rechnungsergebnissen mit Experimenten, sondern im wesentlichen nur das eigentlich mathematische „Mittelstück", wobei meist auch noch alle Näherungsmethoden ausgeschieden wurden, so daß das Ganze einen einheitlichen Charakter gewinnen konnte. Wir haben auch keine Vollständigkeit angestrebt, sondern überall charakteristische Beispiele für die verschiedenen mathematischen Methoden gebracht. Literaturangaben sind nur gemacht, wo es sich um Arbeiten handelt, die in den üblichen Lehrbüchern noch nicht allgemein verwertet sind. Hingegen stehen am Schluß der einzelnen Abschnitte oder Kapitel kurze Verzeichnisse von Lehrbüchern, die in dem betreffenden Spezialgebiet mehr Stoff als das vorliegende enthalten.

Bei der Auswahl der eingehend behandelten Probleme waren folgende Gesichtspunkte maßgebend:

Erstens die Gelegenheit, die Begriffsbildung der neueren Mathematik an physikalischen Beispielen zu erläutern, wie z. B. Berührungstransformationen, Integralinvarianten, Riemannsche Räume, Eigenwertprobleme, Integralgleichungen. Zweitens die Beziehung zur modernen theoretischen Physik, wie zur Quantentheorie, Brownschen Bewegung, Strahlungstheorie usw. Drittens wurden auch Beispiele aufgenommen, die für die technischen Anwendungen bedeutungsvoll sind. Insbesondere wurde Wert auf die heute im Vordergrund des Interesses stehenden technischen Gebiete gelegt, wie z. B. Fluglehre, Verstärkerröhren, drahtlose Telegraphie, Erdströme.

Schließlich ist naturgemäß auch das persönliche Arbeitsgebiet der Mitarbeiter nicht ohne Einfluß auf die Auswahl des Stoffes geblieben. So ersucht insbesondere Herr Sommerfeld zu entschuldigen, daß gegenüber den in früheren Jahren von ihm und seinen Schülern behandelten Problemen vielleicht andere in seiner Darstellung zurückgetreten sind, die er damit nicht als weniger wichtig angesehen wissen möchte. Durch dieses Betonen des eigenen Verhältnisses zum Gegenstand scheint uns

aber der Charakter eines Handbuches zugunsten einer lebendigeren Behandlung des Stoffes noch weiter zurückgedrängt worden zu sein, was bei einem Buche mehrerer Verfasser die Vermeidung einer leicht drohenden Gefahr bedeutet. Auch hat sich dadurch die Gelegenheit geboten, im letzten Kapitel den Arbeiten der schwedischen Forscher auf dem Gebiet der Hydrodynamik eine ausführlichere Behandlung zu widmen, was für den deutschen Leserkreis erwünscht sein dürfte, wo deren Ergebnisse vielleicht noch nicht so bekannt sind, wie sie es verdienen.

So sind in dem Buche auch vielfach Ergebnisse dargestellt, die anderwärts in dieser Form oder überhaupt noch nicht veröffentlicht sind. Z. B. im ersten Kapitel die Begründung der für die Quantentheorie wichtigen Einführung des „Energieausdrucks“ mit Hilfe der in Involution befindlichen Integrale der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, im siebenten Kapitel die Behandlung der spontanen Konvektionsströmungen, oder im letzten Kapitel manche Ausführungen über die Beziehungen der exakten Lösungen der Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeiten zur Lehre vom Flüssigkeitswiderstand.

Die Einheitlichkeit der Bezeichnungsweise wurde wohl in großen Zügen zwischen den Mitarbeitern vereinbart, aber nicht in allen Einzelheiten pedantisch festgehalten. So ist wohl überall, wo Vektoren verwendet werden, für die Rechenoperationen die gleiche Symbolik verwendet, aber die einzelnen Mitarbeiter haben je nach Bedarf die Vektordarstellung, die Komponentenzerlegung oder die Indizesbezeichnung angewendet.

Was die Beziehung der vorliegenden Neubearbeitung zu der Weberschen Bearbeitung der Riemannschen Vorlesungen betrifft, so war unsere Absicht nicht, einen möglichst engen äußerlichen Anschluß an diese zu finden, sondern für unsere Zeit die Erfüllung der Aufgabe zu versuchen, die Weber so meisterhaft für die seinige gelöst hat. Die reine Mathematik hat heute für viele der mathematischen Physik angehörenden Probleme, die früher als Einzelprobleme mit Hilfe von Kunstgriffen gelöst wurden, allgemeine systematische Gesichtspunkte geschaffen, die das Verständnis sehr erleichtern, da sie viele isolierte Rechenregeln in wenige Theoreme zusammenzufassen gestatten. Diese neuen Gedanken konnten nicht ohne Einfluß auf die Neubearbeitung bleiben und haben zu dem mehr „theoretischen“ Charakter des ersten Bandes geführt. Wer aber die Lösungsmethoden nicht einfach als Rezepte ansehen will, wird in diesen theoretischen Erörterungen eher eine Hilfe als ein Hindernis des Verständnisses finden.

Die zweite Ursache, die eine wesentliche Neugestaltung des Weberschen Planes unvermeidlich machte, war die Verschiebung des Interesses der Physiker auf andere Gebiete, die durch die modernen Theorien eingetreten war. Andere mathematische Methoden, die früher wohl auch vorhanden waren, treten nun in den Vordergrund. So mußte der Atommechanik wegen der ganze Abschnitt über analytische Mechanik neu aufgenommen werden. Auch die Beugungstheorie und die Theorie der Flüssigkeiten mit Reibung gehören zu den Kapiteln, die in den früheren Bearbeitungen gar nicht vorhanden waren. Nur bei den Problemen der Wärmeleitung, der Elektrostatik, der stationären Ströme und der Schwingungen von Saiten und Membranen konnte einiges aus den früheren Auflagen herübergenommen werden.

Um alles kurz zusammenzufassen, können wir uns derselben Worte bedienen, mit denen H. Weber im Jahre 1900 die erste von ihm besorgte Ausgabe der Riemannschen Vorlesungen eingeleitet hat:

„ . . . so war es keine Frage, daß ein unveränderter oder wenig revidierter Abdruck jener Vorlesungen gar nicht mehr zeitgemäß gewesen wäre, sollte das Buch mehr als bloß historischen Wert haben . . . Es mußte also zu einer vollständigen Neubearbeitung gegangen werden . . . Eines muß aber noch hervorgehoben werden. Das vorliegende Buch soll kein physikalisches Lehrbuch sein . . . Der Schwerpunkt liegt in der mathematischen Behandlung der einzelnen Probleme. Es ist bei der Fülle des Stoffes selbstverständlich, daß bei diesen Problemen nur eine sehr beschränkte Auswahl getroffen werden konnte, wobei neben dem physikalischen besonders auch auf das mathematische Interesse Gewicht gelegt ist. Umständliche Entwicklungen und Annäherungsrechnungen, so sehr sie auch den Physikern in Ermanglung besserer und strengerer Methoden notwendig sein mögen, sofern sie ohne besonderes mathematisches Interesse sind, werden vermieden“.

Jeder Physiker unserer Generation wird sich erinnern können, daß beim Erscheinen der ersten Weberschen Ausgabe viele Leser mit Bedauern den „physikalisch-anschaulichen“ Charakter der Riemannschen Vorlesungen (in der Hattendorfschen Ausgabe) zugunsten der „mathematisch-abstrakten“ des Weberschen Buches schwinden sahen. Es besteht kein Zweifel, daß für viele nun die Webersche Ausgabe „physikalisch-anschaulich“ und das vorliegende Buch „mathematisch-abstrakt“ sein wird.

Aber die Entwicklung des Buches ist nichts anderes als ein Bild der Entwicklung der physikalisch-mathematischen Wissenschaften selbst,

die eine gegebene Tatsache ist. Es ist ja kein Zweifel, daß das jugendliche Alter anmutiger ist als das erwachsene; aber der Erwachsene kann jene Anmut nicht dadurch erreichen, daß er sein Alter verbirgt und sich jung stellt.

Am Schlusse möchte ich nicht versäumen, allen Mitarbeitern für ihre Bereitwilligkeit zu danken, sich an der Neubearbeitung zu beteiligen. Ich bin mir wohl bewußt, daß so mancher im Interesse des Gesamtplanes vieles unterdrücken mußte, was er noch wichtiges und wertvolles zu schreiben gehabt hätte, und daß für diese Selbstverleugnung allen ein besonderer Dank gebührt.

Ganz besonders viel ist dem Eingreifen von Herrn C. W. Oseen zu verdanken, der kurz vor Abschluß des Bandes in eine entstandene Lücke eingetreten ist und durch Bearbeitung des Gebietes, auf dem er einer der erfolgreichsten Fachmänner ist, die Durchführung des ganzen Planes ermöglicht hat.

Für die zahlentheoretischen Betrachtungen im ersten Kapitel (§ 6, 5) bei der Behandlung der angenähert periodischen Bewegungen hat Herr A. Winternitz in Prag dem Herausgeber wertvolle Ratschläge gegeben.

Für ihre Hilfe beim Lesen der Korrekturen sei Frau Hedwig Fürth und den Herren R. Fürth, L. Hopf (Aachen), P. Kuhn, Th. Pöschl, E. Sexl herzlichst gedankt.

Spindlermühle, Juli 1927.

Philipp Frank.

Inhaltsübersicht.

I. Abschnitt.

Analytische Mechanik.

Von Ph. Frank in Prag.

Erstes Kapitel: Die Differentialgleichungen allgemeiner mechanischer Systeme.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten. Seite

1. Der freie Massenpunkt 1
2. Beispiel: Einfluß der Luftreibung auf die Wurfbewegung 2
3. Die Bewegungsgleichungen von Systemen freier Massenpunkte und deren Integrale 4
4. Die Gleichgewichtslagen als singuläre Punkte 6
5. Das d'Alembertsche Prinzip 7

§ 2. Die Lagrangeschen und Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

1. Gestalt der Lagrangeschen Gleichungen 8
2. Beispiele 11
3. Energie- und Impulssatz 12
4. Beziehungen zur Variationsrechnung 13
5. Die Hamiltonsche und die Routhsche Form der Bewegungsgleichungen 16
6. Integrale der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen 17

§ 3. Die Differentialgleichungen der Bahnkurven.

1. Die Bahnkurven eines materiellen Punktes in der Ebene 21
2. Die Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme 23
3. Die verschiedenen Arten von Bahnkurven 25
4. Beispiele 27

§ 4. Transformationstheorie der Hamiltonschen Differentialgleichungen.

1. Integralinvarianten 29
2. Berührungstransformationen 31
3. Jacobische Integrationstheorie 36
4. Zur Integration der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung 37

§ 5. Methode der Separation der Veränderlichen.

1. Grundgedanken der Methode 38
2. Kriterium ihrer Anwendbarkeit 39
3. Durchführung der Rechnung 41

Seite

4. Beispiele 43
5. Periodizitätseigenschaften der Separationsvariablen 45
6. Winkelvariable und Wirkungsvariable 47

§ 6. Mehrfach periodische Systeme.

1. Einführung beliebiger Koordinaten 49
2. Einführung allgemeiner mehrfach periodischer Systeme 51
3. Entartung 53
4. Beispiele 55
5. Angenäherte Perioden 56
6. Beziehungen zur Quantentheorie 60

Lehrbücher 61

Zweites Kapitel: **Stabilität und kleine Schwingungen.**

§ 1. Quasistatische Bewegungen.

1. Erleichterung der Integration beim Vorhandensein verborgener Koordinaten 62
2. Quasistatische Bewegungen nach Routh 64
3. Verallgemeinerung des Begriffes der quasistatischen Bewegung nach Levi-Civitá 65

§ 2. Stabilität und Energie.

1. Begriff der Stabilität 71
2. Das Routhsche Energiekriterium der Stabilität 72
3. Beispiele 74

§ 3. Kleine Schwingungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage oder beständige Bewegung.

1. Herleitung und Gestalt der Differentialgleichungen 75
2. Integration der Differentialgleichungen der freien Schwingungen . . . 78
3. Spezielle schwingende Systeme. Schwingungen um Gleichgewichtslagen 80

§ 4. Erzwungene Schwingungen.

1. Allgemeine Integration der Differentialgleichungen 84
2. Systeme von einem Freiheitsgrad 86

§ 5. Kleine Schwingungen und Stabilität.

1. Allgemeine Kriterien 89
2. Beispiele 90

Lehrbücher 90

Drittes Kapitel: **Die Bewegungsgleichungen starrer Körper.**

§ 1. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

1. Lagekoordinaten 90
2. Geschwindigkeitskoordinaten 92
3. Bewegungsgesetze des starren Körpers 94
4. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen 96
5. Formale Erweiterung des Ansatzes [Motorrechnung][1]) 98
6. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 102

[1]) Von R. v. Mises (Berlin).

Seite

§ 2. Kräftefreie Bewegung des starren Körpers.
1. Allgemeine Integration der Eulerschen Gleichungen 103
2. Explizite Gestalt der Lösungen für den periodischen Fall 107
3. Quasistatische Bewegungen 109
4. Der symmetrische Kreisel 110

§ 3. Bewegung im Schwerefeld.
1. Allgemeine Theorie 111
2. Symmetrischer Kreisel. Quasistatische Bewegung 113
3. Symmetrischer Kreisel. Allgemeinste Bewegung 114
4. Pendelschwingungen mit endlicher Amplitude 117

§ 4. Die Flugzeugbewegung.
1. Aufstellung der Bewegungsgleichungen 118
2. Differentialgleichungen der Längsbewegung 119
3. Beständige (permanente) Bewegungen und kleine Schwingungen . . . 123
4. Längsstabilität des Horizontalfluges 125
5. Phygoidbewegung 126
Lehrbücher 127

Viertes Kapitel: **Methoden der Störungstheorie.**

§ 1. Grundbegriffe der Störungsrechnung.
1. Allgemeine mechanische Systeme 127
2. Mehrfach periodische Systeme 131
3. Entartete Systeme 135
4. Die Differentialgleichungen der sekularen Störungen 138

§ 2. Störungen elastischer Schwingungen.
1. Die störende Kraft ist in der Elongation quadratisch 140
2. Die störende Kraft ist kubisch 142
3. Die störende Kraft enthält Kopplungsglieder 143
4. Störungen einfach periodischer Bahnen 144
5. Die Störungsfunktion enthält die Zeit 147

§ 3. Der Energieausdruck für gestörte Systeme.
1. Angepaßte kanonische Veränderliche 148
2. Berechnung des Energieausdrucks 149
3. Das ungestörte System ist entartet 151

§ 4. Der Energieausdruck für unharmonische Schwingungen.
1. Die oskulierende harmonische Schwingung ist nicht entartet 153
2. Einfach periodische Grundbewegung 154

Fünftes Kapitel: **Probleme der Himmels- und Atommechanik.**

§ 1. Die Keplerbewegung.
1. Bahnelemente der Keplerellipse 156
2. Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen 158
3. Berechnung der Lagekoordinaten 163

§ 2. Die gestörte Keplerbewegung.
1. Die störende Kraft ist eine Zentralkraft 166
2. Störungen durch ein homogenes elektrisches Feld 167

Seite

§ 3. Einiges vom Dreikörperproblem.
1. Das Zweikörperproblem 170
2. Reduktion des Dreikörperproblems 171
3. Quasistatische Bahnen beim ebenen Dreikörperproblem 174
Lehrbücher zum vierten und fünften Kapitel 176

II. Abschnitt.

Wärmeleitung und Diffusion.

Von R. Fürth in Prag.

Sechstes Kapitel: Freie Wärmeleitung und Diffusion.

§ 1. Grundbegriffe und Differentialgleichungen.
1. Grundbegriffe der Wärmeleitung in festen Körpern 177
2. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung 180
3. Grundbegriffe der Diffusion ohne Einwirkung äußerer Kräfte 182
4. Die Differentialgleichung der Diffusion 185

§ 2. Wärmeleitung und Diffusion im unbegrenzten Körper.
1. Der Körper ist unendlich ausgedehnt in einer Dimension. Allgemeine Lösung 186
2. Beispiele 189
3. Anwendung auf die Brownsche Bewegung eines Einzelteilchens . . . 195
4. Der Körper ist unendlich ausgedehnt in zwei Dimensionen. 196
5. Der Körper ist unendlich ausgedehnt in drei Dimensionen 200
6. Die Integralgleichungen der Wärmeleitung und Diffusion 203

§ 3. Wärmeleitung und Diffusion im begrenzten Körper.
1. Die Temperatur (Konzentration) der Oberfläche ist konstant. Begrenzung durch eine Ebene 208
2. Brillouins Diffusionsversuch und „Erstpassagen“ bei Brownscher Bewegung 209
3. Der Körper ist von zwei Ebenen begrenzt 211
4. „Doppelseitige Erstpassagen“ bei Brownscher Bewegung 214
5. Geschichtete Körper 215
6. Wärmeleitung im Zylinder 216
7. Wärmeleitung in der Kugel 218
8. Vordringen des Frostes 220
9. Die Temperatur (Konzentration) der Oberfläche ist eine gegebene Funktion der Zeit 223
10. Wärmewellen 227
11. Die Oberfläche ist ein Isolator 231
12. An der Oberfläche des Körpers findet äußere Leitung statt 234
13. Diffusion durch ein Diaphragma 237
14. Dasselbe Problem in zwei Dimensionen 239
15. Wärmeleitung in einem Stabe 241
16. Abkühlung eines Prismas 244

Seite

Siebentes Kapitel: **Erzwungene Wärmeleitung und Diffusion.**

§ 1. Grundbegriffe und Differentialgleichungen.
1. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung mit Konvektionsströmung . 246
2. Die Differentialgleichung der Diffusion unter dem Einfluß äußerer Kräfte 248

§ 2. Die Wärmeleitung und Diffusion bei aufgezwungener Konvektion.
1. Wärmeleitung bei reibungsloser Flüssigkeitsströmung. Abkühlung eines Körpers durch eine vorbeiströmende Flüssigkeit 249
2. Endliche Wärmeübergangszahl 252
3. Strömung durch enge Röhren. Der Kühler 254
4. Diffusion in strömenden Gasen und unter der Einwirkung gegebener äußerer Kräfte 256
5. Sedimentation und Brownsche Bewegung im Schwerefeld 257
6. Zusammenhang mit einem Satz der statistischen Mechanik 260
7. Diffusion von Elektrolyten 261

§ 3. Spontane Konvektionsströmung unter Einwirkung äußerer Kräfte 263

Lehrbücher zum sechsten und siebenten Kapitel 266

III. Abschnitt.

Das stationäre (und quasistationäre) elektromagnetische Feld.

Von Fr. Noether in Breslau.

Achtes Kapitel: **Elektrostatik.**

Seite

§ 1. Formulierung des mathematischen Problems.
1. Physikalische Erfahrungen und Vorstellungen 267
2. Mathematische Feldgleichungen 269

§ 2. Fundamentalaufgaben; Spiegelung und elektrische Bilder.
1. Homogene Grundaufgaben 272
2. Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoid 273
3. Inhomogene Grundaufgaben 275
4. Spiegelung und elektrische Bilder 277

§ 3. Elektrostatisches Gleichgewicht auf zwei geladenen Kugeln.
1. Aufgabe und Prinzip der Lösung 281
2. Durchführung der Lösung 283
3. Kapazitätskoeffizienten 287

§ 4. Zylindrische Felder. Darstellung durch Funktionen komplexer Veränderlicher.
1. Logarithmisches Potential, konzentrische Kreiszylinder 288
2. Spiegelung, exzentrische Kreiszylinder 291
3. Felddarstellung durch Funktionen von komplexen Variablen 295

§ 5. Das Feld prismatischer Leiter.
1. Anwendung des Schwartzschen Verfahrens 297
2. Zwei unendliche prismatische Leiter 301
3. Feld zwischen zwei endlich begrenzten Leitern 306

Seite

§ 6. Anwendung der Elektrostatik auf die Theorie der Glühkathodenröhren[1]).
1. Problemstellung 313
2. Berechnung des Durchgriffs 313
3. Die Raumladung 317

Neuntes Kapitel: **Stationäre elektrische Strömungen.**

§ 1. Aufstellung der Feldgleichungen und einfache Aufgaben.
1. Die physikalischen Gesetze 321
2. Einfache Aufgaben über stationäre Strömungsfelder 324

§ 2. Stromübertritt zwischen Erde und metallischen Leitungen.
1. Randwertaufgabe und Integralgleichung 325
2. Direkter Ansatz einer Integralgleichung 327
3. Auflösung der Integralgleichung für die Stromaufnahme 329
4. Auflösung der Integrodifferentialgleichung für den Stromaustritt . . . 333

§ 3. Flüssigkeitsschicht mit metallischer Begrenzung. Nobilische Farbenringe.
1. Die Riemannsche Aufgabe 336
2. Berücksichtigung der Polarisation 339
3. Homogene Hilfsaufgabe 341
4. Allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe 343
5. Lösung für den Strömungsfall 346

Zehntes Kapitel: **Magnetostatik.**

§ 1. Erzeugung magnetischer Felder.
1. Die magnetischen Grundgesetze 348
2. Permanenter Magnet und magnetisches Moment 349
3. Stationäres elektromagnetisches Feld 351

§ 2. Paramagnetische Körper im Magnetfeld.
1. Die allgemeine Randwertaufgabe 352
2. Kugel im Parallelfeld 354
3. Ellipsoid im Parallelfeld 357

§ 3. Kräfte auf materielle Körper im elektrischen oder magnetischen Felde.
1. Die Feldenergie 361
2. Hilfssatz 362
3. Energie eines dielektrischen Körpers im elektrischen Felde 363
4. Energie eines para- oder diamagnetischen Körpers im Magnetfeld . . 364
5. Anwendung auf das Ellipsoid 366

Elftes Kapitel: **Quasistationäre Ströme und Wellen.**

§ 1. Quasistationäre Stromkreise.
1. Magnetische Feldenergie 369
2. Mechanische Auffassung des Systems. Faradays Induktionsgesetz . . 372
3. Schwingungen von Stromkreisen. Wechselstromwiderstand 373

[1]) Von R. Fürth (Prag).

Seite

§ 2. Quasistationäre Wellen in Leitern.
1. Die Wellengleichungen 375
2. Stehende Wellen. Freie Schwingungen 378
3. Erzwungene Schwingungen 380
4. Fortschreitende Wellen beliebiger Gestalt 382

§ 3. Quasistationäre Wellen in Spulen.
1. Die Wellengleichungen 385
2. Harmonische Wellen 387
3. Zusammensetzung zu abgebrochenen Wellen 388

Lehrbücher zum achten bis elften Kapitel 390

IV. Abschnitt.

Elektromagnetische Schwingungen.

Von A. Sommerfeld in München.

Zwölftes Kapitel: **Allgemeine Sätze und Integrationsmethoden.**

§ 1. Grundgleichungen und Eindeutigkeit der Lösungen.
1. Eigentliche Maxwellsche Theorie 391
2. Energiesatz und Eindeutigkeit der Lösungen 393
3. Zur mathematischen Behandlung von Schwingungszuständen 395
4. Elektronentheorie 400

§ 2. Invarianz der Maxwellschen Gleichungen gegenüber Lorentztransformationen.
1. Einführung der elektrodynamischen Potentiale 402
2. Der Sechservektor des Feldes 404
3. Die Gruppe der orthogonalen Transformationen 406
4. Die spezielle Lorentztransformation 408

§ 3. Retardierte Potentiale und Feld einer beschleunigten Ladung.
1. Darstellung des Viererpotentials Φ 413
2. Retardierte Potentiale und Liénard-Wiechertsche Näherung. . . . 416
3. Das Feld einer beliebig bewegten Ladung 419

§ 4. Hertzscher Vektor, Ausstrahlung eines schwingenden Dipols.
1. Direkte Behandlung des elektrischen Dipols 422
2. Das Feld einer harmonischen, linearen Schwingung 423
3. Ausgestrahlte Energie 426
4. Verallgemeinerungen 429

Dreizehntes Kapitel: **Theorie der Beugung.**

§ 1. Verzweigte Lösungen der Schwingungsgleichung.
1. Formulierung des mathematischen Problems 433
2. Die Idee der Riemannschen Räume 436
3. Die auf einer Riemannschen Fläche eindeutige Funktion der ebenen Welle 441
4. Lösungen für den Riemannschen Raum 445
5. Anwendungen und Erweiterungen 450

Seite

§ 2. Konvergente und semikonvergente Entwicklungen der verzweigten Lösungen.
1. Vorbereitendes über Besselsche Funktionen 454
2. Konvergente Darstellung der verzweigten Funktion der ebenen Welle durch Reihen mit Besselschen Funktionen 461
3. Asymptotische Darstellung der verzweigten Funktion der ebenen Welle 465
4. Der Sonderfall $n = 2$ 470

§ 3. Vergleich mit der klassischen Beugungstheorie (Fresnel-Kirchhoff).
1. Greenscher Satz und Greensche Funktion 476
2. Huygenssches Prinzip 479
3. Rechteckige Öffnung, Spalt und Halbebene 481
4. Verhältnis von geometrischer und Wellenoptik 484

§ 4. Beugung an Kugeln und anderen Körpern, Methode der Reihenentwicklung.
1. Partikularlösungen 488
2. Additionstheoreme 491
3. Beugung an einem Zylinder 494
4. Beugung an der Kugel, kolloidale Teilchen 495

Vierzehntes Kapitel: **Wechselstromwiderstand und Skineffekt.**

§ 1. Verteilung an einer leitenden Ebene.
1. Symmetrie des Problems und strenge Integration 500
2. Diskussion des Feldes 503
3. Wechselstromwiderstand 507

§ 2. Draht von kreisförmigem Querschnitt bei niederen und hohen Frequenzen.
1. Das Wechselfeld von Kreissymmetrie 511
2. Diskussion des Feldes 514
3. Widerstand und Selbstinduktion des Drahtes 516

§ 3. Die Wechselstrom führende Spule.
1. Vereinfachung und Symmetrie des Problems 518
2. Diskussion des Feldes 522
3. Widerstand und Selbstinduktion der Spule 524

Lehrbücher 526

Fünfzehntes Kapitel: **Drahtwellen.**

§ 1. Feld und Fortpflanzung von Drahtwellen 527
1. Oberflächenbedingungen und transzendente Gleichung 528
2. Numerisches Beispiel eines typischen Falles. Berechnung von Fortpflanzung und Dämpfung 530
3. Sehr dünner Draht. Abnormer Fall von Fortpflanzung und Dämpfung 531
4. Der Energiefluß im Unendlichen 533
5. Struktur des Feldes 534

Seite

§ 2. Erweiterungen.
1. Nebenwellen von elektrischem oder magnetischem Typus. Unsymmetrische Wellen 535
2. Drahtwellen am Nichtleiter 536
3. Probleme mit metallischer Rückleitung des Stromes 540

Sechzehntes Kapitel: **Drahtlose Telegraphie.**

§ 1. Die Vertikalantenne auf der ebenen Erde 542
1. Primäre und sekundäre Erregung 543
2. Umformung der primären Erregung 544
3. Erfüllung der Grenzbedingungen 547
4. Andere Formen der Lösung 548
5. Diskussion der Lösung. Oberflächenwellen 550
6. Ergänzung der Diskussion bezüglich der Raumwellen 555
7. Näherungsformeln für kleine numerische Entfernungen 557

§ 2. Horizontalantenne und Rahmenantenne 563
1. Die magnetische Vertikalantenne 564
2. Die elektrische Horizontalantenne 565
3. Die magnetische Horizontalantenne (Rahmenantenne von vertikaler Ebene) 572

§ 3. Das Reziprozitätstheorem der drahtlosen Telegraphie.
1. Allgemeine Grundlegung nach H. A. Lorentz 576
2. Zwei elektrische Linearantennen 578
3. Zwei magnetische Antennen oder eine elektrische und eine magnetische Antenne 581

§ 4. Drahtlose Telegraphie um die Erde.
1. Homogene Atmosphäre, allgemeine Formulierung des Problems 584
2. Übergang von der Reihen- zur Integraldarstellung 587
3. Numerische Diskussion und Ergänzungen 593
4. Vergleich mit der Erfahrung, Heavisideschicht 596
Lehrbücher 597

V. Abschnitt.

Mechanik der Kontinua.

Siebzehntes Kapitel: **Mathematische Grundlagen der Elastizitätstheorie.**

Von E. Trefftz in Dresden.

§ 1. Problemstellung. Bezeichnungen 598
§ 2. Analyse der Spannungen und Verzerrungen.
1. Gleichgewichtssätze 600
2. Der Spannungstensor 603
3. Der Verzerrungstensor 606
§ 3. Das Hookesche Gesetz und die Grundgleichungen.
1. Das Hookesche Gesetz 610
2. Die Grundgleichungen 612
3. Berechnung der Verschiebungen aus den Spannungen 616

Seite

§ 4. Die Minimalprinzipe. Eindeutigkeitssätze.
1. Die Formänderungsarbeit 617
2. Das Minimalprinzip für die Verschiebungen, Prinzip der virtuellen Verrückungen 618
3. Das Minimalprinzip für die Spannungen 621
4. Eindeutigkeit der Lösungen 623

§ 5. Gleichungen der Bewegung. Eindeutigkeit der Lösungen.
1. Differentialgleichungen für die Bewegungen 625
2. Die Eindeutigkeit der Lösungen 627
Zusammenstellung der Formeln 628

Achtzehntes Kapitel: **Probleme des elastischen Gleichgewichts.**
Von E. Trefftz in Dresden.

§ 1. Elementare Lösungen mit linearer Spannungsverteilung.
1. Beanspruchung durch einen allseitig gleichen Normaldruck 631
2. Konstante Zugkraft auf die Enden eines Zylinders 632
3. Biegung eines Stabes durch an den Enden angreifende Momente . . . 632

§ 2. Torsion prismatischer Stäbe.
1. Differentialgleichung und Randbedingung 636
2. Elementare Fälle 638
3. Das Rechteck. Methode der Reihenentwicklungen 641
4. Polygonal begrenzte Querschnitte 645

§ 3. Beanspruchung ebener Platten durch Kräfte, die in der Plattenebene wirken.
1. Die Spannungsfunktion 652
2. Einzelkraft am Rande einer Halbebene 658
3. Die von Normalkräften am Rande beanspruchte Kreisscheibe 659
4. Der gelochte Zugstab 662

§ 4. Räumliche Probleme.
1. Gleichgewicht eines von einer unendlichen Ebene begrenzten Körpers . 664
2. Eindruck eines Stempels in eine Unterlage 669

Neunzehntes Kapitel: **Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie.**
Von E. Trefftz in Dresden.

§ 1. Die schwingende Saite.
1. Differentialgleichung der schwingenden Saite 675
2. Methode der Reihenentwicklung 678
3. Einführung des Anfangszustandes 680
4. Die d'Alembertsche Form der Lösung 681
5. Die endlose Saite 683
6. Unstetigkeiten 685

§ 2. Schwingungsprobleme und Integralgleichungen.
1. Ableitung der Integralgleichung 690
2. Potentielle und kinetische Energie 694
3. Einführung des Anfangszustandes 697

Seite
4. Erzwungene Schwingungen 698
5. Stabschwingungen 700
§ 3. Die Schwingungen einer Membran.
1. Die Differentialgleichung der schwingenden Membran 701
2. Die rechteckige Membran 704
3. Kreisförmige Membran 709
4. Analytische Eigenschaften der Lösungen 711
5. Die Integralgleichung der schwingenden Membran 716
§ 4. Die Randwertaufgabe der schwingenden Membran als Problem der Variationsrechnung.
1. Das Minimalproblem für den ersten Eigenwert 718
2. Die höheren Eigenwerte 721
3. Folgerungen aus den Minimaleigenschaften 724
4. Das Ritzsche Verfahren. Elliptische Membran 726
5. Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte 730
Lehrbücher zum siebzehnten bis neunzehnten Kapitel 734

Zwanzigstes Kapitel: **Ideale Flüssigkeiten.**
Von Th. v. Kármán in Aachen.

§ 1. Gleichgewichtsprobleme.
1. Gleichgewichtsbedingungen 734
2. Die freie Oberfläche 736
3. Die Gleichgewichtsgestalt rotierender Flüssigkeitsmassen unter Einfluß der eigenen Gravitation 737
4. Kapillarität 743
§ 2. Die Dynamik idealer Flüssigkeiten.
1. Begriffsbestimmungen 750
2. Kinematische Beziehungen 750
3. Wirbelfreie Strömung 752
4. Wirbelströmung 753
5. Anwendung auf die ebene Bewegung 754
6. Die Bewegungsgleichungen reibungsfreier Flüssigkeiten 755
7. Energie- und Impulssätze 757
8. Anwendung auf wirbelfreie Bewegung 759
9. Wirbelbewegung 760
§ 3. Ebene Potentialströmung.
1. Potentialfunktion und Stromfunktion 762
2. Quelle, Senke und Wirbelfaden 763
3. Strömung um einen festen Körper 764
4. Die auf den umströmten Körper wirkenden Kräfte und Momente . . . 766
5. Tragflügel mit unendlicher Spannweite 768
6. Potentialbewegung mit Unstetigkeitsflächen 775
7. Die Theorie der vena contracta 782
8. Stationäre Wellen 786
9. Geschwindigkeit einer Wellengruppe [1]) 790

[1]) Von Ph. Frank (Prag).

Seite

§ 4. Räumliche Potentialbewegung.
1. Methode der Quellen und Senken 792
2. Bewegung eines festen Körpers durch eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit 798
3. Kräfte, die auf einen Umdrehungskörper wirken 804
4. Die Trägheitskonstanten des Rotationsellipsoids 806
Lehrbücher 810

Einundzwanzigstes Kapitel: **Flüssigkeitsbewegung mit Reibung.**

Von H. Faxén und C. W. Oseen in Uppsala.

§ 1. Aufstellung der Grundgleichungen.
1. Ein Satz über die Spannungen 811
2. Das Gesetz von Poiseuille 812
3. Die Bezeichnungen 814
4. Die Beziehungen zwischen den Spannungen und der Deformationsgeschwindigkeit 814
5. Die vollständigen Differentialgleichungen 816
6. Die Spannungskomponenten an der Oberfläche eines ruhenden Körpers 818
7. Die linearisierten Differentialgleichungen 819

§ 2. Fundamentalintegrale der linearisierten Differentialgleichungen.
1. Die linearisierten Gleichungen in Stokes' Form 820
2. Die linearisierten Gleichungen für den Fall, daß das Koordinatensystem eine konstante Translationsgeschwindigkeit hat 821
3. Die linearisierten Gleichungen der ebenen Bewegung, wenn das Koordinatensystem eine konstante Translationsgeschwindigkeit hat 823
4. Die Bewegung eines starren Körpers 824
5. Die allgemeinsten linearisierten Differentialgleichungen 824

§ 3. Die Stokessche Widerstandsformel und verwandte Formeln.
1. Die Strömung um eine kleine Kugel 826
2. Genauere Berechnung der Strömung um eine Kugel. 828
3. Translation eines dünnen Kreiszylinders in einer zähen Flüssigkeit . . 831

§ 4. Exakte Lösungen der Bewegungsgleichungen einer reibenden unzusammendrückbaren Flüssigkeit.
1. Die Stromfunktion 833
2. Einführung komplexer Variablen 834
3. Die Bahnkurven 835
4. Die Geschwindigkeitsverteilung 835
5. Die Strömung zwischen koaxialen Zylindern 837

§ 5. Die Grenzschichtentheorie.
1. Die Grenzschicht 838
2. Die Bewegungsgleichung der Grenzschicht 839
3. Ablösung der Grenzschicht. 840
4. Die Grenzschicht in Hamels exakter Theorie 841

Seite

§ 6. Ist die Strömung bei unendlich kleiner Reibung annähernd gleich einer Potentialbewegung?

1. Lösung der vollständigen Differentialgleichungen mittels sukzessiver Annäherung 843
2. Verwendung der Fundamentalintegrale 844
3. Integralgleichungen zur Bestimmung der φ_i 845
4. Vereinfachung der Integralgleichungen bei verschwindend kleiner Reibung 846
5. Umformung der Geschwindigkeitskomponenten in dem von der Scheibe nicht durchschrittenen Raume 847
6. Die Geschwindigkeitskomponenten in dem von der Scheibe durchschrittenen Raume R_h 848
7. Die kreisrunde Scheibe 851
8. Über den Grund des Widerstandes 853
9. Das Ergebnis der Rechnung 853

Lehrbücher 854

In den Verweisungen im Text bedeutet z. B. XII, § 1, 4 (3): Zwölftes Kapitel, Paragraph 1, Ziffer 4, Gleichung 3 des vorliegenden Bandes. Bei Verweisungen auf den ersten Band ist der Vermerk „1. Bd.“ vorangesetzt.

I. Abschnitt.

Analytische Mechanik.

Erstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen allgemeiner mechanischer Systeme.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten.

1. Der freie Massenpunkt. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Massenpunktes von der Masse m in bezug auf ein Inertialsystem, X, Y, Z die entsprechenden Komponenten der auf ihn wirkenden Kraft, die von der Lage und Geschwindigkeit des Massenpunktes relativ zum Inertialsystem abhängen soll. Dann sind X, Y, Z gegebene Funktionen von $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, wobei, wie üblich, die Punkte Ableitungen nach der Zeit t bedeuten. Nach den Newtonschen Bewegungsgesetzen lauten dann die Differentialgleichungen der Bewegung

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y(x \ldots \dot{z}),\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z(x \ldots \dot{z}).$$

Das sind drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die drei unbekannten Größen x, y, z als Funktionen der Zeit t. Nach den im 1. Bd., VI, § 1, **6** bewiesenen Existenzsätzen kann man für irgend einen Wert von t, den „Anfangspunkt“ t_0 der Zeitskala, die Werte von $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, den „Anfangszustand“, willkürlich vorschreiben, und es gibt immer eine reguläre Lösung der Differentialgleichungen (1), die für $t = t_0$ die vorgeschriebenen Werte annimmt, wenn nur für diesen Anfangszustand die rechten Seiten von (1), d. h. die X, Y, Z regulär sind. Die allgemeine Lösung ist also von sechs willkürlichen Konstanten abhängig. Wenn ich alle sechs Zustandsgrößen $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ als unbekannte Funktionen auffasse, so kann ich die Gl. (1) auch durch ein System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen, nämlich

$$(2)\quad \begin{cases} m\dfrac{d\dot{x}}{dt} = X(x \ldots \dot{z}), & m\dfrac{d\dot{y}}{dt} = Y, & m\dfrac{d\dot{z}}{dt} = Z, \\ \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, & \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, & \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}. \end{cases}$$

Wir betrachten als einfachstes Beispiel die Bewegung im Schwerefeld. Wir ziehen dabei die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal nach aufwärts und bezeichnen mit g die Schwerbeschleunigung, die wir als konstant ansehen können, wenn wir uns auf ein genügend kleines Raumgebiet beschränken. Dann ist $X = Z = 0$, $Y = -mg$ und die Gl. (1) lauten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{3}$$

woraus durch Integration

$$x = c_1 t + c_2, \quad y = c_3 t + c_4 - \frac{g}{2} t^2, \quad z = c_5 t + c_6 \tag{4}$$

folgt, wobei die $c_1, c_2, \ldots, c_6$ willkürliche Konstante sind. Wir wählen den Anfangszustand so, daß zur Zeit $t = 0$ der Massenpunkt sich im Koordinatenursprung befindet, die Anfangsgeschwindigkeit vom Betrag v_0 in der x, y-Ebene liegt und den „Elevationswinkel“ α mit der positiven Seite der x-Achse nach oben gerechnet einschließt. Dann muß für $t = 0$ gelten: $x = y = z = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos\alpha$, $\dot{y} = v_0 \sin\alpha$, $\dot{z} = 0$. Dann folgt aber aus (4): $c_2 = c_4 = c_6 = 0$, $c_1 = v_0 \cos\alpha$, $c_3 = v_0 \sin\alpha$, $c_5 = 0$ und daher als endgültige Lösung die bekannte Formel für den „schiefen Wurf im luftleeren Raum“:

$$x = v_0 \cos\alpha \,.\, t, \quad y = v_0 \sin\alpha \,.\, t - \frac{g}{2} t^2, \quad z = 0. \tag{5}$$

2. Beispiel: Einfluß der Luftreibung auf die Wurfbewegung. Wenn wir über die von der Luft auf den bewegten Massenpunkt ausgeübte Reibungskraft die Annahme machen, daß sie dem Quadrat der Geschwindigkeit v proportional und ihr gerade entgegengerichtet ist, so lassen sich die Komponenten der auf m wirkenden Kräfte jetzt folgendermaßen schreiben: $X = -mCv^2 \cos\vartheta$, $Y = -mg - mCv^2 \sin\vartheta$, $Z = 0$. Dabei ist C der Reibungskoeffizient (eine Konstante) und ϑ der Winkel zwischen Flugbahntangente und positiver x-Richtung, so daß $\dot{x} = v \cos\vartheta$, $\dot{y} = v \sin\vartheta$. An Stelle der im luftleeren Raum geltenden Bewegungsgleichungen (3) treten daher nach (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Cv^2 \cos\vartheta, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - Cv^2 \sin\vartheta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{6}$$

Den Anfangszustand nehmen wir in **1** an.

Führen wir in (6) $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{s} = v$ ein, wo s die vom Anfangspunkt aus gemessene Bogenlänge der Bahnkurve ist, so wird daraus:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -C\dot{s}\dot{x}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -g - C\dot{s}\dot{y}. \tag{7}$$

Dividieren wir die erste dieser Gleichungen durch $\dot{x}$ und integrieren, so erhalten wir:

$$\frac{d \lg \dot{x}}{dt} = -C\dot{s}, \quad \lg \dot{x} = C_1 - Cs, \quad \dot{x} = e^{C_1} e^{-Cs}.$$

Da für $t = 0$ auch $s = 0$ wird, folgt aus den Anfangsbedingungen $e^{C_1} = v_0 \cos\alpha$ und daher

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \,.\, e^{-Cs}. \tag{8}$$

Nach L. Euler läßt sich die Integration von (6) auf Quadraturen zurückführen, wenn man als Hilfsgröße die Tangente p des Neigungswinkels der Flugbahn einführt. Dann ist

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \dot{y} = p\dot{x}. \tag{9}$$

Aus (7), (8), (9) folgt:

$$\dot{p}\dot{x} + g = 0, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} e^{2Cs}. \tag{10}$$

Da aber $ds = \sqrt{1+p^2}\, dx$, folgt aus (10):

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} e^{2Cs} ds. \tag{11}$$

Hier läßt sich auf beiden Seiten die Integration durch elementare Funktion ausführen. Wenn wir die Bezeichnungen

$$\Phi(p) = \sqrt{1+p^2} + \lg \mathrm{nat}(p + \sqrt{1+p^2}), \quad C_2 = \Phi(\mathrm{tg}\,\alpha) + \frac{g}{C v_0^2 \cos^2\alpha} \tag{12}$$

einführen, folgt aus (11) durch Quadratur [nach 1. Bd., I, § 2, (29)]:

$$\Phi(p) = C_2 - \frac{g e^{2Cs}}{C v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{13}$$

Das ist eine endliche Beziehung zwischen p und s, die zwei willkürliche Konstante C_1 und C_2 oder v_0 und α enthält. Aus (13) und (10) bzw. (13) und (9) folgt:

$$C dx = \frac{dp}{\Phi(p) - C_2}, \quad C dy = \frac{p\, dp}{\Phi(p) - C_2}. \tag{14}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich auch durch Quadratur integrieren; hingegen sind die dadurch entstehenden Funktionen von p nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Die Quadratur muß graphisch ausgeführt werden.

Wir erhalten so x und y als Funktionen von p und vier willkürlichen Konstanten, also eine Parameterdarstellung der Flugbahn, der „ballistischen Kurve“. Den zeitlichen Verlauf der Bewegung erhalten wir,

wenn wir in der ersten Gl. (10) für $\dot{x}$ seinen Wert aus (14) einsetzen, nämlich

$$\dot{x} = \frac{\dot{p}}{C[\Phi(p) - C_2]},$$

dann wird

$$\sqrt{gC}\,dt = -\frac{dp}{\sqrt{C_2 - \Phi(p)}}, \tag{15}$$

woraus durch Quadratur sich p als Funktion von t ergibt, die in die Integrale von (14) eingesetzt wird und so die endgültige Lösung der Bewegungsgleichungen (6) herzustellen gestattet.

3. Die Bewegungsgleichungen von Systemen freier Massenpunkte und deren Integrale. Wir betrachten jetzt ein System, das aus N freien materiellen Punkten besteht. Der Punkt mit dem Index i möge die Masse m_i, die rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, z_i in bezug auf ein Inertialsystem besitzen und auf ihn mögen Kräfte wirken, deren Komponenten längs der Koordinatenachsen X_i, Y_i, Z_i heißen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten dann analog zu (1)

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{16}$$

Fassen wir x_i, y_i, z_i zu einem Vektor $\mathfrak{r}_i$, dem „Lagevektor“, X_i, Y_i, Z_i zu einem „Kraftvektor“ $\mathfrak{k}_i$ zusammen, so lauten die Gl. (16) einfach

$$m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} = \mathfrak{k}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{17}$$

Addieren wir alle N Gleichungen (17) und verwenden die Abkürzungen

$$\sum_{i=1}^{N} \mathfrak{k}_i = \mathfrak{k}, \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{g}, \tag{18}$$

so folgt aus (17):

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \mathfrak{k}. \tag{19}$$

Man nennt $\mathfrak{g}$ die Bewegungsgröße oder den translatorischen Impuls des Systems, $\mathfrak{k}$ die Resultierende der „äußeren“ Kräfte, da bei der Summierung über die $\mathfrak{k}_i$ die inneren Kräfte wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung einander aufheben. Wirken auf das System keine äußeren Kräfte, ist also $\mathfrak{k} = 0$, so folgt aus (19) die Konstanz von $\mathfrak{g}$, oder bei Zerlegung in Komponenten

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \text{konst}, & \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i = \text{konst}, \\ \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{y}_i = \text{konst}, & \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{z}_i = \text{konst}. \end{cases} \tag{20}$$

Diese drei Integrale der Gl. (16) heißen die Impulsintegrale. Führen wir noch die Bezeichnungen

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i, \qquad m\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathfrak{r}_i \tag{21}$$

ein, wobei $\mathfrak{x}$ der Lagevektor des Schwerpunktes genannt wird, folgt aus (18), (19), (21)

$$m \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \mathfrak{k}, \tag{22}$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich so, als wäre die gesamte Masse in ihm vereinigt und als würden alle Kräfte an ihm angreifen.

Multiplizieren wir die Gl. (17) vektoriell mit $\mathfrak{r}_i$ und addieren wieder alle N so entstandenen Gleichungen, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\mathfrak{r}_i \times \ddot{\mathfrak{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{k}_i). \tag{23}$$

Nun ist nach der Differentiationsregel [1. Bd., II, § 3, (17)]: $\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i \times \dot{\mathfrak{r}}_i) = (\dot{\mathfrak{r}}_i \times \dot{\mathfrak{r}}_i) + (\mathfrak{r}_i \times \ddot{\mathfrak{r}}_i)$ und deshalb wegen $\dot{\mathfrak{r}}_i \times \dot{\mathfrak{r}}_i = 0$

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = \mathfrak{d}, \tag{24}$$

wobei

$$\mathfrak{i} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathfrak{r}_i \times \dot{\mathfrak{r}}_i), \qquad \mathfrak{d} = \sum_{i=1}^{N} (\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{k}_i). \tag{25}$$

Man nennt $\mathfrak{i}$ den Drehimpuls des Systems und $\mathfrak{d}$ das resultierende Drehmoment der äußeren Kräfte, wenn wir wieder annehmen, daß die inneren Kräfte kein resultierendes Drehmoment ausüben. Sind nur innere Kräfte vorhanden, also $\mathfrak{d} = 0$, folgt aus (24) die Konstanz von $\mathfrak{i}$ oder in Komponentenzerlegung

$$\begin{cases} \sum_i m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = \text{konst}, \\ \sum_i m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = \text{konst}, \qquad \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \text{konst} \end{cases} \tag{26}$$

die „Flächenintegrale".

Multiplizieren wir endlich die Gl. (17) skalar mit $\dot{\mathfrak{r}}_i$ und addieren wieder alle, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\mathfrak{r}} \ddot{\mathfrak{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathfrak{r}}_i \mathfrak{k}_i \tag{27}$$

oder wegen $\frac{d}{dt}(\dot{\mathfrak{r}}_i)^2 = 2\,\dot{\mathfrak{r}}_i \ddot{\mathfrak{r}}_i$

$$\frac{dK}{dt} = A, \tag{28}$$

wobei

$$(29)\qquad \begin{cases} K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathfrak{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \\ A = \sum_i (\mathfrak{v}_i \mathfrak{k}_i) = \sum_i (\dot{x}_i X_i + \dot{y}_i Y_i + \dot{z}_i Z_i). \end{cases}$$

K heißt die lebendige Kraft des Systems, A die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit der Kräfte $\mathfrak{k}_i$. Wenn wir annehmen, daß eine potentielle Energie existiert, d. h. eine Funktion V der Koordinaten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, ..., z_N, aus der sich die Kräfte nach der Regel

$$(30)\qquad X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

ableiten lassen, so folgt aus (28), (29), (30)

$$(31)\qquad A = -\frac{dV}{dt}, \qquad K + V = \text{konst},$$

das Energieintegral.

4. Die Gleichgewichtslagen als singuläre Punkte. Wenn die Kraftkomponenten X, Y, Z in (1) nur von den Koordinaten x, y, z abhängen, so sprechen wir von einem Kraftfeld. Die Punkte des Kraftfeldes, in denen der Massenpunkt dauernd in Ruhe verharren kann, nennt man Gleichgewichtslagen. Aus (1) oder (2) folgt wegen $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, daß in den Gleichgewichtslagen

$$(32)\qquad X(x, y, z) = Y(x, y, z) = Z(x, y, z) = 0$$

sein muß. Die Bewegung in der Umgebung der Gleichgewichtslagen untersuchen wir nur für Systeme mit einem Freiheitsgrad. Für diese reichen die im 1. Bd. gebotenen mathematischen Hilfsmittel aus. Der materielle Punkt möge sich nur längs einer Geraden bewegen können, die wir zur x-Achse wählen. Die Bewegungsgleichungen (2) reduzieren sich dann auf die ersten beiden, aus denen durch Division

$$(33)\qquad \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{X}{\dot{x}}$$

folgt. Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, die in der Umgebung jeder regulären Stelle nach 1. Bd., VI, § 1, **2**, $\dot{x}$ als Funktion von x zu bestimmen gestattet, wobei an der betrachteten Stelle selbst noch die Anfangsrichtung der Kurve in der $\dot{x}$-x-Ebene, der „Zustandsebene", willkürlich vorgeschrieben werden kann. Da nun der Gleichgewichtszustand als Ruhezustand und nach (32) durch den Punkt dargestellt wird, in dem $X = 0$, $\dot{x} = 0$ gilt, nimmt die rechte Seite von (33) für dieses Wertesystem von x, $\dot{x}$ den unbestimmten Wert 0/0 an und der betreffende Punkt ist ein singulärer Punkt der Differentialgleichung (33), in dem der zitierte Existenzsatz versagt. Man muß hier vielmehr die Sätze über das Verhalten der Lösungen in der Umgebung

singulärer Punkte anwenden, wie sie im 1. Bd., VI, § 3, **1** auseinandergesetzt sind. Nach diesen Sätzen kommt es auf die linearen Glieder in der Reihenentwicklung von Zähler und Nenner der rechten Seite von (33) an. Wegen $X = 0$ lautet die Entwicklung von X, wenn $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist: $X = a x + \cdots$, also die Gl. (33) nach Unterdrückung der Glieder höherer Ordnung

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{a x}{\dot{x}}. \tag{34}$$

Diese entspricht der Gl. (5) im 1. Bd., VI, § 3, in der also für unseren Fall $y = \dot{x}$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ zu setzen ist. Die charakteristische Gleichung im 1. Bd., VI, § 3, (6) lautet also jetzt $k^2 = a$. Bei positivem a hat diese zwei reelle Wurzeln, der „Gleichgewichtszustand“ $x = 0$, $\dot{x} = 0$ ist ein Sattelpunkt der Integralkurven der Gl. (34); für negatives a sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert imaginär, wir haben es mit einem Wirbelpunkt zu tun. Nach dem Satze von Poincaré im 1. Bd., S. 242 folgt daraus für die unverkürzte Gl. (33) im Falle $a > 0$ auch, daß $x = 0$, $\dot{x} = 0$ ein Sattelpunkt ist, während im Falle $a < 0$ es auch ein Strudelpunkt sein könnte. Doch läßt sich direkt zeigen, daß $x = 0$, $\dot{x} = 0$ auch hier ein Wirbelpunkt von (33) ist. Das Energieintegral (31) lautet in unserem Falle einfach $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V = \text{konst.}$ Wegen $-\frac{dV}{dx} = X$ ist $V = -\frac{a}{2}x^2 + \cdots$, also haben für kleine Werte von x, $\dot{x}$ die Integralkurven die Gestalt der Kurven $\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{a}{2}x^2 = \text{konst}$, also für $a < 0$ die von Ellipsen, die den Punkt $x = 0$, $\dot{x} = 0$ einschließen, der also ein Wirbelpunkt der Lösungen ist. Im Falle des Sattelpunktes gehen durch den Gleichgewichtszustand zwei reelle „Zustandskurven“, sie stellen Bewegungen dar, die mit verschwindender Geschwindigkeit sich asymptotisch der Gleichgewichtslage nähern, die also in diesem Falle $a > 0$ eine „instabile“ ist. Einen Wirbelpunkt erreicht keine Integralkurve. In diesem Falle kann der Massenpunkt niemals dem Gleichgewichtszustand beliebig nahekommen, die ellipsenähnlichen Zustandskurven stellen Oszillationen um den Gleichgewichtszustand dar, der in diesem Falle $a < 0$ ein „stabiler“ ist.

5. Das D'Alembertsche Prinzip. Wir bezeichnen die infinitesimalen Änderungen der Koordinaten der in **3** betrachteten N Massenpunkte mit δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, …, δz_N. Dabei sind nicht die wirklich infolge der Bewegung eintretende Änderungen gemeint, sondern alle möglichen, „virtuellen“ Änderungen, die nur mit den dem System vorgeschriebenen Bewegungsbeschränkungen vereinbar sind. Wenn die Massenpunkte wie

in 3 „frei“ sind, so können die $3N$ Größen $\delta x_1 \dots \delta z_N$ beliebige voneinander unabhängige Werte annehmen. Wir können dann die Bewegungsgleichungen (16) auch in folgender Weise zusammenfassen: Es soll die Gleichung

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{N} [(m_i \ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i] = 0$$

gelten, wenn die $\delta x_1 \dots \delta z_N$ virtuelle Verschiebungen freier Massenpunkte sind. Wegen ihrer Unabhängigkeit voneinander folgt aus (35) dann (16). Wenn aber Bewegungsbeschränkungen vorhanden sind, wenn z. B. die Massenpunkte alle oder teilweise starr miteinander verbunden sind, so sind die $3N$ Größen $\delta x_1 \dots \delta z_N$ nicht mehr alle voneinander unabhängig, sondern durch n von ihnen sind die anderen bestimmt. Das D'Alembertsche Prinzip sagt dann aus, daß auch in diesem Falle die Bewegungsgleichungen des Systems aus (35) folgen. Nur sind hier von den virtuellen Verschiebungen $\delta x_1 \dots \delta z_N$ alle durch n unter ihnen ausdrückbar, die selbst willkürliche Werte haben können. Aus (35) folgt dann nur das Verschwinden der Koeffizienten dieser n Verschiebungen, also n Bewegungsgleichungen. Unter den Kräften in (35) sind nur die „eingeprägten“ Kräfte zu verstehen, nicht diejenigen, welche die starren Verbindungen oder sonstigen Bewegungsbeschränkungen aufrechterhalten.

Wenn man anstatt der rechtwinkligen Koordinaten andere einführt, die keinen Beschränkungen mehr unterliegen, sondern die gerade ausreichen, um eine Lage des Systems festzulegen (es müssen das offenbar n an der Zahl sein), so müssen sich aus (35) die Bewegungsgleichungen für ein solches System von „n Freiheitsgraden“ in diesen neuen Koordinaten ableiten lassen. Das führt zu den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

§ 2. Die Lagrangeschen und Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

1. Gestalt der Lagrangeschen Gleichungen. Wenn wir ein mechanisches System betrachten, das aus N materiellen Punkten besteht, deren rechtwinklige Koordinaten in bezug auf ein Inertialsystem wir jetzt mit $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{3N}$ bezeichnen, so werden die Bewegungen des Systems durch das d'Alembertsche Prinzip (§ 1, 5) beherrscht. Nennen wir die Massen m_1 $(= m_2 = m_3)$, m_4 $(= m_5 = m_6), \dots, m_{3N}$ und die Komponenten der eingeprägten Kräfte $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{3N}$, so sagt dieses Prinzip in seiner Lagrangeschen Form [§ 1, (35)] aus, daß die Gleichung

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} X_i \delta x_i, \qquad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad \ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

bestehen muß, wenn die $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{3N}$ beliebige infinitesimale Änderungen der Koordinaten sind, die mit den Bedingungsgleichungen, den einzigen Beschränkungen der Bewegungsfreiheit des Systems, verträglich sind. Wir betrachten Systeme von n Freiheitsgraden, bei denen wir die $x_1, x_2, \ldots$ als Funktionen von n „generalisierten" Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ansehen können, so daß jede infinitesimale Änderung δq_j der q_j mit den Bedingungsgleichungen verträglich ist. (Holonome Systeme.) Die Beziehungen haben die Gestalt

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, 3N. \tag{2}$$

Ist die Zeit t nicht explizite enthalten (die q_i heißen dann skleronome Koordinaten), so beziehen sich die q_j auch auf ein Inertialsystem. Aus Gl. (2) folgt

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j, \quad i = 1, 2, \ldots, 3N; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i \delta x_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j, \qquad Q_j = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \tag{4}$$

Man nennt die Q_j die auf das Koordinatensystem der q_j bezogenen generalisierten Kraftkomponenten. Mit Hilfe der Identitäten

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_j} \qquad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \tag{5}$$

von denen die zweite aus Gl. (3) folgt, ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{x}_i\right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j. \tag{6}$$

Wenn wir die lebendige Kraft K des Systems einführen, wobei [nach § 1, (29)]

$$2K = \sum_i m_i \dot{x}_i^2,$$

so folgt wegen (5)

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{x} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = p_j. \tag{7}$$

Die p_j heißen die generalisierten Impulskomponenten. Aus (1), (6), (7) und (4) ergibt sich dann

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}\right]\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j, \tag{8}$$

woraus wegen der Willkürlichkeit der δq_j die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

hervorgehen. Setzt man in K die Ausdrücke für die $\dot{x}_i$ aus (3) ein, so erhält es die Form

$$K = a + \sum_{j=1}^{n} a_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{10}$$

wo die a, a_j, a_{jk} bekannte Funktionen der q_j, t sind. Man sieht aus (3), daß im Falle skleronomer Koordinaten $\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0\right)$ die a, a_j verschwinden, also nach (10) K homogen quadratisch in den $\dot{q}_i$ ist. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall, daß die Zeit t in diesen Koeffizienten nicht explizite enthalten ist, wenn sie auch in Gl. (2) vorkommen mag. Dann ist

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = a_j + \sum_k a_{jk} \dot{q}_k, \quad \frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial a}{\partial q_j} + \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{l,k} \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \dot{q}_l \dot{q}_k,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k,l} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_k a_{jk} \ddot{q}_k.$$

Durch Vertauschung der Summationsindizes erhalten wir

$$\sum_{k,l} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k = \sum_{k,l} \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} \dot{q}_l \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_k.$$

Durch Einsetzen aller dieser Ausdrücke in (9) erhalten die Lagrangeschen Gleichungen die entwickelte Gestalt

$$\sum_k a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k} \begin{bmatrix} lk \\ j \end{bmatrix} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_k w_{kj} \dot{q}_k - \frac{\partial a}{\partial q_j} = Q_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} lk \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \right), \quad w_{kj} = -w_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j}. \tag{12}$$

Man nennt die $\begin{bmatrix} lk \\ j \end{bmatrix}$ Christoffelsche Dreiindizessymbole.

Wenn die Kraftkomponenten Q_j gegebene Funktionen der $q_j, \dot{q}_j, t$ sind, haben wir in den Bewegungsgleichungen (9) bzw. (11) n Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die n Funktionen q_j der Zeit t vor uns. Wenn die Zeit in (2) nicht vorkommt, ist $a = a_j = 0$, daher nach (12) auch $w_{kj} = 0$, und die Bewegungsgleichungen (11) nehmen die einfachere Gestalt

$$\sum_k a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k} \begin{bmatrix} lk \\ j \end{bmatrix} \dot{q}_l \dot{q}_k = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

an. Wenn aber t in den Gl. (2) auftritt, so können wir die Gl. (11) doch in die Gestalt (13) bringen, indem wir sie

$$\sum_k a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k} \begin{bmatrix} lk \\ j \end{bmatrix} \dot{q}_l \dot{q}_k = Q_j + R_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{14}$$

$$R = \sum_k w_{jk} \dot{q}_k + \frac{\partial a}{\partial q_j} \tag{15}$$

schreiben. D. h. wir können so rechnen, als wären die q_j auf ein Inertialsystem bezogen; nur müssen wir die Kraft mit den Komponenten R_j, die „Reduktionskraft der Relativbewegung", hinzufügen. Wenn die R_j verschwinden, so ist das benutzte Koordinatensystem ein Inertialsystem, auch wenn t in den Gl. (2) vorkommt.

2. Beispiele. Wir betrachten einen materiellen Punkt mit der Masse m, dessen rechtwinklige Koordinaten im Inertialsystem x, y, z sein mögen. Als q_j wählen wir die räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ im selben Inertialsystem. Die Gl. (2) lauten dann

$$(16) \qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta.$$

Daraus folgt nach leichter Rechnung

$$(17) \qquad K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2).$$

Wenn wir die Kraftkomponenten mit $Q_r, Q_\vartheta, Q_\varphi$ bezeichnen, so folgt aus Gl. (17) durch Einsetzen in Gl. (9)

$$(18) \qquad \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - mr\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = Q_r, \\ mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = Q_\vartheta, \\ mr^2\sin^2\vartheta\,\ddot{\varphi} + 2mr\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{r} + 2mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta} = Q_\varphi, \end{cases}$$

also Bewegungsgleichungen von der Gestalt der Gl. (13).

Als Beispiel von Koordinaten, die sich auf kein Inertialsystem beziehen, betrachten wir die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ eines Massenpunktes in bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Achse dauernd mit der z-Achse des Inertialsystems zusammenfällt, das aber als Ganzes mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die Transformationsgleichungen (2) lauten dann

$$(19) \qquad x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t, \qquad y = \xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t, \qquad z = \zeta.$$

Sie enthalten t explizite und für die lebendige Kraft ergibt sich

$$(20) \qquad \begin{cases} K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \\ \qquad + \frac{m\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) + m\omega(\dot{\xi}\eta - \eta\dot{\xi}), \end{cases}$$

also in der Bezeichnung von Gl. (10) und (12)

$$(21) \qquad \begin{cases} a = \frac{m}{2}\omega^2(\xi^2 + \eta^2), \qquad a_\xi = -m\omega\eta, \qquad a_\eta = m\omega\xi, \\ a_\zeta = 0, \qquad w_{\xi\eta} = 2m\omega, \qquad w_{\eta\zeta} = w_{\xi\zeta} = 0. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann so, als wäre ξ, η, ζ ein rechtwinkliges Inertialsystem; nur ist die Reduktionskraft mit den rechtwinkligen Komponenten R_ξ, R_η, R_ζ hinzuzufügen, die nach Gl. (15)

$$(22) \qquad R_\xi = -2m\omega\dot{\eta} + m\omega^2\xi. \qquad R_\eta = 2m\omega\dot{\xi} + m\omega^2\eta, \qquad R_\zeta = 0$$

lauten. Die Resultierende besteht aus zwei Teilkräften, die beide senkrecht zur Drehungsachse wirken, und zwar hat die eine den Betrag $2m\omega\bar{v}$ (wo $\bar{v}$ die Komponente der Geschwindigkeit in der ξ,η-Ebene ist) und wirkt senkrecht zur Richtung von $\bar{v}$. Sie wird gewöhnlich Coriolis-Kraft genannt. Die zweite Teilkraft hat den Betrag $m\omega^2\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ und wirkt radial. Sie heißt Zentrifugalkraft. Man sieht, daß in dem Ausdruck Gl. (15) das erste Glied rechts die Verallgemeinerung der Coriolis-Kraft, das zweite die der Zentrifugalkraft ist.

3. Energie- und Impulssatz. Wenn wir zunächst unter K eine beliebige Funktion der q_j und $\dot{q}_j$ verstehen und die zu ihr reziproke Funktion K^* durch

$$K^* = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - K \tag{23}$$

definieren, so können wir aus den Gl. (9), indem wir jede mit dem entsprechenden $\dot{q}_j$ multiplizieren und alle addieren, die Beziehung

$$\frac{dK^*}{dt} = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j \tag{24}$$

gewinnen. Sie ergibt sich leicht bei Verwendung der Identitäten

$$\dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \ddot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{und} \quad \frac{dK}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial K}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right).$$

Wenn K die durch (10) gegebene lebendige Kraft eines mechanischen Systems ist, wo die a, a_j, a_{jk} wieder die Zeit t nicht enthalten mögen, so wird

$$K^* = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - a. \tag{25}$$

Wenn in den Gl. (2) die Zeit nicht explizite vorkommt, ist nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen nach (10), (23)

$$2K = \sum_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j, \qquad K^* = K. \tag{26}$$

Nach (24), (26) ist die zeitliche Zunahme der lebendigen Kraft gleich der in derselben Zeit von den eingeprägten Kräften geleisteten Arbeit. (Energiesatz.) Existiert ein Potential V, so ist nach (4) und § 1, (30)

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \; (j = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{also} \quad \frac{dV}{dt} = -\sum_j Q_j \dot{q}_j \tag{27}$$

und es folgt aus (24), (26), (27) das Energieintegral

$$K + V = E_0, \tag{28}$$

wo E_0 die Energiekonstante bedeutet. Definiert man die „Lagrangesche Funktion“ L durch

$$L = K - V, \tag{29}$$

so lauten die Bewegungsgleichungen (9) wegen (27) einfach:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Wenn eine bestimmte Koordinate, z. B. q_1, in K nicht vorkommt und außerdem die entsprechende Kraftkomponente Q_1 verschwindet, so heißt q_1 eine „verborgene“ Koordinate, und es ergibt sich aus (9) die Konstanz der Impulskomponente p_1. Wir haben in diesem Falle ein Integral

$$p_1 = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} = \text{konst.} \tag{31}$$

unseres Gleichungssystems (9), das Impulsintegral. Wenn q_1 eine rechtwinklige Koordinate (z. B. $q_1 = x_1$) ist, nimmt (31) analog zu § 1, (20) die Gestalt $m_1 \dot{x}_1 = \text{konst.}$ an.

4. Beziehungen zur Variationsrechnung. Wenn wir das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{32}$$

einführen, so sind die Bewegungsgleichungen in der Gestalt (30) nach der Variationsrechnung (1. Bd., V., § 1, 3) die Bedingungen dafür, daß für jede von einer ihrer Lösungen aus vorgenommene Variation δq_j der Koordinaten δJ verschwindet. Dabei sind die δq_j Variationen der q_j bei konstantem t. Man kann aber noch eine allgemeinere Abänderung der Bewegung definieren, wenn man ihre Darstellung in die der geometrischen Gestalt der Bahnkurve und die ihres Zeitverlaufes zerlegt. Die erstere ist dadurch gegeben, daß die n Koordinaten q_j als Funktionen eines willkürlichen Parameters u dargestellt werden; den Zeitverlauf kennen wir, wenn t als Funktion desselben u bekannt ist. Wir führen dann in J dieses u als unabhängige Veränderliche ein. Wenn wir die Ableitungen nach u mit einem Strich bezeichnen, also

$$q_j' = \frac{dq_j}{du}, \qquad t' = \frac{dt}{du}, \qquad \dot{q}_j = \frac{q_j'}{t'} \tag{33}$$

setzen, wird

$$J = \int_{u_0}^{u_1} L\left(q_j, \frac{q_j'}{t'}\right) t'\,du, \tag{34}$$

wo u_0, u_1 feste Werte von u sind. Wir betrachten wieder eine Funktionenschar $q_j = q_j(u, \alpha)$, $t = t(u, \alpha)$ und setzen

$$\delta q_j = \left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha, \quad \delta t = \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha, \quad \delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha. \tag{35}$$

Dann können wir wieder die Gl. (9) vom 1. Bd., V., § 1 heranziehen, um δJ zu berechnen, müssen aber dabei beachten, daß wir es jetzt mit den $n+1$ Funktionen $t, q_1, \ldots, q_n$ der unabhängigen Veränderlichen u zu tun haben, und daß an Stelle von L jetzt Lt' tritt. Das so erhaltene δJ entspricht einer Abänderung der Bewegung, bei der nicht nur die q_j bei konstantem t, sondern für jeden bestimmten Wert des Parameters u alle $t, q_1, \ldots, q_n$ abgeändert werden. Die δq_j entsprechen der Änderung der geometrischen Gestalt der Bahnkurve, δt der Änderung des Zeitverlaufes der Bewegung. Nach der genannten Formel der Variationsrechnung ergibt sich, wenn L eine beliebige Funktion der q_j und $\dot{q}_j$ ist, die Zeit t aber nicht explizite enthält,

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta J = \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - L^*\delta t\Big]_{u_0}^{u_1} + \int_{u_0}^{u_1}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\delta q_j t'\,du \\ + \int_{u_0}^{u_1}\frac{dL^*}{du}\delta t\,du; \end{aligned} \right.$$

$$(37)\qquad L^* = -L + \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Ist L die Lagrangesche Funktion eines mechanischen Systems [Gl. (29)], so ist wegen (26), (28)

$$(38)\qquad L^* = K^* + V = K + V = E_0.$$

Ist die Kurve $\alpha = 0$ des $n+1$-dimensionalen Raumes, von der die Variation ausgeht, eine Lösung der Bewegungsgleichungen (30), so ist wegen (38), (29), (7)

$$(39)\qquad \delta J = \Big[\sum_{j=1}^{n} p_j\delta q_j - (K+V)\delta t\Big]_{u_0}^{u_1}.$$

Wenn man umgekehrt annimmt, daß für ein Funktionensystem $q_j(u), t(u)$ für alle Variationen $\delta J = 0$ wird, wobei die $\delta q_j, \delta t$ nur dadurch beschränkt sind, daß sie an den Integrationsgrenzen u_0, u_1 verschwinden sollen, so folgt aus (36) wegen des Verschwindens der von den Grenzen herrührenden Glieder, daß die Koeffizienten der $\delta q_j, \delta t$ verschwinden müssen. Daraus folgen die Bewegungsgleichungen (9) und außerdem $\frac{dL^*}{du} = 0$, d. h. nach (38) das Energieintegral. Die Aussage $\delta J = 0$, in dem eben besprochenen Sinne verstanden, nennt man das Hamiltonsche Prinzip.

Da in den angestellten Betrachtungen t keine gegenüber den q_j ausgezeichnete Rolle mehr spielt, können wir mit ihrer Hilfe die Bewegungs-

gleichungen (9) in Differentialgleichungen für die Funktionen $q_j(u)$, $t(u)$ umformen. Wenn wir die Bezeichnungen

$$k = \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij} q_i' q_j', \qquad k_i = \frac{\partial k}{\partial q_i'} \tag{40}$$

einführen, so ist für homogen quadratisches K, also skleronome Koordinaten q_i:

$$K = k\dot{u}^2 = \frac{k}{t'^2}, \qquad p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = k_i \dot{u}$$

und daher

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{K}\, t'\, du = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{k}\, du, \qquad \delta \int \sqrt{K}\, t'\, du = \delta \int \sqrt{k}\, du. \tag{41}$$

Dabei ist die Variation so auszuführen, daß jedes δq_j an den Grenzen und δt überhaupt verschwindet. Da Gl. (36) auch gilt, wenn wir $L = \sqrt{K}$ setzen, so schreibt sich Gl. (41) auch

$$\int \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(\sqrt{K})\, \delta q_i t'\, du = \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sqrt{k})\, \delta q_i\, du; \tag{42}$$

$$\Lambda_i(F) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \lambda_i(f) = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i}. \tag{43}$$

Wegen der Willkürlichkeit der δq_i folgt aus (42)

$$\Lambda_i(\sqrt{K})\, t' = \lambda_i(\sqrt{k}). \tag{44}$$

Es ist also nach Gl. (43) und (44)

$$\lambda_i(\sqrt{k}) = \frac{1}{2\dot{u}\sqrt{K}} \Lambda_i(K) - \frac{1}{4\sqrt{K^3}} \frac{dK}{dt} \frac{\partial k}{\partial q_i'}. \tag{45}$$

Daraus folgt mit Hilfe von (24), (9), (43):

$$\frac{\lambda_i(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2K}\left(Q_i - \frac{k_i}{2k} \sum_{h=1}^{n} Q_h q_h'\right) \tag{46}$$

Wenn wir Kräfte annehmen, die nach Gl. (26) von einem Potential V abhängen, so wird aus Gl. (46), wenn wir nach Gl. (38) $K = E_0 - V$ setzen, nach leichter Rechnung:

$$\sqrt{E_0 - V}\, \lambda_i(\sqrt{k}) = \sqrt{k}\, \frac{\partial \sqrt{E_0 - V}}{\partial q_i} - \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial q_i'} \frac{d\sqrt{E_0 - V}}{du}.$$

Daraus folgt aber, wenn wir die Bedeutung von $\lambda_i(f)$ nach Gl. (43) beachten,

$$\lambda_i\left(\sqrt{(E_0 - V)k}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{47}$$

Das sind aber die Bedingungen dafür, daß die erste Variation des Integrals

$$I = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{(E_0 - V)k}\, du = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\tfrac{1}{2}(E_0 - V) \sum_{i,j} a_{ij} q_i' q_j'}\, du \tag{48}$$

verschwindet. Die Aussage $\delta I = 0$ nennt man gewöhnlich das „Prinzip der kleinsten Wirkung“ in der Euler-Jacobischen Gestalt. Es enthält nur eine Aussage über die geometrische Gestalt der Bahnkurven, nicht über den Zeitverlauf der Bewegung.

5. Die Hamiltonsche und die Routhsche Form der Bewegungsgleichungen. Wir sagen, daß durch die q_i und $\dot{q}_i$ der Zustand eines mechanischen Systems gegeben ist. Aus den Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, 2; \ldots, n, \tag{49}$$

wo L durch Gl. (29) definiert ist, lassen sich die $\dot{q}_i$ als Funktionen der q_i und p_i berechnen. Wir können also den Zustand auch durch die q_i und p_i definieren, durch die sogenannten „kanonischen Zustandsgrößen“. Die p_i sind dabei wegen Gl. (7) die Impulskomponenten. Man kann dann die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in Differentialgleichungen für die q_i und p_i umformen. Zu diesem Zwecke drücken wir die durch Gl. (37) definierte, zur Lagrangeschen Funktion „reziproke“ Funktion vermöge der Gl. (49) als Funktion der q_i und p_i aus. So entsteht die Hamiltonsche Funktion

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = -L + \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j. \tag{50}$$

Wenn wir immer H als Funktion der $\dot{q}_i$ und p_i, L aber als Funktion der q_i und $\dot{q}_i$ betrachten, ergibt sich aus Gl. (50)

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial p_i} + \sum_{h=1}^{n} p_h \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial p_i} + \dot{q}_i,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} + \sum_{k} p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i}.$$

Daraus folgt wegen (49) und (30)

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \tag{51}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Das ist die „kanonische“ oder Hamiltonsche Gestalt der Bewegungsgleichungen.

Wenn K in den $\dot{q}_i$ quadratisch homogen ist, sind die p_i wegen (49) in den $\dot{q}_i$ linear homogen und H wird wegen Gl. (38)

$$H = K + V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} p_i p_j + V, \tag{53}$$

wo die A_{ij}, V Funktionen der q_i sind. Die Ableitung der Gl. (52) aus den Gl. (30) gilt aber, wenn L eine beliebige Funktion der q_i und $\dot{q}_i$

ist [1. Bd., V., §. 4, (12)]. Sind die q_i z. B. die durch Gl. (16) definierten Kugelkoordinaten, so folgt aus Gl. (17), (29), (49), wenn wir die Impulskomponenten mit $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ bezeichnen:

$$(54) \qquad H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}p_\varphi^2\right) + V(r, \vartheta, \varphi).$$

Wenn wir die n Koordinaten q_i in zwei Gruppen zerlegen, $w_1\, w_2 \dots w_\mu$ und $q_1\, q_2 \dots q_{n-\mu}$, und nur die den ersten μ entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{w}_j$ mit Hilfe der Gleichungen $u_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}$ $(j = 1, 2, \dots, \mu)$ eliminieren, so lassen sich alle Zustandsgrößen als Funktionen von $w_1 \dots w_\mu, u_1 \dots u_\mu, q_1 \dots q_{n-\mu}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{n-\mu}$ ausdrücken. Wenn wir dann als eine Art Mittelding zwischen der Lagrangeschen und der Hamiltonschen Funktion die Routhsche Funktion R einführen:

$$(55) \quad R(w_1 \dots w_\mu, u_1 \dots u_\mu, q_1 \dots q_{n-\mu}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{n-\mu}) = -L + \sum_{j=1}^{\mu} u_j \dot{w}_j,$$

und sie durch die als Argumente eingetragenen Zustandsvariablen ausdrücken, ergeben sich ganz analog den Gl. (51)

$$(56) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial u_j} = \dot{w}_j, \quad \dfrac{\partial R}{\partial w_j} = -\dfrac{\partial L}{\partial w_j} & (j = 1, 2, \dots, \mu), \\ \dfrac{\partial R}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & (i = 1, 2, \dots, n-\mu). \end{cases}$$

Dabei ist L immer als Funktion der $q_i\, \dot{q}_i\, w_j\, \dot{w}_j$ betrachtet. In R spielen dann die $q_i\, \dot{q}_i\, w_j$ dieselbe Rolle wie in H die q_i.

Aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (30), die in der jetzigen Bezeichnung in zwei Gruppen, eine in den q_i, die andere in den w_j, zerfallen, folgt mit Hilfe von Gl. (56):

$$(57) \quad \begin{cases} \dfrac{dw_j}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial u_j}, \quad \dfrac{du_j}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial w_j} & (j = 1, 2, \dots, \mu), \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial R}{\partial q_i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n-\mu). \end{cases}$$

Man kann also die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems mit Hilfe der Routhschen Funktion immer so umformen, daß sie aus 2μ Differentialgleichungen erster Ordnung für die w_j, u_j von der Gestalt der Hamiltonschen Gleichungen (52) und aus $n-\mu$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die q_i von der Gestalt der Lagrangeschen Gleichungen (30) bestehen.

6. Integrale der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Die Gl. (52) bilden $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2n$ Zustandsgrößen $q_i \dots q_n, p_1 \dots p_n$. Nach den allgemeinen Sätzen über die Inte-

gration eines solchen Systems (1. Bd., VI., § 1, 6) gibt es immer $2n$ Funktionen q_i, p_i von t und $2n$ willkürlichen Konstanten, die diesen Differentialgleichungen genügen. Wir nennen diese Funktionen die Lösungen des Systems (52). Wenn H die Zeit t nicht explizite enthält, kommt t in den Gleichungen nur als Differential dt vor. Dann ist eine der Konstanten additiv mit t verbunden. Die Lösungen haben dann die Gestalt

$$(58) \qquad \begin{cases} q_i = \varphi_i(t - t_0, c_1 c_2 \dots c_{2n-1}) \\ p_i = \psi_i(t - t_0, c_1 c_2 \dots c_{2n-1}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die $t_0, c_1, \dots, c_{2n-1}$ die $2n$ willkürlichen Integrationskonstanten bedeuten.

Unter einem Integral des Systems (52) versteht man eine Funktion der Zeit t und der $2n$ Zustandsgrößen q_i, p_i, aus der beim Einsetzen der Lösungen die Zeit t und daher auch die Konstante t_0 herausfällt, die also in eine Funktion der $c_1 c_2 \dots c_{2n-1}$ übergeht. Ein solches Integral $f(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$ muß daher die Identität

$$(59) \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0$$

erfüllen, wenn für die q_i, p_i die Lösungen (58) eingesetzt werden. Aus (59) folgt aber mit Hilfe von (52)

$$(60) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) = 0,$$

wo (H, f) den Poissonschen Klammerausdruck

$$(61) \qquad (H, f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$$

bedeutet. Die Integrale f sind dann gleichzeitig die Integrale der linear homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (60) in den $2n + 1$ unabhängigen Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$. Im 1. Bd., XV, § 1 sind solche Gleichungen mit drei unabhängigen Variablen behandelt, und es ist in 5 gezeigt, daß sich jedes Integral als Funktion von $2 = 3 - 1$ unabhängigen Integralen darstellen läßt. Analog dazu besitzt (60) $2n$ voneinander verschiedene Integrale, durch die sich alle übrigen ausdrücken lassen. Da sie mit den Integralen des Systems (52) zusammenfallen, erhält man sie durch Auflösung der Lösungen (58) nach den Konstanten in der Gestalt:

$$(62) \qquad \begin{cases} f_k(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, 2n - 1), \\ f_{2n}(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = t - t_0. \end{cases}$$

Unter den $2n$ Integralen sind also $2n - 1$, in denen t nicht vorkommt. Jedes Integral von (60) läßt sich als Funktion der $2n$ Integrale

$f_1, f_2, \dots f_{2n-1}, f_{2n} - t$ darstellen. Ist das Integral von der Zeit unabhängig, so genügt es wegen $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ und Gl. (60) der Gleichung

$$(H, f) = 0. \tag{63}$$

Diese Gleichung hat $2n - 1$ verschiedene Integrale, die alle die Zeit nicht enthalten und als die wir die $f_1 \dots f_{2n-1}$ in Gl. (62) ansehen können. Jedes die Zeit nicht enthaltende Integral läßt sich also als Funktion dieser $2n - 1$ Integrale darstellen.

Ist insbesondere H selbst von t unabhängig, so ist es offenbar ein Integral von (63), läßt sich also als Funktion von $f_1 \dots f_{2n-1}$ darstellen. Da H nach Gl. (53) in gewöhnlichen mechanischen Problemen die Energie ist, läßt sich die Energie eines Systems als Funktion der $2n - 1$ Integrationskonstanten $c_1 \dots c_{2n-1}$ ausdrücken.

Wenn f und g Integrale von (63) sind, so läßt sich zeigen, daß der Poissonsche Klammerausdruck (f, g) ebenfalls ein Integral von (63) ist. Wenn nämlich f, g, H drei beliebige Funktionen der q_i und p_i sind, so besteht zwischen den Poissonschen Klammerausdrücken die Jacobische Identität:

$$((f, g)H) + ((g, H)f) + ((H, f)g) = 0, \tag{64}$$

die man durch einfaches Einsetzen der Definitionsgleichung (61) der Klammerausdrücke mit Hilfe leichter Rechnungen bestätigt. Ist laut Voraussetzung $(H, f) = 0$ und $(H, g) = 0$, so folgt nach (64) daraus, daß (f, g) ein Integral von Gl. (63) ist. Sind also f und g Integrale der Differentialgleichungen der Mechanik (52), und zwar solche, in denen t nicht vorkommt, so läßt sich aus ihnen durch Bildung des Klammerausdruckes (f, g) ein drittes Integral herleiten. Dieser Satz heißt gewöhnlich das Poissonsche Theorem und gilt auch noch, wenn f und g die Zeit enthalten, was aber hier nur ohne Beweis angeführt werden soll.

Da man ohnehin weiß, daß jede Funktion von f und g ein Integral von (63) ist, liefert das Poissonsche Theorem nur dann ein „neues" Integral, wenn (f, g) sich nicht als Funktion von f und g ausdrücken läßt.

Wenn wir r verschiedene Integrale von (63), $f_1, f_2, \dots f_r$, haben, aus denen nach dem Poissonschen Theorem kein neues abgeleitet werden kann, d. h. wenn für je zwei f_i, f_j

$$(f_i f_j) = \varphi_{ij}(f_1 f_2 \dots f_3) \tag{65}$$

gilt, so sagen wir nach Lie, daß die r Funktionen eine „Funktionengruppe" bilden. Zu dieser Gruppe rechnet man dann noch alle Funktionen der $f_1 f_2 \dots f_r$. Wenn wir r unabhängige Funktionen dieser $f_1 f_2 \dots f_r$ betrachten, etwa $g_1 g_2 \dots g_r$, so bilden diese offenbar ebenfalls

eine r-gliedrige Funktionengruppe; denn aus der Definition der Klammerausdrücke folgert man leicht

$$(66) \qquad (g_k g_l) = \frac{D(g_k g_l)}{D(f_1 f_2)}(f_1 f_2) + \frac{D(g_k g_l)}{D(f_1 f_3)}(f_1 f_3) + \cdots$$

Dabei bedeutet $\frac{D(g_k g_l)}{D(f_1 f_2)}$ die Funktionaldeterminante $\frac{\partial g_k}{\partial f_1}\frac{\partial g_l}{\partial f_2} - \frac{\partial g_l}{\partial f_1}\frac{\partial g_l}{\partial f_2}$ (s. 1. Bd., § 3, 2). Wegen der Gruppeneigenschaft der f_i sind nach (65) die Klammerausdrücke Funktionen der f_i, also auch der g_k; dasselbe folgt für die Funktionaldeterminanten schon daraus, daß die g_k Funktion der f_i sind. Es sind also die $(g_k g_l)$ durch die $g_1 \dots g_r$ ausdrückbar. Man sagt, sie definieren dieselbe Gruppe wie die f_i, nur in einer anderen Form.

Wenn insbesondere die Funktionen φ_{ij} in Gl. (65) identisch verschwinden, also für je zwei Funktionen der Gruppe $(f_i f_j)$ identisch verschwindet, bilden die $f_1 \dots f_r$ ein „Involutionssystem“ [1]).

Nach Gl. (66) ist dann jede andere Form der Gruppe auch ein Involutionssystem, da aus dem Verschwinden der $(f_i f_j)$ auch das der $(g_k g_l)$ folgt.

Das Energieintegral H bildet nach Gl. (63) mit jedem von der Zeit unabhängigen Integral ein Involutionssystem.

Wir betrachten nun ein aus r Integralen bestehendes Involutionssystem $f_j(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = c_j$ $(j = 1, 2, \dots, r)$ und setzen voraus, daß die r angeschriebenen Gleichungen nach $p_1 p_2 \dots p_r$ auflösbar sein sollen. Die Auflösungen mögen

$$(67) \quad p_j = \psi_j(q_1, q_2 \dots q_n,\ p_{r+1} \dots p_n,\ c_1, c_2 \dots c_r), \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

lauten. Dann läßt sich zeigen, daß die Funktionen $p_j - \psi_j$ $(j = 1, 2, \dots, r)$ der $2n$ Veränderlichen q_i, p_i auch ein Involutionssystem bilden. Der Beweis läßt sich durch direktes Ausrechnen führen: aus den Gleichungen $f_r = c_r$ folgt durch Differenzieren

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_i} + \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial p_h}\frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial p_i} + \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial p_h}\frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} = 0 \quad (i = r+1, r+2, \dots, n).$$

Aus diesen $2n - r$ Gleichungen lassen sich die $2n - r$ Größen

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, n), \qquad \frac{\partial f_j}{\partial p_h}, \quad (h = r+1, \dots, n)$$

als lineare Funktionen der r Größen $\frac{\partial f_j}{\partial p_h}$, $(h = 1, 2, \dots, r)$ berechnen.

[1]) Man sagt nämlich nach einem Sprachgebrauch von S. Lie von zwei Funktionen f_i und f_j, daß sie in „Involution“ liegen, wenn $(f_i, f_j) = 0$.

Daher lassen sich nach der Definition (61) die Klammerausdrücke (f_i, f_j) als quadratische Formen derselben r Größen ausdrücken, also:

$$(68) \qquad (f_i, f_j) = \sum_{h,k=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial p_h} A_{kh}.$$

Bei Durchführung der Rechnung erhält man für die Koeffizienten die Werte

$$(69) \qquad A_{kh} = \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial q_h} + \sum_{\alpha=r+1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi_h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \psi_h}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_\alpha} \right).$$

Berechnet man andererseits die Klammerausdrücke $(p_k - \psi_k,\ p_h - \psi_h)$ direkt nach (61), so erhält man, da die ψ_h nur von $q_1 \dots q_n,\ p_{r+1} \dots p_n$ abhängen, ebenfalls

$$(70) \qquad (p_k - \psi_k,\ p_h - \psi_h) = A_{kh}.$$

Wenn die (f_i, f_j) verschwinden, folgt aus (68), (70) ein System von r linear homogenen Gleichungen für die r Unbekannten

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} (p_k - \psi_k,\ p_h - \psi_h) \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

wobei i festgehalten wird. Da die Determinante der Koeffizienten die Funktionaldeterminante der $f_1 \dots f_r$ nach den $p_1 \dots p_r$ ist, die gemäß der Voraussetzung der Auflösbarkeit der Gleichungen $f_r = c_r$ nicht verschwinden kann, so müssen alle r Unbekannten verschwinden.

Durch Wiederholung dieser Schlußweise folgt das Verschwinden der Klammerausdrücke $(p_h - \psi_h,\ p_k - \psi_k)$ selbst, was zu beweisen war.

Besteht insbesondere das Involutionssystem $f_r = c_r$ aus n Gliedern, so enthalten die durch Auflösung entstehenden Funktionen ψ_j in (67) gar keine p_i mehr, und man erhält für die Klammerausdrücke nach (69), (70)

$$(71) \qquad (p_h - \psi_h,\ p_k - \psi_k) = \frac{\partial \psi_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k}.$$

Wenn also $f_j = c_j\ (j = 1, 2, \dots, n)$ ein n-gliedriges Involutionssystem bildet, so bilden die durch Auflösung entstehenden Gleichungen $p_j = \psi_j(q_1 \dots q_n, c_1 \dots c_n)\ (j = 1, 2, \dots, n)$ die Koeffizienten eines vollständigen Differentials

$$(72) \qquad \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, dq_j = d\Psi,$$

wo Ψ eine Funktion von $q_1 \dots q_n,\ c_1 \dots c_n$ ist.

§ 3. Die Differentialgleichungen der Bahnkurven.

1. Die Bahnkurven eines materiellen Punktes in der Ebene. Wenn wir die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m in rechtwinkligen Koordinaten x, y in der Ebene darstellen, so lauten seine Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$(1) \qquad m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y,$$

wobei X, Y gegebene Funktionen von x, y sind und die rechtwinkligen Komponenten der auf m wirkenden Kraft bedeuten[1]). Führen wir wie in § 2, (33) ein Parameter u längs der Bahnkurve ein, so wird $\dot{x} = x'\dot{u}$ $\ddot{x} = x''\dot{u}^2 + x'\ddot{u}$ und analog für y. Für die lebendige Kraft K erhalten wir dann $2K = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = m(x'^2 + y'^2)\dot{u}^2$. Multiplizieren wir die Gl. (1) mit y' bzw. mit x' und subtrahieren wir, wobei wir x'' und y'' durch ihre Werte ersetzen, so erhalten wir, wenn zugleich $\dot{u}^2$ durch K ausgedrückt wird:

$$\frac{x''y' - y''x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)^3}} = \frac{1}{2K}\,\frac{Xy' - Yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \tag{2}$$

Multiplizieren wir aber die erste der Gl. (1) mit x', die zweite mit y', und addieren, so erhalten wir

$$\frac{dK}{du} = Xx' + Yy'. \tag{3}$$

Setzen wir

$$\frac{x''y' - y''x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)^3}} = G, \quad \frac{Xy' - Yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = P, \tag{4}$$

so bedeutet G nach einer bekannten Formel der Differentialgeometrie den reziproken Wert des Krümmungsradius r der Bahnkurve, und P ist die Kraftkomponente senkrecht zur Bahntangente. Gl. (2) schreibt sich dann einfach

$$G = \frac{1}{2K}P. \tag{5}$$

Wenn wir die Geschwindigkeit v durch $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, die Tangentialkomponente $\bar{P}$ der Kraft durch $\bar{P}v = X\dot{x} + Y\dot{y}$ und r durch $rG = 1$ in (3) und (5) einführen, so erhalten wir die übliche Gestalt der Bewegungsgleichungen in der „natürlichen“ Zerlegung in Tangential- und Normalkomponente: $m\dot{v} = \bar{P}$, $mv^2/r = P$.

Fügen wir zu (2) [bzw. (5)] und (3) noch eine Differentialgleichung hinzu, die den Parameter u definiert, z. B. $x'^2 + y'^2 = 1$, wo dann u die Bogenlänge der Bahnkurve wäre, so haben wir drei simultane Differentialgleichungen für die drei Funktionen x, y, K des Parameters u. Dabei definieren x, y wieder die geometrische Gestalt der Bahnkurve, K den Zeitverlauf der Bewegung.

Die höchsten vorkommenden Ableitungen sind x'', y'', K'; lösen wir nach diesen auf, so sehen wir, daß für einen Wert von u die Werte von x', y', K willkürlich vorgeschrieben werden können, d. h. die Richtung der Bahnkurve und die lebendige Kraft.

---

[1]) Dabei sind Reibungskräfte und ähnliche, die von $\dot{x}$, $\dot{y}$ abhängen, nicht berücksichtigt.

Wir erhalten Differentialgleichungen, in denen nur x, y und ihre Ableitungen nach u vorkommen, wenn wir K aus (3) und (5) eliminieren; dann ergibt sich

$$\frac{d}{du}\left(\frac{P}{G}\right) = 2(Xx' + Yy'). \tag{6}$$

Mit der Parametergleichung zusammen haben wir nun zwei simultane Differentialgleichungen für x und y als Funktion von u vor uns. Aus (4) folgt, daß in (6) die Ableitungen von x und y bis zur dritten vorkommen. Aus (5) folgt, daß die Bahnkurven bei wachsendem K sich immer mehr den Geraden ($G = 0$) und bei abnehmendem K sich immer mehr den Kraftlinien ($P = 0$) nähern.

2. Die Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme[1]. Betrachten wir wie in § 2, 4 die Koordinaten $q_1 \dots q_n$ und die Zeit t als Funktion eines Parameters u, so können wir für ein allgemeines mechanisches System ganz analoge Betrachtungen durchführen wie in **1** für einen materiellen Punkt. Wir bedienen uns der Bezeichnungen des § 2 und gehen von (46) aus. Wir setzen:

$$G_i = \frac{\lambda_i(\sqrt{k})}{\sqrt{k}}, \quad P_i = Q_i - \frac{k_i}{2k}\sum_{h=1}^{n} Q_h q_h' \tag{7}$$

Wenn wir $\lambda_i(\sqrt{k})$ nach seiner Definitionsgleichung § 2, (43) ausrechnen, so erhalten wir ähnlich wie bei der Berechnung der expliziten Gestalt der linken Seite der Lagrangeschen Gleichungen in § 2, **1** (13)

$$G_i = \frac{1}{2k}\left(g_i - \frac{k_i}{2k}\sum_{h=1}^{n} g_h q_h'\right), \tag{8}$$

$$g_i = \lambda_i(k) = \sum_j a_{ij} q_j'' + \sum_{j,l}\left[\begin{matrix} j, l \\ i \end{matrix}\right] q_j' q_l'. \tag{9}$$

Aus § 2, (46) folgt dann

$$G_i = \frac{1}{2K} P_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{10}$$

Dazu kommt die aus § 2, (24) wegen $K^* = K$ folgende Energiegleichung

$$\frac{dK}{du} = \sum_{h=1}^{n} Q_h q_h' \tag{11}$$

Die Gl. (8) und (10) sind die Verallgemeinerung der Gl. (5) und (3), also der Zerlegung in eine Tangential- und eine Normalkomponente. Sie bilden zusammen mit der den Parameter u definierenden Differentialgleichung ein System von $n + 2$ Differentialgleichungen für die $n + 1$-

[1] L. Berwald und Ph. Frank, Math. Zeitschr. **21**, 154 ff., 1924.

Funktionen $q_1, \ldots, q_n, K$ von u. Da aber wegen Gl. (7) und (8) die Identitäten

$$\sum_{i=1}^{n} P_i q_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i' = 0 \tag{12}$$

bestehen, ist von diesen Gleichungen mindestens eine überzählig, so daß im allgemeinen $n+1$ unabhängige darunter sind. Im Falle $n = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = y$ kommen wir auf den Fall von **1** zurück. Aus den zwei Gleichungen (10), von denen wegen der aus (12) folgenden Beziehungen $P_1 x' + P_2 y' = 0$ und $G_1 x' + G_2 y' = 0$ die zweite eine Folge der ersten ist, läßt sich eine neue bilden, die Gl. (5); es muß nur $G = G_1 y' - G_2 x'$ und $P = P_1 y' - P_2 x'$ gesetzt werden.

Es können wieder genau wie in **1** durch Elimination von K aus Gl. (10) und (11) Differentialgleichungen zur Berechnung der geometrischen Gestalt der Bahnkurve unabhängig vom Zeitverlauf gebildet werden. Es entstehen so die simultanen Differentialgleichungen für $q_1(u), \ldots, q_n(u)$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{P_i}{G_i}\right) = 2 \sum_{h=1}^{n} Q_h q_h' \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{13}$$

Wirken keine äußeren Kräfte, so genügen (wegen $P_i = 0$) die Bahnkurven wegen Gl. (10) den Differentialgleichungen zweiter Ordnung $G_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, denen sich bei wachsendem K die Bahnkurven auch bei beliebigen Kräften nähern. Von den $2n$ willkürlichen Konstanten in der allgemeinen Lösung der Gleichungen $G_i = 0$ kommt eine nur additiv mit u verbunden vor (weil u in den Differentialgleichungen nicht explizite vorkommt), bestimmt also nur den Punkt der Bahnkurve, in dem $u = 0$ gesetzt wird. Wenn wir als Parametergleichung eine Differentialgleichung annehmen, in der nur die q_i und q_i' vorkommen, so besteht zwischen den Anfangswerten dieser Größen, also den Integrationskonstanten, eine Relation. Wählen wir z. B. q_1 selbst als Parameter, also $u = q_1$, so lautet die Parametergleichung $q_1' = 1$, es ist also q_1' nicht mehr willkürlich wählbar. Die Lösung der Differentialgleichung der kräftefreien, der sogenannten geodätischen Bahnen hängt also (außer von der Wahl des Anfangspunktes der Parameterzählung) von $2n - 2$ willkürlichen Konstanten ab. Bei der Integration der Differentialgleichung (13) der allgemeinen Bahnkurven, in denen auch die dritten Ableitungen der q_i vorkommen, kann noch eines unter den q_i'' willkürlich vorgeschrieben werden. Die Lösung hängt also von $2n - 1$ Konstanten ab.

Beim Verschwinden der äußeren Kräfte verschmelzen also ∞^1 Bahnkurven miteinander. So gehen im Falle des schiefen Wurfes in einer Vertikalebene die ∞^3 Parabeln mit vertikaler Achse in die ∞^2 Geraden über.

3. Die verschiedenen Arten von Bahnkurven[1]). Wenn wir eine Lösung der Gl. (13), also die geometrische Gestalt einer Bahnkurve vor uns haben, so lassen sich nach (8) und (7) die G_i und P_i und nach § 2, (40) auch k längs derselben berechnen, also nach (10) auch $K = \frac{P_i}{2\,G_i}$, der Wert der lebendigen Kraft, also der Zeitverlauf während der Bewegung. Denn wenn K als Funktion von u gegeben ist, läßt sich nach § 2, (33) wegen $K = k\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ durch eine Quadratur t berechnen. Im allgemeinen ist also längs einer Bahnkurve nur eine Bewegung, mit eindeutig bestimmter lebendiger Kraft möglich, d. h. die Bahnkurve kann nur auf zwei Arten durchlaufen werden, die durch Umkehrung des Sinnes der Geschwindigkeit auseinander hervorgehen. Denn durch Ausziehen der Quadratwurzel ergeben sich für dasselbe K zwei Werte von $\frac{du}{dt}$, da $\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{\frac{K}{k}}$.

Der Wert von K wird nur unbestimmt, wenn längs einer Bahnkurve $P_i = 0$ und $G_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt. Eine solche Bahnkurve kann auf unendlich viele Arten durchlaufen werden. Sie ist eine „geodätische" Bahn, die außerdem den n Differentialgleichungen erster Ordnung $P_i = 0$ genügt. Im Falle von **1** ist das eine gerade Linie, die zugleich Kraftlinie ist. Beim schiefen Wurf ist z. B. längs jeder Wurfparabel die Geschwindigkeit (bis auf den Sinn) eindeutig bestimmt; längs der vertikalen Geraden aber kann ein Wurf mit beliebiger Geschwindigkeit stattfinden. Bei der Planetenbewegung ist längs jeder Bahnellipse die Geschwindigkeit bestimmt, längs der zum anziehenden Zentrum führenden Geraden sind aber Bewegungen mit allen Geschwindigkeiten möglich. Da die lebendige Kraft positiv ist, kann nur längs solcher Bahnkurven oder Teilen von Bahnkurven eine Bewegung stattfinden, längs deren der Quotient $\frac{P_i}{G_i}$ positiv ausfällt. Wenn das nun längs eines Stückes einer Bahnkurve stattfindet, so wird dieses von Punkten begrenzt, in denen $P_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Das kann nach Gl. (7) auf zwei Arten geschehen: entweder verschwinden dort auch alle Q_i, dann ist der Punkt eine Gleichgewichtslage des Systems. Da in diesem Punkte wegen $K = \frac{P_i}{2\,G_i}$ eine Nullstelle von $K(u)$ ist, haben wir es wegen Gl. (11), nach der auch $\frac{dK}{du}$ verschwindet,

---

[1]) P. Painlevé, Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèms. Bull. Soc. Math. France **22**, 136 ff., 1894. — Ph. Frank, Eine geometrische Deutung von Painlevés Theorie der reellen Bahnkurven. Proceedings of the first international congress for applied mechanics, Delft 1924.

mit einer mehrfachen Nullstelle zu tun. Wenn hingegen alle P_i verschwinden, nicht aber alle Q_i, so kann nach (7) auch $\sum_{h=1}^{n} Q_h q_h'$ nicht verschwinden, die Nullstelle ist nach Gl. (11) eine einfache.

Das Verhalten des Systems in der Nähe eines solchen „Haltepunktes", wie Painlevé ihn wegen des Verschwindens der lebendigen Kraft nennt, kann man untersuchen, wenn man von der Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = K(u) \tag{14}$$

ausgeht, welche die zeitliche Veränderung des Parameters regelt, wenn wir u so gewählt haben, daß $k = 1$ gilt, wo k durch § 2, (40) definiert ist und daher im einfachsten Falle u die Bogenlänge bedeutet. Es sei u_0 der dem Haltepunkt entsprechende Wert des Parameters und wir nehmen an, daß $K(u)$ um diese Stelle in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Wenn $u = u_0$ eine α-fache Nullstelle von K ist, lautet diese Entwicklung:

$$K(u) = (u-u_0)^\alpha [a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)^2 + \cdots], \quad a_0 \neq 0. \tag{15}$$

Aus Gl. (14) und (15) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} dt &= \pm \frac{du}{(u-u_0)^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)^2 + \cdots}} \\ &= \pm a_0 (u-u_0)^{-\frac{\alpha}{2}} \left[1 - \frac{a_1}{2a_0}(u-u_0) + \cdots\right] du. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Für eine einfache Nullstelle ($\alpha = 1$) folgt durch Integration

$$t - t_0 = \pm 2a_0 \sqrt{(u-u_0)} \left[1 - \frac{a_1}{6a_0}(u-u_0) + \cdots\right]$$

und durch Quadrieren

$$(t-t_0)^2 = 4a_0^2 (u-u_0)\left[1 - \frac{a_1}{3a_0}(u-u_0) + \cdots\right].$$

Durch Auflösung ergibt sich $u - u_0$ als eine Reihe, die nach Potenzen von $(t-t_0)^2$ fortschreitet und mit der ersten Potenz dieses Ausdruckes wirklich beginnt. Der Haltepunkt $u = u_0$ wird also zur Zeit $t = t_0$ wirklich erreicht. In der Umgebung dieses Zeitpunktes entspricht Werten von $t - t_0$, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, derselbe Wert von u. Das System bewegt sich also dem Haltepunkt zu, kehrt dort um und durchläuft dieselben Lagen mit umgekehrtem Sinne der Geschwindigkeit nochmals. Der Haltepunkt ist ein Umkehrpunkt. Wenn $K(u)$ zwei einfache Nullstellen hat, so ist Gl. (14) von der Art der im 1. Bd., III., § 5, (1) behandelten. Das System führt eine periodische Bewegung aus.

Wenn die Nullstelle $u = u_0$ eine zweifache ist, also der Haltepunkt eine Gleichgewichtslage des Systems, so ist in Gl. (15) $\alpha = 2$ zu setzen, und es folgt durch Integration von Gl. (16)

$$t - t_0 = \pm a_0 \log \mathrm{nat}(u - u_0) \mp \frac{a_1}{2}(u - u_0) + \cdots$$

Der Haltepunkt kann also nie zu einer endlichen Zeit erreicht werden, da $u = u_0$ einen Wert $t = \infty$ nach sich zieht. Dasselbe gilt auch für $\alpha > 2$. Einem Haltepunkt, der eine Gleichgewichtslage ist, nähert sich das System also asymptotisch immer mehr, ohne ihn je zu erreichen.

4. Beispiele. Wir wählen als speziellen Fall von **1** zum Parameter u die x-Koordinate. Dann lautet die zu (3) und (5) hinzutretende Parametergleichung $x' = 1$, daher ist $x'' = 0$ und es bedeuten $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Nach Gl. (4) ist dann:

$$G = \frac{-y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}, \quad P = \frac{Xy' - Y}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Differentialgleichung der Bahnkurven erhalten wir dann durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (6). Es wird aus ihr:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(Y - y'X)(1 + y'^2)}{y''}\right] = 2(X + y'Y).$$

Durch Ausführung der Differentiation erhält man:

$$(17) \quad \begin{cases} y''' = \dfrac{Ay''^2 + By''}{Y - y'X}, \\ A = -3X, \quad B = \dfrac{\partial Y}{\partial x} + y'\left(\dfrac{\partial Y}{\partial y} - \dfrac{\partial X}{\partial x}\right) - y'^2\dfrac{\partial X}{\partial y}. \end{cases}$$

Wir haben eine Differentialgleichung dritter Ordnung für y als Funktion von x vor uns. Es gibt also ∞^3 Bahnkurven in der Ebene. Haben wir insbesondere ein homogenes Schwerefeld vor uns und wählen wir die xy-Ebene als eine Vertikalebene, so ist $X = 0$, $Y = -mg$, wo g die konstante Schwerebeschleunigung ist. Dann ist in (17) $A = B = 0$ und die Gleichung der Bahnkurven lautet einfach $y''' = 0$; ihre allgemeine Lösung ist $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$, wo a, b, c willkürliche Konstante sind. Es sind die Gleichungen aller Parabeln, deren Achse vertikal ist. Nach **3** können nur diejenigen wirklich durchlaufen werden, für die $G > 0$ ist, daraus folgt aber $a > 0$, d. h. diese Parabeln müssen nach oben konvex sein.

Betrachten wir rechtwinklige Raumkoordinaten x, y, z und wählen als Parameter u die Bogenlänge, so daß $k = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ wird, so ergeben sich nach (8), (9) für die G_1, G_2, G_3 die Werte x'', y'', z''. Das sind aber die Komponenten eines Vektors, der zur Länge den reziproken Krümmungsradius und zur Richtung die der Hauptnormale der Bahnkurve hat.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Zentralbewegung in der Ebene, und zwar in Polarkoordinaten r, φ ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$). Wir benutzen die Gl. (10), (11). Es sei $q_1 = \frac{1}{r} = \varrho$, $q_2 = \varphi$. Die Kraft wirke nur radial, d. h. es sei $Q_1 = Q_\varrho \neq 0$, $Q_2 = Q_\varphi = 0$. Als Parameter wählen wir $u = \varphi$, also $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$. Dann wird $k = \frac{m}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\right)$ und daher nach Gl. (7), (8) und (9)

$$G_1 = G_\varrho = \frac{m^2}{4k^2\varrho^6}(\varrho'' + \varrho), \quad G_2 = G_\varphi = -\frac{m^2\varrho'}{4k^2\varrho^6}(\varrho'' + \varrho),$$

$$P_1 = \frac{m}{2k\varrho^2}Q_\varrho, \quad P_2 = -\frac{m\varrho'}{2k\varrho^2}Q_\varrho.$$

Aus der Gl. (10) berechnen wir dann $K = \frac{Q_\varrho(\varrho'^2 + \varrho^2)}{2(\varrho'' + \varrho)}$. Da nach (11) aber $\frac{dK}{du} = Q_\varrho\varrho'$, so folgt durch Elimination von K aus den beiden letzten Gleichungen nach kurzer Rechnung

$$\frac{d}{du}\left(\frac{Q_\varrho}{\varrho'' + \varrho}\right) = 0. \tag{18}$$

Das ist eine Differentialgleichung dritter Ordnung für $\varrho = \frac{1}{r}$ als Funktion von φ. Wenn C eine willkürliche Konstante ist, folgt aus (18)

$$\varrho'' + \varrho = CQ_\varrho. \tag{19}$$

Führen wir anstatt Q_ϱ die gewöhnlich verwendete, auf r bezogene Kraftkomponente R ein, die nach § 2, Gl. (4) mit Q_ϱ durch die Beziehung $\varrho' Q_\varrho = r' R$ zusammenhängt, so wird aus (19) wegen $r' = -\frac{\varrho'}{\varrho^2}$

$$\varrho'' + \varrho = -\frac{CR}{\varrho^2}. \tag{20}$$

Damit eine Lösung wirklich durchlaufen werden kann, muß wegen $K > 0$, wenn wir $Q_\varrho > 0$ voraussetzen, $\varrho'' + \varrho > 0$ sein, also in Gl. (19) $C > 0$.

§ 4. Transformationstheorie der Hamiltonschen Differentialgleichungen.

1. Integralinvarianten. Wir betrachten eine Schar von Lösungen der Hamiltonschen Differentialgleichungen § 2, (52), die von einem Parameter α abhängt. Längs jeder einzelnen Lösung denken wir uns t, q_i, p_i als Funktionen eines Parameters u gegeben, so daß die ganze Schar durch ein Gleichungssystem der Form $t = t(u, \alpha)$, $q_i = q_i(u, \alpha)$, $p_i = p_i(u, \alpha)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dargestellt ist. Wir denken uns die $2n + 1$ Größen t, q_i, p_i als rechtwinklige Koordinaten in einem $2n + 1$-dimensionalen Raume aufgetragen, so daß unsere Lösungsschar in diesem Raume eine einparametrige Kurvenschar ergibt. Wir betrachten nun in diesem Raume eine geschlossene Kurve und die durch jeden Punkt derselben hindurchgehende Kurve unserer Lösungsschar. Auf diese Weise muß eine Art Röhre entstehen. Außer der geschlossenen Ausgangskurve betrachten wir noch eine zweite derartige, dieselbe Röhre umschlingende Kurve. Die Wahl des Parameters u auf den Kurven unserer Schar sei so getroffen, daß allen Punkten der ersten umschlingenden Kurve C_0 der Wert $u = u_0$, allen Punkten der zweiten C_1 der Wert $u = u_1$ entspricht. Auf der zweidimensionalen Röhrenmannigfaltigkeit, deren jeder Punkt durch ein Wertesystem u, α bestimmt ist, sind dann diese beiden Kurven durch Gleichungen $u_0 = f_0(\alpha)$, $u_1 = f_1(\alpha)$ gegeben. Wir betrachten nun das durch § 2, (34) definierte Integral J. Es ist längs der Erzeugenden $\alpha = 0$ unserer Röhre zwischen C_0 und C_1 erstreckt. (Gl. 39) des § 2 gibt uns dann die Änderung von J, wenn wir zu einer benachbarten Erzeugenden übergehen. Da die Kurvenschar, von der wir hier ausgegangen sind, nicht eine beliebige ist, wie die bei der Definition von δq_i, δp_i, δJ in § 2, (35) zugrunde gelegte, sondern eine Schar von Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen, so geben die Gleichungen $q_i = q_i(u, \alpha)$ nicht nur für $\alpha = 0$, sondern für beliebiges α eine solche Lösungskurve und Gl. (39) in § 2 gibt die Änderung von J auch, wenn wir von einer Erzeugenden mit beliebigem α-Werte ausgehen. Wir können daher unter den Variationen in § 2, (39) die durch § 2, (35) definierten Größen, aber nicht für $\alpha = 0$, sondern für beliebige α verstehen. Dann können wir § 2, (39) von $\alpha = 0$ bis zu einem beliebigen Werte integrieren und erhalten:

$$J_\alpha - J_0 = \int_0^\alpha \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \Big]_{u_0}^{u_1}. \tag{1}$$

Dabei sind J_0 und J_α die Werte des Integrals J längs der Erzeugenden mit den Parameterwerten 0 bzw. α erstreckt und $H = K + V$ [nach

§ 2, (53)]. Da die betrachteten Erzeugenden eine Röhre bilden, muß mit wachsendem α bei einem bestimmten Werte $\alpha = \bar{\alpha}$ sich wieder die Erzeugende $\alpha = 0$ ergeben. Bilden wir die Gl. (1) für $\alpha = \bar{\alpha}$, so verschwindet die Integraldifferenz links. Das Integral rechts ist die Differenz zweier Integrale, die längs der geschlossenen Kurven C_0 bzw. C_1 erstreckt sind. Da diese beiden aber willkürliche, die Röhre einmal umschlingende Kurven sind, muß das Integral auf der rechten Seite von (1) längs jeder solchen Kurve denselben Wert haben. Man drückt das so aus:

$$W = \oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t\right] \tag{2}$$

ist eine Integralinvariante[1]) des Systems der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, und zwar eine „relative" Integralinvariante, weil sie längs einer geschlossenen Kurve des $2n+1$-dimensionalen Raumes erstreckt werden muß, was durch das Zeichen $\oint$ angedeutet ist. Wenn insbesondere die durch die geschlossene Kurve C dargestellten Zustände des Systems alle demselben Zeitpunkt angehören, also längs C die Beziehung $\delta t = 0$ gilt, reduziert sich die Integralinvariante (2) auf die einfachere Form:

$$W_0 = \oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i\right]. \tag{3}$$

W_0 hat offenbar die Eigenschaft: wenn wir im $2n$-dimensionalen „Zustandsraum" oder „Phasenraum" uns eine geschlossene Kurve C ziehen und Systeme betrachten, deren Anfangszustände zur Zeit $t = 0$ durch die Punkte dieser Kurve dargestellt werden, so erfüllen die darstellenden Punkte dieser Systeme in jedem anderen Zeitpunkt wieder eine geschlossene Kurve, längs der das Integral (3) immer noch den ursprünglichen Wert W_0 hat. Man kann nun zeigen, daß aus der Voraussetzung, daß W [Gl. (2)] eine relative Integralinvariante ist, wieder folgt, daß die zugrunde gelegte Kurvenschar $q_i = q_i(u, \alpha)$ usw. eine Schar von Lösungen der Hamiltonschen Differentialgleichungen war. Wäre sie nämlich eine beliebige Schar, würde aus W, da nach α integriert ist, eine Funktion von u werden. Die Bedingung, daß W eine Integralinvariante ist, lautet also $dW = 0$, wenn wir

$$dW = \frac{dW}{du} du, \quad dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial u} du, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

---

[1]) E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Paris 1922, p. 17 ff.

setzen, analog wie wir

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \delta t = \frac{\partial t}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

gesetzt haben. Da nun $d\delta q_i = \delta dq_i$ usw., folgt

$$\begin{cases} d\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\Big) = \delta\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt\Big] \\ + \sum_{i=1}^{n}\Big[dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i\Big] + dt\delta H - dH\delta t. \end{cases} \tag{6}$$

Integrieren wir nach α längs der geschlossenen Kurve C, so entsteht links dW, während auf der rechten Seite das erste Glied als vollständiges Differential keinen Beitrag liefert. Wenn wir noch für δH seinen ausgerechneten Wert einsetzen, folgt aus (6)

$$\begin{cases} dW = \oint_C \sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt\Big)\delta q_i + \Big(-dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt\Big)\delta p_i\Big] \\ + \Big(\frac{\partial H}{\partial t} dt - dH\Big)\delta t. \end{cases} \tag{7}$$

Aus $dW = 0$ folgen dann wegen der Willkürlichkeit der δq_i, δp_i die Gl. (52), § 2 und die Energiegleichung $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$, also wenn H von t nicht explizite abhängt, $H =$ konst. Man kann also die Aussage: „W ist eine Integralvariante“ auch als Grundprinzip der Mechanik aufstellen.

2. Berührungstransformationen. Wenn man $2n + 1$ voneinander unabhängige Funktionen Q_j, P_j, T der q_i, p_i, t einführt, so ist der „Zustand“ des mechanischen Systems durch diese neuen Größen ebenso bestimmt, wie durch die Koordinaten q_i, Impulse p_i und Zeit t. Es werden nur in dem in **1** betrachteten $2n + 1$-dimensionalen Raume durch Gleichungen der Form

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \\ P_j = P_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \\ T = T(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

krummlinige Koordinaten eingeführt. Während aber von den ursprünglichen Zustandsgrößen die q_i die Lage des Systems, die p_i (in Verbindung mit den q_i) den Geschwindigkeitszustand, t den Zeitpunkt festlegen, kann man von den neuen $2n + 1$ Zustandsgrößen nur sagen, daß sie alle zusammen Lage, Geschwindigkeit und Zeitpunkt bestimmen. Offenbar müssen sich die Kurven des $2n + 1$-dimensionalen Raumes, die den Lösungen der Bewegungsgleichungen § 2, (52) entsprechen,

auch in den neuen Zustandsgrößen Q_i, P_j, T ausdrücken lassen. Da sich nach **1** die Lösungskurven dadurch definieren lassen, daß W in Gl. (2) für sie eine Integralinvariante ist, so kann man die transformierten Gleichungen durch Transformation von W finden, ebenso wie man die durch eine bloße Transformation der Lagekoordinaten q_j entstehende Form der Bewegungsgleichungen § 2, (9) nach Lagrange durch Transformation der lebendigen Kraft K finden konnte.

Da vermöge (8) die δQ_j, δP_j, δT linear homogene Ausdrücke in den δq_i, δp_i, δt werden und umgekehrt, so geht der Integrand in Gl. (2) in eine Linearform der δQ_j, δP_j, δT über. Weil über eine geschlossene Kurve integriert wird, kann dabei immer ein vollständiges Differential hinzugefügt werden, ohne den Wert von W zu ändern. Eine ausgezeichnete Rolle spielen offenbar die Transformationen von der Form (8), bei denen W in den neuen Variablen wieder dieselbe Gestalt hat wie in den alten. Dann muß offenbar die folgende Identität bestehen:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t = \sum_{j=1}^{n} P_j \delta Q_j - \overline{H} \delta T - \delta \overline{\Psi}. \tag{9}$$

Dabei können $\overline{H}$ und $\overline{\Psi}$ beliebige Funktionen der P_j, Q_j, T sein.

Derartige Transformationen sind schon im 1. Bd., V, § 5, **3** unter dem Namen „kanonische Transformationen“ untersucht; nur stehen an der Stelle der hier mit $\overline{\Psi}$, q_i, Q_i, p_i, P_i, t, T, H, $\overline{H}$ bezeichneten Größen dort die Buchstaben Ψ', x_i, x_i', y_i, y_i', t, t', H, H'. Eine Transformation der Gestalt (8), zu der sich Funktionen H, $\overline{H}$ und $\overline{\Psi}$ so finden lassen, daß die Identität (9) gilt, ist also eine „kanonische“ Transformation. Da die Integralinvariante W nach (2) und (9) die Gestalt

$$\oint \left[\sum_{j=1}^{n} P_j \delta Q_j - \overline{H} \delta T \right]$$

annimmt, lauten die Differentialgleichungen der den Lösungen des mechanischen Problems entsprechenden Kurven in den neuen Zustandsgrößen nach den Betrachtungen am Ende von **1**:

$$\frac{dQ_j}{dT} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dT} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen gehen also, wenn die Transformation (8) die Bedingung (9) erfüllt, in die Gl. (10) über, also in Gleichungen genau derselben Gestalt. Für die Mechanik kommen hauptsächlich solche Transformationen in Betracht, bei denen $T = t$ ist, und bei denen sich nach 1. Bd., V, § 5, **6** zu einer beliebig gegewählten Funktion H ein $\overline{H}$ finden läßt, so daß die Identität (9)

gilt und sich daher die Bewegungsgleichungen für jedes H auch in der Form (10) (mit $T = t$) schreiben lassen; an Stelle der Hamiltonschen Funktion H tritt dann aber $\bar{H}$, die mit H nach 1. Bd., V, § 5, (34) durch die Beziehung

$$\bar{H} = H - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} \tag{11}$$

zusammenhängt. In der Mechanik sind besonders zwei Spezialfälle wichtig. Erstens: der Fall, daß die Transformation (8) die Zeit t überhaupt nicht enthält, also eine Transformation der $2n$ Größen q_i, p_i in Q_j, P_j wird. Dann ist nach Gl. (11)

$$\bar{H} = H - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}. \tag{12}$$

Wenn man die Transformationsgleichungen (8) nach p_i, Q_i auflöst, folgt aus (9), wenn wir

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta P_i$$

setzen, durch Vergleichung der Koeffizienten von δt, δq_i und δP_i

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

dabei ist

$$F(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i - \bar{\Psi}. \tag{14}$$

Durch (13) wird also eine kanonische Transformation gegeben, wenn F eine beliebige Funktion seiner Argumente ist, also insbesondere auch, wenn es von t unabhängig ist. Da dasselbe dann auch von $\bar{\Psi}$ gilt, folgt aus (12)

$$\bar{H}(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n). \tag{15}$$

Zweitens betrachten wir den Fall, daß (8) folgende Gestalt hat:

$$\begin{cases} T = t, & q_i = q_i^*(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) + b_i t, \\ & p_i = p_i^*(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) + a_i t \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Aus (11) folgt dann:

$$\bar{H} = H - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} b_i p_i, \tag{17}$$

dabei bedeuten die a_i und b_i Konstante. $\bar{\Psi}$ ist eine Funktion der P_i, Q_i und t. Aus Gl. (9) ergibt sich dann durch Vergleichung der Koeffizienten von δP_i auf beiden Seiten:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial P_j},$$

was mit 1. Bd., V, § 5, (33) übereinstimmt. Setzen wir für p_i, q_i ihren Wert aus (16) ein, so ergibt sich für $\overline{\Psi}$ die Gestalt

$$\overline{\Psi} = \Psi^*(P, Q) - \sum_{i=1}^{n} a_i q_i^* t.$$

Dabei kann noch additiv eine beliebige Funktion von t hinzugefügt werden. Wenn wir dafür die Funktion $-\frac{1}{2} t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ wählen, ergibt sich aus (17)

$$(18) \qquad \bar{H} = H + \sum_{i=1}^{n} (a_i q_i - b_i p_i) = H + \sum_{i=1}^{n} (a_i q_i^* + b_i p_i^*).$$

Bei Anwendung der Transformation (16), der sogenannten Delaunayschen Transformation, steht in den transformierten kanonischen Gleichungen (10) anstatt der ursprünglichen Hamiltonschen Funktion die durch (18) gegebene Funktion $\bar{H}$. Dabei ist H vermöge (16) als Funktion der P_j, Q_j und t auszudrücken. Die so gewonnenen kanonischen Transformationen lassen sich unter den Begriff der Berührungstransformationen einordnen (1. Bd., V, § 5, **5**).

Wie schon im 1. Bd., V, § 5, **3** gezeigt ist, läßt sich aus der Identität (9) die willkürliche Funktion $\overline{\Psi}$ auch eliminieren. Wir betrachten die q_i, p_i, t als Funktionen von zwei Parametern α und β, und nennen

$$(19) \qquad dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial \beta} d\beta, \quad dt = \frac{\partial t}{\partial \beta} d\beta \text{ usw.},$$

während δq_i, δt durch (5) definiert sein soll. Dann berechnen wir aus (9) die Größe $\delta \overline{\Psi}$. Ganz analog bilden wir $d\overline{\Psi}$. Der Ausdruck $d\delta\overline{\Psi} - \delta d\overline{\Psi}$ muß wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationen verschwinden. Rechnen wir ihn aus, so finden wir ganz analog den Betrachtungen, die zu (6) führten:

$$(20) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) + dt \delta H - dH \delta t \\ = \sum_{j=1}^{n} (dP_j \delta Q_j - dQ_j \delta P_j) + dT \delta \bar{H} - d\bar{H} \delta T. \end{cases}$$

Aus dieser Identität, die uns die linke Seite als eine bilineare Invariante gegenüber Berührungstransformationen erkennen lehrt, lassen sich die Bedingungen ableiten, denen die linken Seiten von (8) genügen müssen, damit durch (8) eine Berührungstransformation dargestellt wird. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daß $t = T$, $H = \bar{H}$ ist und die übrigen Gleichungen t nicht enthalten. Dann können in (20) auf beiden

Seiten die Glieder, die $t, T, H, \bar{H}$ enthalten, weggelassen werden. Aus (8) folgt:

$$\delta Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \delta p_i \right), \quad \delta P_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \delta p_i \right).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (20) ein und vergleichen links und rechts die Koeffizienten von δq_i und δp_i, so erhält man:

$$d p_i = \sum_j \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} d P_j - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} d Q_j \right), \quad - d q_i = \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} d P_j - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} d Q_j.$$

Wenn u eine beliebige Funktion der q_i und p_i ist, folgt wegen $d u = \sum_i \frac{\partial u}{\partial q_i} d q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} d p_i$ daraus:

$$d u = \sum_j (u, P_j) d Q_j - (u, Q_j) d P_j, \tag{21}$$

wenn wir die durch § 2, (61) definierten Klammerausdrücke verwenden. Setzen wir für u in (21) der Reihe nach alle Q_i, P_i ein, so folgt wegen der Willkürlichkeit der $d Q_j$, $d P_j$ durch Koeffizientenvergleichung:

$$(Q_i, Q_j) = 0, \quad (P_i, P_j) = 0, \quad (Q_i, P_j) = 0 \ (i \neq j), \quad (Q_i, P_i) = 1. \tag{22}$$

Das sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Transformation der Gestalt

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_n, \ p_1, \ldots, p_n), \\ P_j = P_j(q_1, \ldots, q_n, \ p_1, \ldots, p_n) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

eine Berührungstransformation ist. Wir nennen die neu eingeführten Variablen Q_j, P_j „kanonische" Veränderliche und P_j die zu Q_j „konjugiert kanonischen" Veränderlichen. In den Hamiltonschen Gleichungen (10) für beliebige kanonische Veränderliche hat $\bar{H}$ nicht die besondere Gestalt von § 2, (53), sondern kann auch für mechanische Probleme eine beliebige Funktion der P_j, Q_j und eventuell von T sein. Eine spezielle Art von Berührungstransformationen haben wir vor uns, wenn wir statt der q_i einfach neue Lagekoordinaten Q_j durch Gleichungen der Form $Q_j = Q_j(q_i, q_2, \ldots, q_n)$ einführen, dann nach § 2, (10) K durch die Q_j, $\dot{Q}_j$ ausdrücken und dann die P_j nach § 2, (7) durch $P_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{Q}_j}$ definieren. Für homogen quadratisches K ist dann

$$2K = \sum_{i=1}^{r} p_i \dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \dot{Q}_j.$$

Deshalb bestimmen sich die P_j aus der Identität

$$\sum_i p_i d q_i = \sum_j P_j d Q_j. \tag{24}$$

Da die dq_i in die dQ_j durch linear homogene Transformationen übergehen, erleiden nach (24) die p_i beim Übergang zu den P_j die dazu kontragredienten Transformationen, also auch linear homogene. Die so definierten Transformationen heißen „erweiterte Punkttransformationen". Sie sind ein Spezialfall der „homogenen Berührungstransformationen", welche durch die Identität (24) charakterisiert sind, die an Stelle der allgemeinen (9) gilt.

3. Jacobische Integrationstheorie. Man kann die Transformationstheorie von **2** dazu verwenden, kanonische Veränderliche einzuführen, in denen die durch (12) bzw. (15) definierte Funktion $\bar{H}$ eine solche Gestalt hat, daß die transformierten Hamiltonschen Gleichungen (10) leichter zu integrieren sind als die ursprünglichen. Das wird insbesondere dann der Fall sein, wenn $\bar{H}$ eine Funktion der $P_1, \ldots, P_n$ allein wird, also $t, Q_1, \ldots, Q_n$ in ihm nicht vorkommen. Die so entstehende Funktion wollen wir E nennen.

$$\bar{H} = E(P_1, P_2, \ldots, P_n). \tag{25}$$

Diese Q_j, P_j heißen dann der Hamiltonschen Funktion $\bar{H}$ „angepaßte" kanonische Veränderliche. Bei einem mechanischen System läßt sich dann wegen $H = K + V$ die Energie E als Funktion der $P_1, \ldots, P_n$ allein ausdrücken. Diese Gl. (10) werden dann (wegen $T = t$):

$$\frac{dP_j}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial E}{\partial P_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich unmittelbar integrieren. Es wird:

$$P_j = a_j, \quad Q_j = \frac{\partial E}{\partial P_j} t + b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

wo die a_j, b_j willkürliche Konstanten, $2n$ an der Zahl, sind. Durch Auflösung der Gl. (8) (ohne die letzte) nach den q_i, p_i ergeben sich diese als Funktion von t und den $2n$ willkürlichen Konstanten a_j, b_j, also als ein vollständiges Lösungssystem von der Gestalt § 2, (58).

Es handelt sich also nur darum, eine Berührungstransformation zu finden, aus der (25) folgt. Diese Aufgabe ist schon im 1. Bd., V, § 5, **9** behandelt. Nach unserer Bezeichnungsweise haben wir einfach eine solche Funktion $F(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t)$ zu suchen, daß die daraus nach (13) gebildete Transformation Gl. (25) zur Folge hat. Wenn die Transformationsgleichungen für die Q_j, P_j die Zeit t nicht enthalten, so folgt aus (14)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}.$$

Daher folgt aus (12), (25) und (13)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_n}\right) = E(P_1, P_2, \ldots, P_n). \tag{28}$$

Wenn F als Funktion von $t, q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n$ so bestimmt wird, daß es der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (28) genügt, d. h. wenn durch Einsetzen von F in die linke Seite diese eine Funktion von $P_1, \ldots, P_n$ allein wird, so ist durch (13) eine Berührungstransformation von der gesuchten Art gegeben. Wenn insbesondere t in H nicht explizite vorkommt, so können wir auch F als Funktion von $q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n$ (ohne t) ansetzen. An Stelle von (12) können wir dann für $\bar{H}$ die Gl. (15) setzen. Aus (15), (25) und (13) folgt dann für F die Differentialgleichung

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial q_n}\right) = E(P_1, \ldots, P_n). \tag{29}$$

Die gesuchte Lösung F muß außer von den n unabhängigen Veränderlichen $q_1, \ldots, q_n$ noch von n Parametern $P_1, \ldots, P_n$ abhängen. Wenn die Gleichungen $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}$ nach den P_i auflösbar sind, wie wir voraussetzen wollen, so haben wir in unserem so definierten F ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (29) vor uns (1. Bd., XV, § 4). Die Gl. (29) bzw. (28) wird die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung genannt. Die Integration der Bewegungsgleichungen in ihrer kanonischen Form [§ 2, Gl. (52)] läßt sich also auf die Aufsuchung eines vollständigen Integrals der partiellen Differentialgleichung (28) bzw. (29) zurückführen. Während diese eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in $n + 1$ bzw. n unabhängigen Veränderlichen ist, haben wir in § 2, 6 gesehen, daß sich die Integration der Bewegungsgleichungen auch auf die einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung [Gl. (60) bzw. (63)] in $2n + 1$ bzw. $2n$ unabhängigen Veränderlichen zurückführen läßt (s. auch 1. Bd., XV, § 4, 6).

4. Zur Integration der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung. Man kann die Aufgabe, ein vollständiges Integral von (29) zu finden, auch so formulieren: es sollen n Funktionen φ_k der q_i, p_i und der n Parameter $P_1, \ldots, P_n$ gefunden werden, so daß die durch Nullsetzen entstehenden Gleichungen

$$\varphi_k(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, P_1, \ldots, P_n) = 0 \tag{30}$$

nach den p_i auflösbar sind, und die so entstehenden Funktionen der q_i den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$ zu einem vollständigen Differential machen, d. h. daß eine Funktion F der q_i und P_i existiert, die der Identität

$$dF(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{31}$$

genügt. Ferner sollen die Funktionen p_i der q_i einer Identität der Form

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = E(P_1, \ldots, P_n) \tag{32}$$

genügen.

Ein solches System von n Funktionen läßt sich folgendermaßen finden: Wir gehen von n beliebigen Integralen der Bewegungsgleichungen aus, die in Involution zueinander stehen:

$$f_k(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = c_k, \quad (f_i, f_k) = 0) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Dann genügen die durch Auflösung nach den p_i entstehenden Funktionen der q_i, wenn wir $c_k = P_k$ setzen, nach § 2, (67), (72) einer Identität der Gestalt (31). Daß auch (32) erfüllt ist, also aus (31) sich ein vollständiges Integral von (29) ergibt, läßt sich leicht zeigen, wenn man eine Berührungstransformation der Gestalt (23), (22) einführt, in der die $P_j = f_j(q_1, \ldots, p_n)$ sind, die $Q_j(q_1, \ldots, p_n)$ aber so bestimmt werden, daß sie den Gl. (22) genügen. Wegen (33) haben wir dann wirklich eine Berührungstransformation vor uns. Die Bewegungsgleichungen gehen dann in die Gestalt (10) mit $T = t$ über. Da die f_k Integrale sein sollen, muß $\frac{df_j}{dt} = \frac{dP_j}{dt} = 0$ sein. Dann folgt aus (10): $\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Dann ist aber $\bar{H}$ eine Funktion der P_j allein, also sind die gefundenen P_j', Q_j' dem Problem „angepaßt".

Hier muß insbesondere hervorgehoben werden, daß im allgemeinen erst, wie in § 2, **6** bemerkt ist, wenn $2n - 1$ Integrale der Form (33) gegeben sind, sich jedes weitere Integral der Bewegungsgleichungen als eine Funktion von ihnen ergibt. Sind aber n solche Integrale in Involution, so läßt sich H schon durch diese n Integrale allein ausdrücken, sie können also als „angepaßte" kanonische Veränderliche P_j gewählt werden.

§ 5. Methode der Separation der Veränderlichen.

1. Grundgedanken der Methode. Die Anwendung der in § 4, **4** besprochenen Methode zur Integration der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn H so beschaffen ist, daß die n Funktionen φ_k in § 4, (30) die q_i und p_i nur so enthalten, daß in φ_k nur die einzige Koordinate q_k und die einzige Impulskomponente p_k vorkommt. Es sollen sich also, wenn wir nach den p_i auflösen, n Funktionen

$$p_i = p_i(q_i, P_1, \ldots, P_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

finden lassen, die der Identität § 4, (32) genügen. Das ist z. B. immer der Fall, wenn H sich in die Form

$$H = E[g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2), \ldots, g_n(q_n, p_n)]$$

bringen läßt. Denn dann brauchen wir nur $g_i(q_i, p_i) = P_i$ zu setzen, diese Gleichungen nach den p_i aufzulösen, um Gleichungen der Gestalt (1) zu erhalten, die der Identität § 4, (32) genügen. Die wesentliche Vereinfachung liegt darin, daß dann die Identität § 4, (31) immer schon von selbst erfüllt ist. Denn die g_k sind immer in Involution, da sie nach der Definition der Klammerausdrücke § 2, (61) den Identitäten $(g_i, g_k) = 0$ genügen müssen. Wenn wir die unbestimmten Integrale

$$\int p_i(q_i, P_1, P_2, \ldots, P_n) dq_i = F_i(q_i, P_1, \ldots, P_n) \tag{2}$$

einführen, so erhalten wir sofort ein F, das der Identität § 4, (31) genügt, wenn wir

$$F(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} F_i(q_i, P_1, \ldots, P_n) \tag{3}$$

setzen. Damit haben wir ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichungen gewonnen. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet dann nach (2), (3) und § 4, (13) und (27)

$$\begin{cases} Q_j = \sum_{i=1}^{n} \int^{q_i} \dfrac{\partial p_i(q_i, P_1, \ldots, P_n)}{\partial P_j} dq_i = \dfrac{\partial E}{\partial P_j} t + b_j, \\ P_j = a_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{4}$$

Diese Methode hat den Namen Methode der Separation der Variablen erhalten.

2. Kriterium ihrer Anwendbarkeit. Es kommt darauf an, ob sich Funktionen der Gestalt (1) finden lassen, die in 4 §, (32) für die p_i eingesetzt zur Folge haben, daß alle q_i herausfallen. Die Ableitungen der Funktionen p_i nach den q_i enthalten auch je eine einzige Koordinate q_i. Nach Einsetzen der p_i aus (1) folgt dann aus § 4, (32):

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_i} = 0.$$

Wenn wir eine Funktion ϱ_i der $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ durch

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \varrho_i = 0 \tag{5}$$

einführen, so muß ϱ_i durch Einsetzen der p_i aus Gl. (1) sich in eine Funktion von q_i allein verwandeln, da

$$\varrho_i = -\frac{\partial p_i}{\partial q_i}$$

ist. Wenn $j \neq i$ ist, muß also

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_j} = 0$$

sein. Wenn wir in diese Bedingung ϱ_j einführen und dann ϱ_i und ϱ durch H ausdrücken, erhalten wir die Bedingung, der H als Funktion der p_i und q_i genügen muß, damit die Methode der Separation der Veränderlichen anwendbar ist:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &\quad - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} \\ &\quad + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ i \neq j \end{pmatrix}.$$

Wenn H die Hamiltonsche Funktion eines mechanischen Problems ist und die q_i gewöhnliche Lagekoordinaten, so ist nach § 2, (53) $H = K + V$, wobei K in den p_i quadratisch homogen ist und V von ihnen nicht abhängt. Setzen wir diesen Wert für H ein, so wird die linke Seite von (6) ein Polynom vierten Grades in den p_i. Die Identität (6) kann also nur bestehen, wenn die Glieder jeden Grades für sich verschwinden. Betrachten wir insbesondere die Glieder nullten Grades, so lauten sie:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

und die Bedingung ihres Verschwindens lautet nach § 2, (53):

$$(7)\qquad A_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ i \neq j \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichungen sind z. B. erfüllt, wenn in K nur die rein quadratischen Glieder vorkommen. Dann erhalten wir die von Staeckel nach der Methode der Separation der Variablen behandelten Systeme. In diesem Falle ist, wenn wir $A_{jj} = A_j$ setzen,

$$(8)\qquad H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j p_j^2 + V(q_1, \ldots, q_n).$$

Die von Staeckel aufgestellten Bedingungen, denen die A_j und V noch genügen müssen, damit Integration durch Separation möglich ist, ergeben sich durch Einsetzen der Werte von H aus (8) in (6) und Nullsetzen der Koeffizienten der einzelnen Potenzen der p_j [1]).

---

[1]) Staeckel, Habilitationsschrift, Halle 1891, und Math. Ann. **42**, 546 ff. Die Gl. (7) können aber auch so erfüllt werden, daß die A_{ij} nicht alle verschwinden. Sie können z. B. solche Werte haben, daß Gl. (7) und die anderen nicht an-

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Gültigkeit der Gl. (6) auch hinreichend für die Möglichkeit der Integration durch Separation ist, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. In allen konkreten Fällen kann man die Behauptung durch Einsetzen der Lösungen (1) in H sofort bestätigen.

3. Durchführung der Rechnung[1]. Wir beschränken uns auf den Fall, wo H durch (8) gegeben ist, führen aber die Rechnung so durch, daß sie sich ganz analog auch im allgemeinen Falle anwenden läßt. Wenn einmal festgestellt ist, daß H der Gl. (6) genügt, ist die Aufgabe nur die, n Funktionen von der Gestalt (1) so zu bestimmen, daß die Identität § 4, (32) erfüllt ist, also in unserem Falle

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j p_j^2 + V(q_1, \ldots, q_n) = E(P_1, \ldots, P_n). \tag{9}$$

Wir führen zunächst anstatt der Konstanten P_j in den Gl. (1) die Werte der p_i für $q_i = 0$ ein, also $c_i = p_i(0, P_1, \ldots, P_n)$. Wir bezeichnen ferner mit $A_j^{(r)}(q_r)$ den Wert, den A_j annimmt, wenn alle q_i außer q_r Null gesetzt werden, analog mit $V^{(r)}(q_r)$ den Wert $V(0, \ldots, 0, q_r, 0, \ldots, 0)$. Mit $A_j^{(0)}, V^{(0)}$ bezeichnen wir die Werte von A_j, V, wenn alle q_i Null gesetzt werden. Wenn wir zunächst diese letzte Substitution in (9) ausführen, können wir E als Funktion der $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bestimmen. Es wird nämlich

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j^{(0)} c_j^2 + V^{(0)}. \tag{10}$$

Setzen wir hingegen in (9) alle $q_j = 0$ mit Ausnahme von q_r, so erhalten wir:

$$A_r^{(r)}(q_r)\, p_r^2 + \sum_{j=1}^{n}{}' A_j^{(r)}(q_r) c_j^2 = 2E - 2V^{(r)}(q_r). \tag{11}$$

Zur Vereinfachung der folgenden Formeln wollen wir annehmen, daß $A_r^{(r)}(q_r) = 1$ für $r = 1, 2, \ldots, n$[2]. Aus (10) und (11) folgt dann:

---

geschriebenen Bedingungen, die aus Gl. (6) folgen, nur erfüllt werden können, wenn $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ für alle i verschwindet. Wir haben dann die von Levi-Civitá (Math. Ann. **59**, 383 ff., 1904) behandelten „wesentlich geodätischen" Systeme vor uns, die nur beim Fehlen von Kräften durch Separation integriert werden können.

[1]) Dell'Acqua, Rend. del Circ. math. di Palermo **33**, 141 ff., 1912.

[2]) Wenn das nicht der Fall ist, läßt es sich durch Einführung neuer Veränderlicher immer erreichen; wir müssen nur anstatt der q_r in (8) die neuen Veränderlichen q_r^* durch die Beziehung

$$A_r(q_1, \ldots, q_n) = \frac{A_r(q_1^*, \ldots, q_n^*)}{A_r^{(r)}(q_r^*)}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

definieren und sie nach durchgeführter Rechnung wieder mit q_r bezeichnen.

$$(12) \qquad p_r = \sqrt{2V^{(0)} - 2V^{(r)}(q_r) + \sum_{j=1}^{n}{}' (A_j^{(0)} - A_j^{(r)}(q_r))c_j^2 + A_r^{(0)} c_r^2}.$$

Dabei soll $\sum'$ immer eine Summe bedeuten, in der das Glied mit $j = r$ fehlt.

Wenn wir neue Konstanten P_j durch

$$(13) \qquad \tfrac{1}{2} c_j^2 = P_j$$

einführen, so nimmt (12) die Gestalt an:

$$(14) \qquad \begin{cases} p_r = \sqrt{2V^{(0)} - 2V^{(r)}(q_r) + 2\sum_{j=1}^{n} B_{rj}(q_r) P_j}, \\ B_{rj} = A_j^{(0)} - A_j^{(r)}, \quad (j \neq r), \quad B_{rr} = A_r^{(0)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind die gesuchten, den allgemeinen Gl. (1) entsprechenden „Separationsgleichungen". Nach Gl. (2) und (3) folgt dann aus (14) die Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung:

$$(15) \qquad \begin{cases} F(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n) \\ = \sum_{r=1}^{n} \int^{q_r} \sqrt{2V^{(0)} - 2V^{(r)}(q_r) + 2\sum_{j=1}^{n} B_{rj}(q_r) P_j}\, dq_r \end{cases}$$

und nach (4) die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen:

$$(16) \qquad P_j = a_j, \quad \sum_{r=1}^{n} \int^{q_r} \frac{B_{rj}(q_r)\, dq_r}{\sqrt{\Psi_r(q_r)}} = A_j^{(0)} t + b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei

$$(17) \qquad \Psi_r(q_r) = 2V^{(0)} - 2V^{(r)}(q_r) + 2\sum_{j=1}^{n} B_{rj}(q_r) P_j,$$

wenn wir beachten, daß in Gl. (4) $\dfrac{\partial E}{\partial P_j}$ nach Gl. (10) und (13) aus

$$(18) \qquad E = \sum_{i=1}^{n} A_j^{(0)} P_j + V^{(0)}$$

zu berechnen ist. Durch die Gl. (16) ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für den Fall, daß H der Gl. (6) genügt, auf Quadraturen zurückgeführt.

Wenn irgend eine Koordinate, z. B. q_r, in H gar nicht vorkommt, also eine „verborgene Koordinate" ist, so kann sie in den Gl. (1), also auch (14), nicht vorkommen; wir können das betreffende p_r als Konstante, d. h. als Funktion der P_j ansehen und etwa im Einklang mit der Bezeichnung in dieser Nummer von vornherein $p_r = c_r$, also $\frac{1}{2} p_r^2 = P_r$ setzen, wodurch nur mehr ein System mit $n - 1$ Variablen durch Separation zu integrieren ist.

4. Beispiele. Wir betrachten die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m in der Ebene unter dem Einfluß elastischer Kräfte. Es seien q_1, q_2 die rechtwinkligen Koordinaten, also $p_i = m\dot{q}_i$ die Impulskomponenten. In der q_i-Richtung wirke die Kraft $-k_i q_i$, wo k_i eine Konstante, die Direktionskraft, ist. Dann lautet die Hamiltonsche Funktion

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \tfrac{1}{2}k_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2 q_2^2. \tag{19}$$

Dieses H ist von der am Anfang von **1** betrachteten speziellen Form. Man kann daher die Separationsgleichungen (1), die der Identität $H = E(P_1, P_2)$ genügen, finden, indem man setzt:

$$\frac{1}{2m}p_i^2 + \tfrac{1}{2}k_i q_i^2 = P_i \quad (i = 1, 2), \quad E = P_1 + P_2.$$

Durch Auflösung nach den p_i folgt dann:

$$p_i = \sqrt{2mP_i - mk_i q_i^2} \quad (i = 1, 2), \quad E = P_1 + P_2, \tag{20}$$

also Gleichungen der Gestalt (1) bzw. (14). Nach Gl. (3) folgt dann:

$$\begin{cases} F(q_1, q_2, P_1, P_2) = \int \sqrt{2mP_1 - mk_1 q_1^2}\, dq_1 \\ \qquad\qquad + \int \sqrt{2mP_2 - mk_2 q_2^2}\, dq_2. \end{cases} \tag{21}$$

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen lauten dann nach (4) und (20):

$$m\int \frac{dq_i}{\sqrt{2mP_i - mk_i q_i^2}} = t + b_i \qquad (i + 1, 2). \tag{22}$$

Führen wir das Integral aus, so wird aus der linken Seite:

$$\sqrt{\frac{m}{k_i}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k_i}{2P_i}}\,q_i\right).$$

Lösen wir nach den q_i auf, so erhält man

$$q_i = \sqrt{\frac{2P_i}{k_i}}\sin(\nu_i t + \beta_i) \quad (i = 1, 2), \qquad \nu_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}. \tag{23}$$

P_i und $\beta_i = b_i\nu_i$ sind willkürliche Konstanten. Gl. (23) stellt die Übereinanderlagerung zweier harmonischer Schwingungen dar, eine in der q_1-Richtung mit der Schwingungsfrequenz ν_1, die andere dazu senkrecht mit der Frequenz ν_2. Aus (19), (21) und § 4, (13) folgt:

$$\begin{cases} p_i = \sqrt{2mP_i - mk_i q_i^2}, \\ Q_i = m\int \dfrac{dq_i}{\sqrt{2mP_i - mk_i q_i^2}} \end{cases} \qquad (i = 1, 2). \tag{24}$$

Das Integral ist dasselbe wie in Gl. (22), es ist also

$$Q_i = \sqrt{\frac{m}{k_i}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k_i}{2P_i}}\, q_i\right).$$

Löst man nach den q_i auf und setzt das Ergebnis in die ersten der Gl. (24), so erhält man

$$(25) \qquad \begin{cases} q_i = \sqrt{\dfrac{2P_i}{k_i}} \sin\left(\sqrt{\dfrac{k_i}{m}}\, Q_i\right), \\ p_i = \sqrt{2mP_i} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k_i}{m}}\, Q_i\right) \end{cases} \qquad (i = 1, 2).$$

Das ist die gesuchte Berührungstransformation, durch deren Einsetzung in (19) $H = P_1 + P_2$ wird. Die durch (25) eingeführten Q_i, P_i sind also der Hamiltonschen Funktion H aus (19) angepaßte kanonische Variable.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m, der von einem festen Massenpunkt der Masse M, der im Koordinatenursprung liegt, nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz angezogen wird. Wir stellen die Bewegung in räumlichen Polarkoordinaten dar, so daß die Hamiltonsche Funktion durch § 2, Gl. (54) gegeben ist. Für V ist dabei das Newtonsche Potential $V = -\dfrac{Mm}{\varkappa r}$ einzusetzen, wo $\varkappa$ die Gravitätskonstante bedeutet. Es liegt also die Aufgabe vor, p_r als Funktion von r, p_ϑ als Funktion von ϑ, p_φ als Funktion von φ, und dabei alle drei als Funktion von drei willkürlichen Konstanten P_1, P_2, P_3 so zu bestimmen, daß eine Identität der Form

$$(26) \qquad \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\, p_\varphi^2\right)\right] - \varkappa \cdot \frac{Mm}{r} = E(P_1, P_2, P_3)$$

besteht. Da φ eine verborgene Koordinate ist, werden wir zunächst nach der Bemerkung am Schlusse von **3** setzen: $\frac{1}{2} p_\varphi^2 = P_3$. Man kann nun das allgemeine Verfahren von **3** anwenden oder auch ein abgekürztes, zu dem die folgende Bemerkung führt: Wenn H wohl nicht (wie am Anfang von **1** bemerkt wurde) sich als Funktion von $g_1(q_1, p_1)$, $g_2(q_2, p_2)$ ... darstellen läßt, aber doch in der Form $H = H(q_1, p_1, \varphi(q_2, p_2))$, so kann man $\varphi(q_2, p_2) = P_2$, $H(q_1, p_1, P_2) = P_1$ setzen, und erhält durch Auflösung nach p_1, p_2 Separationsgleichungen mit den Eigenschaften, die für die Gl. (1) vorausgesetzt wurden, wobei $E(P_1, P_2)$ einfach gleich P_1 wird. Wenden wir diesen Gedanken auf Gl. (26) an, so haben wir neben $\frac{1}{2} p_\varphi^2 = P_3$ noch zu setzen:

$$p_\vartheta^2 + \frac{2P_3}{\sin^2\vartheta} = P_2, \qquad \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{P_2}{r^2}\right) - \varkappa \frac{Mm}{r} = P_1.$$

Wenn wir nach p_r, p_ϑ, p_φ auflösen, erhalten wir die den Gl. (1) entsprechenden Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} p_r = \sqrt{2mP_1 + \dfrac{2Mm^2\varkappa}{r} - \dfrac{P_2}{r^2}}, \quad p_\vartheta = \sqrt{P_2 - \dfrac{2P_3}{\sin^2\vartheta}}, \\ p_\varphi = \sqrt{2P_3}. \end{cases}$$

Ihr Einsetzen in Gl. (26) ergibt $E = P_1$. Aus Gl. (2) folgt dann:

$$(28)\quad \begin{cases} F(r, \vartheta, \varphi, P_1, P_2, P_3) = \int \sqrt{2mP_1 + \dfrac{2Mm^2\varkappa}{r} - \dfrac{P_2}{r^2}}\, dr \\ + \int \sqrt{P_2 - \dfrac{2P_3}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta + \sqrt{2P_3} \int d\varphi. \end{cases}$$

Die Anwendung der Gl. (4) ergibt dann die Lösung der Bewegungsgleichungen, dabei ist

$$\frac{\partial E}{\partial P_1} = 1, \quad \frac{\partial E}{\partial P_2} = \frac{\partial E}{\partial P_3} = 0.$$

Es ist zu beachten, daß wohl die Hamiltonsche Funktion in Gl. (26) die Bedingung (6) für die Separierbarkeit erfüllt, daß aber diese Eigenschaft am gewählten Koordinatensystem haftet. Wenn man statt der Polarkoordinaten rechtwinklige Raumkoordinaten einführt, x_1, x_2, x_3, und die entsprechenden Impulskomponenten mit $y_k = m\dot{x}_k$ bezeichnet, nimmt H die Gestalt

$$(29)\qquad H = \frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \varkappa \frac{Mm}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

an und genügt nicht mehr der Gl. (6). Man nennt Variable, in denen die Separation möglich ist, „Separationsvariable“. Die rechtwinkligen Koordinaten sind also für das Newtonsche Einkörperproblem keine Separationsvariable.

5. Periodizitätseigenschaften der Separationsvariablen. Um die zeitliche Veränderung der Lagekoordinaten q_i zu entnehmen, muß man untersuchen, wie sie von den Q_i abhängen. Der Zusammenhang ist durch die Berührungstransformation, § 4, (13) gegeben, wo der Wert von F aus § 5, (3) zu entnehmen ist. Nun kann man für eine wichtige Klasse von mechanischen Systemen etwas Allgemeines darüber aussagen. Wir gehen etwa von dem in § 5, 2 behandelten Staeckelschen Falle aus. Aus § 4, (13) und § 5, (15), (16) folgt

$$(30)\quad A_j^{(0)} t + b_j = Q_j = \sum_{r=1}^{n} \int^{q_r} \frac{B_{rj}(q_r)\, dq_r}{\sqrt{\Psi_r(q_r)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir setzen nun voraus, daß die Funktionen $\Psi_r(q_r)$ je zwei einfache Nullstellen $q_r^{(0)} < q_r^{(1)}$ besitzen, zwischen denen keine weitere Nullstelle liegt; ebenso mögen die $B_{rj}(q_r)$ in dem betrachteten Intervall weder Null noch unendlich werden. Wenn wir in (1) auf beiden Seiten zum Differential übergehen, und die so entstehenden Gleichungen nach den dq_r auflöst, so erhält man Gleichungen der Form:

$$dq_r = \chi_r(q_1, \ldots, q_n)\,dt.$$

Wenn auch die χ_r weder Null noch unendlich werden, können die $\frac{dq_r}{dt}$ in dem betrachteten Intervall ihr Vorzeichen nicht ändern. Das System wird sich immer mehr den Lagen nähern, die durch die Grenzen des Intervalls definiert sind. Hätte das System nur einen Freiheitsgrad, so würden, wenn wir für die einzige Koordinate den Index weglassen, die Gl. (30) sich auf die einzige Gleichung

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{(A^{(0)})^2\,\Psi(q)}{B(q)^2}$$

reduzieren, die von der Gestalt der in § 3, (14) behandelten ist. Wegen der Einfachheit der Nullstellen wird das System an den Grenzen umkehren und zwischen den beiden Grenzlagen eine periodische Bewegung ausführen (s. 1. Bd., III, § 5, **1**). Durch analoge Betrachtungen wie in § 3, auf die aber hier nicht eingegangen werden soll, läßt sich auch aus (30) ableiten[1]), daß jedes q_r, das sich einer einfachen Nullstelle von $\Psi_r(q_r)$ nähert, diese zu einer endlichen Zeit erreicht, dort umkehrt und der anderen Nullstelle zustrebt, für die dasselbe gilt. Jedes q_r pendelt also periodisch zwischen den Werten $q_r^{(0)}$ und $q_r^{(1)}$ hin und her. Es ist aber wohl zu beachten, daß die Lage, die durch das Wertesystem $q_r^{(0)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ definiert ist, kein Umkehrpunkt des Systems im Sinne des § 3 sein muß. Denn dort kehrten im Umkehrpunkt alle $\frac{dq_r}{dt}$ zugleich ihren Sinn um und das System ging durch dieselben Lagen zurück, während hier jedes q_r zu einer anderen Zeit die Grenzlage $q_r^{(0)}$ oder $q_r^{(1)}$ erreicht und für sich umkehrt.

Wenn ein bestimmtes q_r zwischen seinen Grenzen hin und her geht, während die anderen unverändert bleiben, ändert sich in der Summe in (30) rechts nur das Glied mit q_r; da nach (14), (17) $p_r = \sqrt{\Psi_r(q_r)}$ und p_r linear homogen in den $\frac{dq_i}{dt}$ ist, ändert beim Umkehren an der Grenze die Quadratwurzel ihr Vorzeichen. Es ist also etwa, während q_r von $q_r^{(0)}$ bis $q_r^{(1)}$ wächst, die Quadratwurzel mit posi-

[1]) Siehe z. B. Charlier, Die Mechanik des Himmels, 1. Bd., II, § 3.

tivem, beim Rückweg nach $q_r^{(0)}$ mit negativem Vorzeichen zu nehmen. Da nun dq_r beim Wachsen von q_r positiv, beim Abnehmen negativ ist, so ergibt das Integral beim Hin- und Rückweg denselben Wert, den wir ω_{rj} nennen wollen. Das „Umlaufsintegral", das wir über alle beim Hin- und Rückweg durchlaufenen Werte der q_r erstrecken und mit $\oint$ bezeichnen, ist also:

$$\oint \frac{B_{rj}(q_r)\,dq_r}{\sqrt{\Psi_r(q_r)}} = 2\int_{q_r^{(0)}}^{q_r^{(1)}} \frac{B_{rj}(q_r)\,dq_r}{\sqrt{\Psi_r(q_r)}} = 2\,\omega_{rj}. \tag{31}$$

Wenn das System auch nicht zu den Staeckelschen gehört, aber doch so beschaffen ist, daß während der Bewegung jedes q_r nur einen bestimmten Umlauf machen kann, treten an Stelle der Gl. (30) nach (4) die allgemeinen:

$$Q_j = \sum_{r=1}^{n} \int^{q_r} \frac{\partial p_r(q_r, P_1, \ldots, P_n)}{\partial P_j}\,dq_r \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

Bei einem Umlauf von q_r ändert sich dann, wenn die anderen q_i alle unverändert bleiben, Q_j um

$$2\,\omega_{rj} = \oint \frac{\partial p_r(q_r, P_1, \ldots, P_n)}{\partial P_j}\,dq_r. \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

Wenn q_r mehrere Umläufe, etwa k_r an der Zahl macht, also am Schluß seinen Anfangswert wieder annimmt, ändert sich Q_j offenbar um $2\,k_r\,\omega_{rj}$, und wenn jetzt $q_1, \ldots, q_n$ bzw. $k_1, \ldots, k_n$ Umläufe machen, um $2\sum_{r=1}^{n} k_r\,\omega_{rj}$. Das heißt aber, daß die q_i bei Änderungen von Q_j um diese Größen unverändert bleiben. Wenn wir also die Berührungstransformationen § 4, (13) nach den q_i auflösen und diese als Funktionen der Q_j betrachten, haben die Funktionen die Eigenschaft

$$\begin{aligned} &q_i\left(Q_1 + 2\sum_{r=1}^{n} k_r\,\omega_{r1}, Q_2 + 2\sum_{r=1}^{n} k_r\,\omega_{r2}, \ldots, Q_n + 2\sum_{r=1}^{n} k_r\,\omega_{rn}\right) \\ &\qquad = q_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{34}$$

und zwar für alle Werte $Q_1, \ldots, Q_n$ und beliebige ganze Zahlen $k_1, \ldots, k_n$. Die ω_{rj} sind dabei durch (31) bzw. (35) gegeben. Man nennt ein System, in welchem die Lagekoordinaten q_i als Funktionen der angepaßten kanonischen Koordinaten Q_j die Eigenschaft (34) haben, ein n-fach periodisches System.

6. Winkelvariable und Wirkungsvariable. Man kann an Stelle der Q_i, P_i andere kanonische Veränderliche einführen, in welchen die Lagekoordinaten einfachere Periodizitätseigenschaften haben, als die der

Gl. (34). Wir führen neue kanonische Veränderliche $w_1, w_2 \dots w_n$ und die dazu konjugierten $J_1, J_2, \dots, J_n$ ein, und zwar:

$$\pi Q_r = \sum_{l=1}^{n} \omega_{lr} w_l \quad (r = 1, 2, \dots, n), \tag{35}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r(q_r, P_1, \dots, P_n) dq_r \quad (r = 1, 2, \dots, n), \tag{36}$$

wo das Integral wieder über den ganzen Hin- und Hergang von q_r zwischen beiden Grenzen zu erstrecken ist. Wenn wir nämlich (36) nach den P_i auflösen und in die Funktion F in (3) einsetzen, so bleibt diese ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung § 4, (29), nur sind statt der n Konstanten P_j neue Konstante J_j eingeführt. Wenn wir also setzen

$$\begin{cases} F(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) = F^*(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n), \\ E(P_1, \dots, P_n) = E^*(J_1, \dots, J_n), \end{cases} \tag{37}$$

so haben wir nach § 4, (29)

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F^*}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F^*}{\partial q_n}\right) = E^*(J_1, \dots, J_n). \tag{38}$$

Die den Gl. (13) des § 4 analogen Gleichungen

$$p_j = \frac{\partial F^*}{\partial q_j}, \quad w_j = \frac{\partial F^*}{\partial J_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{39}$$

definieren dann einen Übergang von den q_j, p_j zu den kanonischen angepaßten Variablen w_j, J_j. Man kann leicht zeigen, daß die durch (37), (39) definierte Transformation mit der durch (35), (36) in Verbindung mit § 4, (15) bestimmten identisch ist. Dazu ist nur notwendig, zu zeigen, daß aus (35), (36) die zweite Reihe der Gl. (39) folgt, da die erste Reihe sich aus Gl. (37) und § 4, (15) ohne weiteres ergibt. Aus (37) folgt nämlich

$$\frac{\partial F^*}{\partial J_j} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial P_r} \frac{\partial P_r}{\partial J_j}.$$

Nach § 4, (13) folgt durch Einsetzen des Wertes von Q_r aus (35) und der aus (33) und (36) folgenden Beziehung $\omega_{lr} = \pi \dfrac{\partial J_l}{\partial P_r}$ (wenn noch beachtet wird, daß $\sum_{r=1}^{n} \dfrac{\partial J_l}{\partial P_r} \dfrac{\partial P_r}{\partial J_j} = \begin{cases} 0\,(l \neq j) \\ 1\,(l = j) \end{cases}$ sofort $\dfrac{\partial F^*}{\partial J_j} = w_j$, was zu beweisen war.

Die Bewegungsgleichungen der Mechanik behalten also auch in den w_j, J_j ihre kanonische Form und nach (37) ist die Bewegung analog zu § 4, (27) auch durch

$$J_j = \alpha_j, \quad w_j = \frac{\partial E^*}{\partial J_j} t + \beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{40}$$

gegeben, wo die α_j, β_j willkürliche Konstante sind. Um daraus etwas für die wirkliche Bewegung zu entnehmen, müssen wir wieder untersuchen, wie die Lagekoordinaten q_j von den w_j abhängen. Aus (35) folgt:

$$(41) \qquad \pi \cdot \Big(Q_r + 2 \sum_{l=1}^{n} k_l \omega_{lr} \Big) = \sum_{l=1}^{n} \omega_{lr} (w_l + 2\pi k_l) \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h. wenn sich jedes w_l um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ändert, so ändern sich die Q_r gerade um solche Größen, die nach (34) keine Änderung der q_i zur Folge haben. Berechnen wir also mit Hilfe von (35) die q_i als Funktionen der $w_1, \ldots, w_n$, so ist, wenn wir $q_i(Q_1, \ldots, Q_n) = q_i^*(w_1, \ldots, w_n)$ setzen:

$$(42) \quad q_i^*(w_1 + 2\pi k_1, w_2 + 2\pi k_2, \ldots, w_n + 2\pi k_n) = q_i^*(w_1, \ldots, w_n),$$

wenn die k_j beliebige ganze Zahlen sind.

Die Lagekoordinaten sind also periodische Funktionen der w_j mit der Periode 2π. Man nennt die w_j daher Winkelvariable, weil sie mit einer gewöhnlichen Winkelkoordinate, wie z. B. dem Polarwinkel ϑ bei gewöhnlichen Polarkoordinaten das gemeinsam haben, daß eine Änderung um 2π wieder dieselbe Lage des Systems ergibt. Doch sind die Winkelvariablen im allgemeinen keine Lagekoordinaten, da sie nicht Funktionen der q_i allein sind. Die zu den Winkelvariablen kanonisch konjugierten Variablen J_j nennt man Wirkungsvariable. Den Ausdruck der Energie des Systems als Funktion der Wirkungsvariablen wollen wir kurz den „Energieausdruck“ nennen.

§ 6. Mehrfach periodische Systeme.

1. Einführung beliebiger Koordinaten. Wenn man an Stelle der in § 5 verwendeten Separationsvariablen q_i neue Variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einführt, indem man jedes q_i als Funktion der $x_1, \ldots, x_n$ ansetzt, und die entsprechenden Impulskomponenten y_i nach § 4, (24) durch $\sum_i y_i dx_i = \sum_i p_i dq_i$ definiert, werden aus den n Integralen § 5, (1) wieder n Integrale der allgemeinen Form

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, P_1, \ldots, P_n) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

die den Gl. (30) in § 4 entsprechen. Durch Umformung aus dem Involutionssystem § 5, (1) hervorgegangen, bilden sie nach § 2, 6 ebenfalls ein Involutionssystem. Lösen wir nach den y_i auf, so erhalten wir Gleichungen der Form:

$$(1) \qquad y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

die nach § 4, 4 einer Identität der Gestalt

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i = dF_*(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)$$

genügen. F_* ist dabei nur eine andere Gestalt von F in § 5, (3). Man kann daher die angepaßten kanonischen Veränderlichen Q_i, P_i von § 5, **1** auch durch

$$y_i = \frac{\partial F_*}{\partial x_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_*}{\partial P_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

einführen. Wenn die q_i in den Q_i die durch § 5, (34) definierten Periodizitätseigenschaften haben, so haben die x_i (als eindeutige Funktionen der q_i) dieselben Eigenschaften. Wenn ein bestimmtes q_i, z. B. q_r, seinen in § 5, **5** besprochenen Umlauf vollzieht, während alle anderen q_i konstant bleiben, sind dadurch die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen eines Parameters q_r definiert; dadurch ist ein geschlossener Weg, genauer: ein hin und zurück durchlaufenes Kurvenstück im n-dimensionalen Raume der x_i gegeben. Wenn wir das Integral längs dieser geschlossenen Kurve durch $\oint_r$ bezeichnen, gelten für die in § 5, (33) und (36) auftretenden Umlaufsintegrale wegen $\sum y_i d x_i = \sum p_i d q_i$ die Beziehungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} J_r = \dfrac{1}{2\pi} \oint p_r d q_r = \dfrac{1}{2\pi} \oint_r \sum_{i=1}^{n} y_i d x_i, \\ 2\omega_{rj} = \oint \dfrac{\partial p_r}{\partial P_j} d q_r = \oint_r \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial y_i}{\partial P_j} d x_i. \end{cases}$$

Dabei sind für y_i die Funktionen aus (1) einzusetzen.

Die Wirkungsvariablen J_j können daher von den x_i, y_i aus unmittelbar durch (3) eingeführt werden. Wenn wir z. B. beim Newtonschen Einkörperproblem in der Ebene von der Gestalt der Hamiltonschen Funktion in rechtwinkligen Koordinaten § 5, (29) ausgehen, wo keine Separation möglich ist, so können wir doch die angepaßten kanonischen Veränderlichen Q_i, P_i und insbesondere auch die w_j, J_j einführen. Wir gehen von den zwei Integralen $p_\vartheta = \sqrt{P_2}$ und $H = P_1$ aus, wo die Konstanten wie in § 5, (26), (27) bezeichnet sind. In rechtwinkligen Koordinaten lauten sie:

$$(4) \qquad x_1 y_2 - x_2 y_1 = \sqrt{P_2}, \quad \frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2) - \varkappa \frac{M m}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = P_1.$$

Diese beiden Integrale sind offenbar in Involution. Lösen wir nach y_1, y_2 auf, so erhalten wir die (1) entsprechenden Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{-x_2\sqrt{P_2}}{x_1^2 + x_2^2} \\ \pm \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{2mP_1(x_1^2 + x_2^2) + 2\varkappa m^2 M\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - P_2}, \; y_2 = \cdots, \end{cases}$$

wobei y_2 aus y_1 durch Vertauschung der Indizes und Umkehrung des Vorzeichens von $\sqrt{P_2}$ hervorgeht. Man überzeugt sich leicht, daß

$$(6)\quad \begin{cases} y_1 d x_1 + y_2 d x_2 = \dfrac{\sqrt{P_2}}{x_1^2 + x_2^2}(x_1 d x_2 - x_2 d x_1) \\ \pm \dfrac{x_1 d x_1 + x_2 d x_2}{x_1 + x_2} \sqrt{2 m P_1 (x_1^2 + x_2^2) + 2 \varkappa m^2 M \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - P_2} \end{cases}$$

das vollständige Differential einer Funktion $F_*(x_1, x_2, P_1, P_2)$ ist, deren Ableitungen nach den x_i die y_i und nach den P_i die Q_i ergeben. Den beiden Umläufen bei konstantem r und konstantem ϑ entsprechen in den x_1, x_2 zwei Umläufe, bei deren ersten wegen $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ die Beziehung $x_1 d x_1 + x_2 d x_2 = 0$ gilt; hingegen ist wegen $\vartheta = \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}$ bei konstantem ϑ: $x_1 d x_2 - x_2 d x_1 = 0$, so daß bei Berechnung von J_1, J_2 aus (3) und (6) immer nur ein Glied der rechten Seite von (6) einen Beitrag liefert. Man erhält genau die Werte von J_ϑ und J_r in V, § 1, (7).

2. Einführung allgemeiner mehrfach periodischer Systeme[1]). Wir wollen nun die Eigenschaften der in **1** und § 5, **5**, **6** behandelten Systeme zusammenstellen, die sich, abgesehen von der Möglichkeit einer Separation der Veränderlichen, formulieren lassen: Wenn wir die Gl. (1) betrachten, so ergeben sie nur für ein endliches n-dimensionales Wertgebiet der $x_1, \ldots, x_n$ reelle Werte der $y_1, \ldots, y_n$. Eine in diesem Gebiet beginnende Bewegung kann nie hinausführen. Jedem Punkte dieses Gebietes ist eine endliche Anzahl von Wertsystemen $y_1, \ldots, y_n$ zugeordnet [den Staeckelschen Systemen nach § 5, (12) gerade zwei]. Wenn wir als einen geschlossenen „Weg" im Gebiet eine geschlossene Kurve bezeichnen, längs der sich nicht nur die $x_1, \ldots, x_n$, sondern auch die ihnen durch (1) zugeordneten $y_1, \ldots, y_n$ stetig ändern, so gibt es n und nur n voneinander verschiedene geschlossene Wege, längs denen das Integral über das vollständige Differential (2) von Null verschiedene Werte annimmt. Als verschieden bezeichnet man dabei Wege, die nicht durch stetige Änderung ineinander übergeführt werden können. So kann z. B. ein zwischen $q_r^{(0)}$ und $q_r^{(1)}$ im Sinne von § 5, **5** hin- und herführender Weg nie stetig in einen übergeführt werden, der diese Grenzen des Gebiets nicht erreicht. Denn in einem solchen kann p_r entweder nur positiv oder nur negativ sein; ein längs des ganzen Weges in q_r und p_r stetiger Übergang ist nicht möglich, weil p_r nur an den Grenzen sein Vorzeichen wechseln kann. Wenn man diese An-

[1]) A. Einstein, Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein. Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 82 ff., 1917.

nahmen über ein System macht, ohne die Möglichkeit der Einführung von Separationsvariablen vorauszusetzen, und ein Integral über den r-ten der n ausgezeichneten Wege mit $\oint_r$ bezeichnet, kann man genau wie in **1** aus F_* eine Berührungstransformation ableiten, die angepaßte kanonische Veränderliche Q_i, P_i einführt. Da beim r-ten der genannten Umläufe sich Q_j um die durch (3) definierte Größe $2\omega_{rj}$ ändert, während die x_i ihren Wert wieder erreichen, haben die x_i als Funktionen der Q_j die Periodizitätseigenschaften, wie sie für die q_i in § 5, (34) formuliert sind. Führen wir dann die w_j, J_j durch (3) und § 5, (33) ein, so folgt wie in § 5, **6**, daß die x_i in den w_j periodisch mit der Periode 2π sind, und die J_j zu den w_j kanonisch konjugiert. Dadurch sind die Winkel- und Wirkungsvariable für allgemeine n-fach periodische Systeme definiert.

Die einfachste Gestalt der Funktionen x_i würde die einfache trigonometrische sein, etwa $x_i = A\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_n w_n + \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$, wo die $k_1, \ldots, k_n$ beliebige ganze Zahlen und die A und δ beliebige Funktionen der $J_1, \ldots, J_n$ sind. Und wie man eine einfach periodische Funktion einer Veränderlichen w (nach 1. Bd., IV, § 4) immer als eine Summe von trigonometrischen Ausdrücken $\sum_k A_k \cos(k w + \delta_k)$ darstellen kann, wo die k ganze Zahlen und die A_k, δ_k von w unabhängig sind, so gilt ein analoger Satz[1]) für periodische Funktionen der n Veränderlichen $w_1, \ldots, w_n$. Es läßt sich daher wegen § 5, (42)

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{c} x_i = A^{(i)}(J_1, \ldots, J_n) \\ + \sum_{k_1, \ldots, k_n} A^{(i)}_{k_1, \ldots, k_n} \cos(k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n + \delta^{(i)}_{k_1, \ldots, k_n}) \end{array}\right.$$

setzen, wo die $k_1, k_2, \ldots, k_n$ alle ganzen nicht negativen Zahlen durchlaufen und die A und δ Funktionen der $J_1, \ldots, J_n$ sind. Das Glied mit $k_1 = k_2 = \cdots k_n = 0$ ist unter dem Summenzeichen nicht enthalten; es ist vorangestellt und soll immer das „unperiodische" Glied heißen. Mit der Bezeichnungsweise

$$(8)\qquad \frac{\partial E^*}{\partial J_j} = \nu_j(J_1, J_2, \ldots, J_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt dann aus § 5, (40)

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{c} x_i = A^{(i)}(J_1, \ldots, J_n) \\ + \sum_{k_1, \ldots, k_n} A^{(i)}_{k_1, \ldots, k_n} \cos[(k_1 \nu_1 + \cdots + k_n \nu_n)t + \Delta^{(i)}_{k_1, \ldots, k_n}] \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Dabei sind die Δ wie die A Funktionen der $J_1, \ldots, J_n$.

[1]) Ein Beweis für diese Entwickelbarkeit findet sich bei K. Weierstrass, Math. Werke **2**, 183 ff.

3. Entartung. Wenn die Summe (9) nur aus einem einzigen periodischen Gliede bestände, würde sie eine harmonische Schwingung von x_i mit der Frequenz $k_1\nu_1 + k_1\nu_2 + \cdots k_n\nu_n$ darstellen [s. § 5, (23)]. Nun bauen sich in jedem Gliede die Frequenzen aus ganzzahligen Vielfachen der ν_j auf. Man nennt daher die n durch (8) gegebenen Größen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ die n Grundfrequenzen der mehrfach periodischen Bewegung. Wenn zwischen ihnen keine linear homogene Relation mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, so nennt man sie n unabhängige Frequenzen und das System heißt ein nicht entartetes, n-fach periodisches System. Wenn wir nämlich annehmen, daß zwischen den ν_j etwa m solche Relationen bestehen:

$$\sum_{j=1}^{n} k_j^{(i)} \nu_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad (m < n), \tag{10}$$

so können wir sie als m linear homogene Gleichungen zwischen den n Größen ν_j auffassen. Nach der Theorie der linearen Gleichungen (1. Bd., II, § 1, 5) lassen sich alle Lösungen linear homogen aus $n - m$ Größen aufbauen, wobei die Koeffizienten wegen der Ganzzahligkeit der $k_j^{(i)}$ auch ganzzahlig sind, d. h. es gibt $n - m$ Größen $\nu_1', \nu_2', \ldots, \nu_{n-m}'$, so daß

$$\nu_j = \sum_{i=1}^{n-m} l_i^{(j)} \nu_i' \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

wobei die $l_i^{(j)}$ auch ganze Zahlen sind. Setzen wir (11) in (9) ein, so erhalten wir die x_i als Summe von periodischen Funktionen der Zeit mit Frequenzen, die sich linear homogen mit ganzzahligen Koeffizienten aus $n - m$ Grundfrequenzen $\nu_1', \ldots, \nu_{n-m}'$ zusammensetzen. In diesem Falle nennt man das System m-fach entartet oder $n - m$-fach periodisch. Der äußerste Fall ist $m = n - 1$. Dann ist das System einfach periodisch. Die ν_j sind dann ganzzahlige Vielfache einer einzigen Grundfrequenz ν'.

An Stelle der w_j lassen sich leicht durch eine Berührungstransformation neue Winkelvariable einführen. Wir setzen:

$$w_i' = \sum_{j=1}^{n} k_j^{(i)} w_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

wo die $k_j^{(i)}$ ganze Zahlen sind und die Determinante aus den $k_j^{(i)}$ den Wert ± 1 hat. Dann ergeben sich nämlich durch Auflösung die w_j wieder als linear homogene Funktionen der w_i' mit ganzzahligen Koeffizienten und durch Einsetzen in (7) sieht man, daß die Abhängigkeit der x_i von den w_i' dieselbe Gestalt hat wie von den w_j. Damit wir

eine Berührungstransformation vor uns haben, müssen die J_j' solche linear homogene Funktionen der J_j sein, daß nach § 4, (24)

$$\sum_{i=1}^{n} J_i' w_i' = \sum_{j=1}^{n} J_j w_j. \tag{13}$$

Aus (13) und (12) folgt:

$$J_j = \sum_{i=1}^{n} k_j^{(i)} J_i' \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{13a}$$

Setzen wir

$$E^*(J_1, J_2, \ldots, J_n) = E'(J_1', J_2', \ldots, J_n'), \quad \frac{\partial E'}{\partial J_j'} = \nu_j',$$

so ist

$$\nu_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E^*}{\partial J_j} \frac{\partial J_j}{\partial J_i'} \quad \text{oder} \quad \nu_i' = \sum_{j=1}^{n} k_j^{(i)} \nu_j. \tag{14}$$

Man kann also als Grundfrequenzen auch beliebige linear homogene Funktionen der alten ν_j mit ganzzahligen Koeffizienten von der Determinante ± 1 nehmen. Wenn nun das System entartet ist, d. h. wenn zwischen den ν_j die m Relationen (10) bestehen, so können wir die $k_j^{(i)}$ in der Transformation (14) so wählen, daß sie in den ersten m Gleichungen mit den $k_j^{(i)}$ in (10) übereinstimmen. Dann folgt aber aus (14) und (10), daß $\nu_1' = \nu_2' = \ldots \nu_m' = 0$ und nur die $n - m$ Grundfrequenzen $\nu_{m+1}', \ldots, \nu_n'$ von Null verschieden sind. Daraus folgt aber, daß die $J_1', \ldots, J_m'$ in E' nicht vorkommen.

Wenn also ein System m-fach entartet ist, kann man immer solche Winkel- und Wirkungsvariable einführen, daß sie in zwei Gruppen zerfallen: 1. m „uneigentliche" Winkelvariable $v_1, \ldots, v_m$, deren zugehörige Wirkungsvariable u_j in E' nicht vorkommen; diese v_j bleiben während der Bewegung konstant. 2. $n - m = \mu$ „eigentliche" Winkelvariable $w_1, \ldots, w_\mu$, deren zugehörige J_j allein in E' vorkommen; diese w_j sind lineare Funktionen der Zeit. Die Lösungen § 5, (40) lauten dann:

$$\begin{cases} u_j = \alpha_j, \quad v_j = \beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \\ J_k = \alpha_k', \quad w_k = \nu_k' t + \beta_k' \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu). \end{cases} \tag{15}$$

Führen wir für die J_j, w_j ihre Werte aus (15) in (7) ein, so erhalten wir, wenn wir anstatt ν_j' einfach wieder ν_j schreiben:

$$\begin{cases} x_i = A^{(i)}(u_1, \ldots, u_m, J_1, \ldots, J_\mu) \\ + \sum_{k_1, \ldots, k_n} A^i_{k_1, \ldots, k_n} \cos[(k_1 \nu_1 + \cdots + k_\mu \nu_\mu) t + k_{\mu+1} \beta_1 + \cdots \\ + k_n \beta_m + \delta_{k_1, \ldots, k_n}]. \end{cases} \tag{16}$$

Es kommen dann nur mehr μ „Grundfrequenzen" vor; eine Funktion der uneigentlichen Winkelvariablen tritt einfach als Phasenkonstante dazu.

4. Beispiele. Sehr einfach gestaltet sich die Einführung der Winkelvariablen in dem ersten Beispiel von § 5, 4. Wir haben nach § 5, (36) und (20) zu setzen:

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2 m P_r - m k_r q_r^2}\, dq_r \qquad (r = 1, 2). \tag{17}$$

Das Umlaufsintegral ist zwischen den Nullstellen $q_r^{(0)}$ und $q_r^{(1)}$ des Radikanden zu erstrecken, und zwar hin und zurück. Man führt es am besten durch Einführung einer Hilfsvariablen ϑ durch die Gleichung $\frac{k_r q_r^2}{2 P_r} = \sin^2\vartheta$ aus. Für die Nullstellen des Radikanden ist $\sin^2\vartheta = 1$, also $\sin\vartheta = \pm 1$, $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$. Das Integral ist also von $-\frac{\pi}{2}$ nach $+\frac{\pi}{2}$ und zurück oder wegen der Periodizität in ϑ von 0 bis 2π zu erstrecken. Dann nimmt J_1 den Wert

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{\frac{m}{k_r}}\, P_r \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

an oder nach § 5, (23)

$$J_r = \frac{P_r}{\nu_r} \qquad (r = 1, 2). \tag{18}$$

Daraus folgt aber wegen § 5, (20) und (21)

$$E^* = \nu_1 J_1 + \nu_2 J_2, \tag{19}$$

$$\begin{cases} F^*(q_1, q_2, J_1, J_2) = \int \sqrt{2 m J_1 \nu_1 - m k_1 q_1^2}\, dq_1 \\ \qquad\qquad + \int \sqrt{2 m J_2 \nu_2 - m k_2 q_2^2}\, dq_2. \end{cases} \tag{20}$$

Wegen § 5, (39) ist:

$$\begin{cases} w_j = m \nu_j \int \dfrac{dq_j}{\sqrt{2 m J_j \nu_j - m k_j q_j^2}} \end{cases} \qquad (j = 1, 2), \tag{21}$$

und wenn wir das Integral analog dem in § 5, (24) ausführen: $w_j = \nu_j Q_j$. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen in den Winkel- und Wirkungsvariablen sind nach § 5, (40) $w_j = \nu_j t + \beta_j$.

Die Berührungstransformationen, durch welche die w_j, J_j eingeführt werden, erhalten wir durch Einsetzen in § 5, (25) als

$$\begin{cases} q_j = \sqrt{\dfrac{2 J_j}{\nu_j m}} \sin w_j, \quad p_j = \sqrt{2 J_j \nu_j m} \cos w_j \end{cases} \qquad (j = 1, 2). \tag{22}$$

Das sind die schon im 1. Bd., V, § 5, (38) behandelten Transformationen.

Das System entartet nach (10), wenn zwischen ν_1 und ν_2 eine Beziehung der Gestalt $k_1\nu_1 + k_2\nu_2 = 0$ besteht, wo k_1, k_2 ganze Zahlen sind, d. h. wenn $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ ein rationales Verhältnis ist. In diesem Falle ist das System ein einfach periodisches.

5. Angenäherte Perioden. Wir betrachten ein nichtentartetes zweifach periodisches System. Damit es einen einmal durchlaufenen Zustand genau wieder erreicht, müssen nach § 5, (42) w_1 und w_2 genau um $2\pi k_1$ bzw. $2\pi k_2$ zunehmen, wo k_1 und k_2 irgendwelche ganze Zahlen sind. Diese Zuwächse finden in einer Zeit τ statt, die nach (8) und § 5, (40) den Beziehungen $\nu_j\tau = 2\pi k_j$ $(j = 1, 2)$ genügt. Da aber aus ihnen $k_2\nu_1 - k_1\nu_2 = 0$ folgt, also eine Relation der Gestalt (10), so kann für ein nichtentartetes System kein solches τ, also keine genaue Periode existieren. Man kann aber die Frage aufwerfen, ob das System, wenn man es nur genug lang verfolgt, wenigstens seinem Ausgangszustand beliebig nahe kommt. Wenn man die „Grundperioden" $\tau_j = 2\pi/\nu_j$ einführt, lauten die Bedingungen für eine genaue Periode $\tau = k_1\tau_1 = k_2\tau_2$. Wir fragen nun, ob man zwei ganze Zahlen k_1 und k_2 so finden kann, daß bei gegebenen τ_1, τ_2 die Beziehung $k_1\tau_1 = k_2\tau_2 + \eta$ erfüllt ist, wo η kleiner als eine gegebene kleine Zahl ist. Dann würden bei Änderung von t um $k_1\tau_1$ sich w_1 und w_2 mit dem Fehler $2\pi\varepsilon = \nu_2\eta$ um ganzzahlige Vielfache von 2π ändern; es wäre $k_1\tau_1$ eine angenäherte Periode. Verlangt man, daß der Fehler $|\varepsilon| < 1/n$ ausfällt, wobei n eine große ganze Zahl, der „Genauigkeitsanspruch", ist, so findet man die fraglichen k_1, k_2 folgendermaßen: Wenn etwa $\tau_2 > \tau_1$, so bilden wir die ganzzahligen Vielfachen des echten Bruches τ_1/τ_2, also 0, τ_1/τ_2, $2\tau_1/\tau_2, \ldots, n\tau_1/\tau_2$. Die so gewonnenen $n+1$ Zahlen zerlegen wir jede in zwei Summanden, nämlich die größte in ihr enthaltene ganze Zahl und den Rest, der kleiner als 1 ist. Da diese $n+1$ Reste alle im Intervall zwischen 0 und 1 liegen, gibt es bei Einteilung desselben in n gleiche Teile von der Länge $1/n$ sicher mindestens ein Teilintervall, in dem zwei Reste liegen, deren Differenz daher nicht größer als $1/n$ ist. Die ihnen entsprechenden Vielfachen seien $n'\tau_1/\tau_2$ und $n''\tau_1/\tau_2$. Wenn mehrere derartige Paare existieren, wählen wir das mit der kleinsten Differenz $n'' - n' > 0$. Nun ist offenbar $(n'' - n')\tau_1/\tau_2 = k_2 + \varepsilon$, wo k_2 eine ganze Zahl und $|\varepsilon| \leq 1/n$ ist. Setzen wir $n'' - n' = k_1$ und in Übereinstimmung mit der eingeführten Bezeichnungsweise des Fehlers $\varepsilon\tau_2 = \eta$, so ist $k_1\tau_1 = k_2\tau_2 + \eta$, wo η durch genügend groß angenommenes n beliebig klein gemacht werden kann. Bei einem Genauigkeitsanspruch n gibt es daher eine angenäherte Periode $k_1\tau_1 < n\tau_1$ und eine ganze Zahl k_2, so daß die für eine genaue Periode gültige Gleichung

$k_1\tau_1 = k_2\tau_2$ mit einem Fehler η erfüllt ist, der kleiner als τ_2/n ist. Dadurch ist auch eine rationale näherungsweise Darstellung des Verhältnisses der Grundperioden gegeben:

$$(23) \qquad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{k_2}{k_1} + \frac{\eta}{k_1\tau_2}, \quad \frac{|\eta|}{k_1\tau_2} = \frac{|\varepsilon|}{k_1} < \frac{1}{nk_1} < \frac{1}{k_1^2}.$$

Wenn k_1 sehr klein gegen n ist, so sagen wir, daß durch (23) für den betreffenden Genauigkeitsanspruch τ_1/τ_2 durch einen echten Bruch mit kleinem Nenner approximiert wird. Bleibt der kleine Nenner auch bei Steigerung der verlangten Genauigkeit erhalten, so sagt man, daß unser System für das betreffende Genauigkeitsintervall „physikalisch" entartet ist, da bei „mathematischer Entartung" im Sinne von 3 bei beliebiger Genauigkeit τ_1/τ_2 immer durch denselben rationalen Bruch dargestellt wird. Als Beispiel betrachten wir $\tau_1/\tau_2 = \frac{1}{2} + \delta$, wo $\delta < 1/2n$ ist. Man erhält durch das angegebene Verfahren die Vielfachen

$$0, \quad \tfrac{1}{2} + \delta, \quad 1 + 2\delta, \quad \tfrac{3}{2} + 3\delta, \ldots, \quad n/2 + n\delta,$$

also die Reste: $0, \frac{1}{2} + \delta, 2\delta, \frac{1}{2} + 3\delta, 4\delta, \ldots$, also da je zwei um zwei Stellen voneinander entfernte Reste die Differenz $2\delta < 1/n$ haben, $n'' - n' = k_1 = 2$ und $2\tau_1/\tau_2 = 1 + 2\delta$, also $\varepsilon = 2\delta$. Bei wachsendem n bleibt doch k_1 gleich 2, also klein gegen n, solange $n < \frac{1}{2}\delta$ bleibt. Wenn n nur ein wenig über diese Grenze wächst, so sind die 2δ nicht mehr kleiner als $1/n$ und erst der Rest von $n/2 + n\delta$ (bei ungeradem n) liegt wieder mit 0 im selben Intervall von der Länge $1/n$. Wir haben also $k_1 = n$. Das Verhältnis $\tau_1/\tau_2 = \frac{1}{2} + \delta$ kann bei so großem Genauigkeitsanspruch nicht mehr durch einen Bruch mit kleinem Nenner approximiert werden. Wir sagen allgemein, daß unser System für einen Bereich von Genauigkeitsgraden n „physikalisch nicht entartet" ist, wenn das Periodenverhältnis τ_1/τ_2 nicht durch einen Bruch mit kleinem Nenner approximiert werden kann, sondern der kleinste mögliche Nenner von der Größenordnung von n selbst ist[1]). Wenn also $E < 1$, aber von der Größenordnung 1 ist, können wir $k_1 = En$ setzen. Wir können das bisher Gezeigte auch so formulieren:

Die angenäherte Periode $k_1\tau_1$ eines Systems bleibt mit wachsendem Genauigkeitsanspruch n unverändert, solange das System als physikalisch entartet angesehen werden kann.

---

[1]) Mit Hilfe der Kettenbruchtheorie läßt sich zeigen, daß so wie in dem Beispiel auch allgemein k_1 bei wachsendem n entweder konstant bleibt oder sofort bis zur Größenordnung n wächst.

Die angenäherte Periode $k_1 \tau_1$ eines physikalisch nichtentarteten Systems wächst mit dem verlangten Genauigkeitsgrad.

Analog kann man für ein n-fach periodisches System, das mathematisch nichtentartet ist, die Existenz einer angenäherten Periode beweisen, für die, wenn das System auch physikalisch nicht entartet ist, der eben ausgesprochene Satz gilt.

Eine weitere Frage ist die, ob ein System einen beliebig vorgegebenen Zustand, wenn ihm nur nach § 5, (39) reelle Werte der w_j entsprechen, im Laufe der Bewegung überhaupt je annimmt, oder ihm wenigstens beliebig nahe kommt. Formulieren wir das Problem wieder für das zweifach-periodische System, so handelt es sich darum, ob es einen Zeitpunkt t gibt, für den die Winkelvariablen die Werte $w_j = \overline{w}_j + 2 l_j \pi$ $(j = 1, 2)$ annehmen, wo die $\overline{w}_j$ willkürlich gegebene Zahlen, $(|\overline{w}_j - \beta_j| < \pi)$ hingegen die l_j irgendwelche ganze Zahlen sind. Nach § 5, (40) muß t den Beziehungen $\nu_j t + \beta_j = \overline{w}_j + 2 l_j \pi$ $(j = 1, 2)$ genügen, woraus durch Elimination von t die Gleichung $l_1 \tau_1 - l_2 \tau_2 = \alpha$ folgt, wobei $\alpha = \frac{1}{\nu_2}(\overline{w}_2 - \beta_2) - \frac{1}{\nu_1}(\overline{w}_1 - \beta_1)$ eine willkürlich vorgegebene Zahl ist. Da bei gegebenem τ_1, τ_2, α sich im allgemeinen keine ganzen Zahlen l_1, l_2 finden lassen, die der verlangten Relation genau genügen, versuchen wir sie wieder näherungsweise zu erfüllen, d. h. l_1, l_2 so zu bestimmen, daß sie $l_1 \frac{\tau_1}{\tau_2} - l_2 = \frac{\alpha}{\tau_2} + \sigma$ genügen, wo σ sehr klein ist. Wir suchen zu diesem Zweck α/τ_2 näherungsweise durch einen Bruch mit demselben Nenner k_1 darzustellen, durch den wir in (23) τ_1/τ_2 dargestellt hatten, d. h. wir setzen $k_1 \frac{\alpha}{\tau_2} = a + \omega$, wobei a eine ganze Zahl und $|\omega| \leqq \frac{1}{2}$ ist. Wenn wir die zu erfüllende Beziehung mit k_1 multiplizieren, erhalten wir sie, da nach (23) $k_1 \frac{\tau_1}{\tau_2} = k_2 + \varepsilon$, in der Gestalt

$$k_2 l_1 - k_1 l_2 + l_1 \varepsilon = a + \omega + k_1 \sigma. \tag{24}$$

Da k_1 und k_2 teilerfremd sind, so lassen sich l_1 und l_2 aus der diophantischen Gleichung $k_2 l_1 - k_1 l_2 = a$ bei beliebigen ganzzahligen Koeffizienten k_1, k_2, a bestimmen. Wenn $l_1^{(0)}, l_2^{(0)}$ eine Lösung ist, gibt es unendlich viele Lösungen $l_1^{(0)} + m k_1$, $l_2^{(0)} + m k_2$, wo m eine beliebige ganze Zahl ist.

Man kann daher als $l_1^{(0)}$, $l_2^{(0)}$ immer die Lösung einsetzen, für die $|l_1^{(0)}| < \frac{1}{2} k_1$. Ist l_1, l_2 so bestimmt, ergibt sich für den Fehler σ, mit dem die ursprüngliche Beziehung dadurch erfüllt ist, nach (24) $k_1 \sigma = l_1 \varepsilon - \omega$, also

$$\sigma = m \varepsilon + \frac{l_1^{(0)}}{k_1} \varepsilon - \frac{\omega}{k_1}. \tag{25}$$

Dabei ist m noch frei verfügbar. Wenn das System „physikalisch nichtentartet“ ist, setzen wir $m = 0$; dann ist nach (25):

$$\sigma = \frac{l_1^{(0)}}{k_1} \cdot \varepsilon - \frac{\omega}{E n}, \quad \text{also} \quad |\sigma| < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{E}\right)\frac{1}{n}.$$

Der Fehler σ hat also höchstens die Größenordnung $1/n$; die Zeit t, in der eine vorgegebene Lage $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ annähernd (mit einem Fehler von höchstens der Größenordnung $1/n$) von der Anfangslage β_1, β_2 aus erreicht wird, ist $t = \frac{1}{\nu_1}(\overline{w}_1 - \beta_1) + l_1 \tau_1$. Da $|\overline{w}_1 - \beta_1| < \pi$, ist $|t| < (\frac{1}{2} + l_1)\tau_1$. Da in unserem Fall $l_1 = l_1^{(0)} < \frac{1}{2} k_1$, ist $|t| < \frac{1}{2}(1 + k_1)\tau_1$. Ein „physikalisch nichtentartetes System durchläuft in einer Zeit, die nicht viel größer als die angenäherte Periode $k_1 \tau_1$ ist, „annähernd“ alle Lagen, denen bei gegebenen Integrationskonstanten J_1, J_2 überhaupt reelle Werte der Winkelvariablen entsprechen. Das System kommt also ∞^2 Lagen beliebig nahe, d. h. allen, die überhaupt von der Anfangslage β_1, β_2 aus auf „wirklich durchlaufenen“ Bahnkurven (s. § 3, 3) erreicht werden können. Unabhängig von den Werten der Integrationskonstanten β_1, β_2 füllen die Bahnkurven ein nur durch J_1, J_2 bestimmtes zweidimensionales Gebiet mit immer wachsender Dichte aus.

Wenn das System „physikalisch entartet“ ist, so ist ω/k_1 nicht klein. Wir wählen dann in (25) m so, daß $m\varepsilon$ möglichst nahe an $\frac{l_1^{(0)}}{k_1}\varepsilon + \frac{\omega}{k_1}$ liegt. Das kann mit einem Fehler von höchstens ε erreicht werden. Dann ist $|\sigma|$ klein gegen $1/2n$. Die Zeit, in der die vorgegebene Lage erreicht wird, ist nun $t = \frac{1}{\nu_1}(\overline{w}_1 - \beta_1) + (m k_1 + l_1^{(0)})\tau_1$, also $|t| < [\frac{1}{2} + (m + \frac{1}{2})k_1]\tau_1$. Die Zeit, in der alle möglichen Lagen durchlaufen werden, kann also bei „physikalisch entarteten“ Systemen bis zu einem hohen (m-fachen) Vielfachen der angenäherten Periode steigen.

Auch für n-fach periodische Systeme kann man zeigen, daß das System allen Lagen sehr nahe kommt, die in einem n-dimensionalen Gebiet des $q_1, \ldots, q_n$-Raumes enthalten sind. Die Zeit, in welcher das ganze Gebiet übersponnen wird, ist bei „physikalisch nichtentarteten“ Systemen von der ungefähren Größe der angenäherten Periode. Bei „physikalischer Entartung“ wird diese „Ausfüllungszeit“ viel größer und nähert sich im Grenzfalle „mathematischer Entartung“ dem Werte unendlich, d. h. die Bahnkurve füllt kein n-dimensionales Gebiet mehr aus.

Diese „Überdeckung des ganzen n-dimensionalen Gebietes“ der Variablen q_i, die reellen Werten der Winkelvariablen w_j entspricht,

läßt sich am einfachsten am Beispiel von 4 anschaulich machen. Nach (21) ist das reellen w_1, w_2 entsprechende Gebiet der Teil der q_1, q_2-Ebene zwischen den $q_j = \pm \sqrt{\frac{2J_j}{\nu_j m}}$ $(j = 1, 2)$ (wegen $k_j = \nu_j^2$). Dieses Rechteck wird also im Verlauf der Zeit immer dichter und dichter von der Bahnkurve des beweglichen Punktes m überdeckt. Wenn ν_1/ν_2 sich nahezu als Verhältnis kleiner ganzer Zahlen darstellen läßt, also im Falle einer „physikalischen" Entartung, verbleibt der Punkt durch viele angenäherte Perioden hindurch in der Nähe einer periodischen Bahn und durchwandert das Rechteck erst in Zeiten, die lang gegen diese näherungsweise Periode sind; im Falle „mathematischer" Entartung, z. B. $\nu_1 = \nu_2$,

Fig. 1.

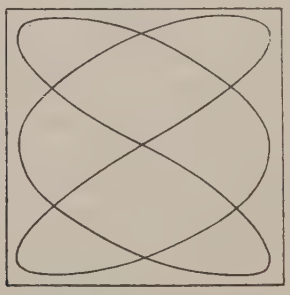
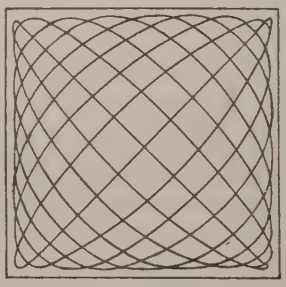


Fig. 2.



beschreibt der Punkt immer wieder dieselbe Ellipse, ohne je das Rechteck auszufüllen. In Fig. 1 und 2 ist die Bahnkurve für das Periodenverhältnis 2 : 3 bzw. 8 : 9 gezeichnet. Man sieht schon an diesen mathematisch entarteten Fällen, daß das Rechteck mit um so größerer Dichte ausgefüllt wird, je weniger das Verhältnis durch kleine Nenner darstellbar ist.

6. Beziehungen zur Quantentheorie. Nach den Grundhypothesen der Quantentheorie[1]) kann ein n-fach periodisches System nur solche Bahnen wirklich durchlaufen, bei denen die durch Gl. (3) definierten Wirkungsvariablen J_r, die ja während jeder Bewegung konstant bleiben, ganzzahlige Vielfache einer universellen Konstanten, des Planckschen Wirkungsquantums h, sind, also die Beziehungen

$$J_r = k_r h \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

erfüllen, wo die k_r ganze Zahlen sind. Bei entarteten Systemen gelten die Gleichungen nur für die den eigentlichen Winkelvariablen entsprechenden J_r. Da nur diese im Energieausdruck § 5, (37) vorkommen, wird die

[1]) Siehe z. B. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. Braunschweig 1924.

Energie eine Funktion von m ganzen Zahlen, wenn das System genau m-fach periodisch ist. Wir setzen etwa:

$$E^*(J_1, \ldots, J_m) = W(k_1, \ldots, k_m). \tag{27}$$

Betrachten wir das System auf zwei möglichen Bahnen, die den Werten $J_1, \ldots, J_m$ bzw. $J_1 + \Delta J_1, \ldots, J_m + \Delta J_m$ entsprechen, wo etwa $\Delta J_r = n_r h$, $(r = 1, 2, \ldots, m)$ mit ganzzahligen n_r gesetzt ist, so lautet die Energiedifferenz ΔE zwischen beiden Bahnen, die nach der Bohrschen Grundhypothese mit der beim Übergang des Systems von der einen Bahn auf die andere ausgestrahlten Strahlungsfrequenz ν durch $\Delta E = h\nu$ zusammenhängt:

$$\begin{cases} \Delta E = E^*(J_1 + \Delta J_1, \ldots, J_m + \Delta J_m) - E^*(J_1, \ldots, J_m) \\ \quad\; = W(k_1 + n_1, \ldots, k_m + n_m) - W(k_1, \ldots, k_m). \end{cases} \tag{28}$$

Wenn die Bahnen sehr nahe benachbart sind, so daß die ΔJ_r klein gegen J_r, d. h. die n_r klein gegen k_r sind, so wird aus (28)

$$\Delta E = \sum_j \frac{\partial E^*}{\partial J_j} \Delta J_j,$$

woraus, wegen (8), $\Delta J_j = h n_j$ und $\Delta E = h\nu$,

$$\nu = \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \cdots + \nu_m n_m \tag{29}$$

folgt. D. h. im Falle großer Quantenzahlen k_r der Bahnen werden beim Übergang auf eine nahe benachbarte Bahn dieselben Frequenzen ausgestrahlt, wie nach der klassischen Strahlungstheorie, wo sich die Strahlungsfrequenzen durch die Fourierentwicklung der Bahnkoordinaten (16) ergeben. Dieser Satz ist die mathematische Wurzel des Bohrschen Korrespondenzprinzips.

Lehrbücher.

L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. 1. Teil, Leipzig 1897; 2. Teil, Leipzig 1904.

K. Heun, Kinematik. Leipzig 1906.

H. Lamb, Higher Dynamics. Cambridge, University Press.

C. H. Müller und G. Prange, Allgemeine Mechanik. Hannover 1923.

P. Painlevé, Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique et applications. Paris 1895.

C. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Deutsch von A. Schepp. 1. Bd. Die Elemente; 2. Bd. Die höhere Dynamik. Leipzig 1898.

E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, mit einer Einführung in das Dreikörperproblem. Deutsch von F. und K. Mittelstenscheid. Berlin 1924.

Zweites Kapitel.

Stabilität und kleine Schwingungen.

§ 1. Quasistatische Bewegungen[1]).

1. Erleichterung der Integration beim Vorhandensein verborgener Koordinaten. Wenn in der Lagrangeschen Funktion L eine Anzahl von Koordinaten nicht vorkommen, sondern nur deren Ableitungen nach der Zeit, so kann man die n Koordinaten in zwei Gruppen zerlegen: die eben erwähnten „verborgenen“ und die in L vorkommenden „wahrnehmbaren“ Koordinaten. Wir nehmen etwa an, es seien μ verborgene Koordinaten $w_1, w_2, \ldots, w_\mu$ und $n-\mu$ wahrnehmbare $q_1, q_2, \ldots, q_{n-\mu}$ vorhanden. Dann ist L Funktion von $\dot{w}_1, \ldots, \dot{w}_\mu$, $q_1, \ldots, q_{n-\mu}$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-\mu}$. Es ist also

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Für die Routhsche Funktion R gilt dann nach I, § 2, (56) auch $\frac{\partial R}{\partial w_j} = 0$. Es ist also R mit den Bezeichnungen von I, § 2, (55), wenn wir es in bezug auf die verborgenen Koordinaten $w_1, \ldots, w_\mu$ bilden, eine Funktion von $q_1, \ldots, q_{n-\mu}$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-\mu}$, $u_1, \ldots, u_\mu$. Wenn wir dann die Bewegungsgleichungen in der Routhschen Form I, § 2, (57) benutzen, so ergibt sich aus ihnen wegen $\frac{du_j}{dt} = 0$ die Konstanz der u_j. Es wird dann R nur Funktion der $q_1, \ldots, q_{n-\mu}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-\mu}$ und von μ willkürlichen Konstanten u_j. Die zweite Gruppe der genannten Gl. (57) besteht dann aus $n-\mu$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die wahrnehmbaren Koordinaten. Sie haben genau die Gestalt der Lagrangeschen Gleichungen; nur tritt an Stelle von L die Routhsche Funktion R. Durch Integration dieses Systems von $n-\mu$ Gleichungen zweiter Ordnung erhält man die $n-\mu$ wahrnehmbaren Koordinaten q_i als Funktionen der Zeit t und von $2n-2\mu$ willkürlichen Integrationskonstanten, zu denen noch die μ willkürlichen u_j

---

[1]) Diese Bewegungen werden in der englischen Literatur häufig als „steady motion“ bezeichnet. Oft wird aber unter diesem Ausdruck auch eine allgemeinere Art von Bewegungen verstanden, die wir in § 3 unter dem in der deutschen Literatur sich allmählich einbürgernden Namen der „permanenten“ oder „beständigen“ Bewegungen einführen werden.

treten. Durch Einsetzen dieser Funktionen für die q_i und $\dot{q}_i$ wird R eine bekannte Funktion von t und $2n-\mu$ willkürlichen Konstanten. Dann lassen sich aber die beiden ersten Gruppen der Bewegungsgleichungen I, § 2, (57) durch bloße Quadraturen integrieren. Es werden nämlich offenbar auch die $\frac{\partial R}{\partial u_j}$ bekannte Funktionen von t und $2n-\mu$ Konstanten, also

$$(1) \qquad w_j = \int^t \frac{\partial R}{\partial u_j}\, dt + \beta_j, \quad u_j = \alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-\mu),$$

wo das Integral als unbestimmtes zu nehmen ist und die α_j, β_j willkürliche Konstanten bedeuten. Mit den μ Größen β_j enthalten unsere Lösungen jetzt gerade $(2n-\mu)+\mu = 2n$ willkürliche Konstanten. Wenn also μ verborgene Koordinaten vorhanden sind, können wir die Integration der n Bewegungsgleichungen auf die der $n-\mu$ Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

und auf μ Quadraturen zurückführen. Aus (2) ergeben sich die „wahrnehmbaren", aus (1) die verborgenen Koordinaten als Funktionen der Zeit und $2n$ willkürlicher Konstanten.

Als Beispiel betrachten wir die ebene Zentralbewegung. Ein materieller Punkt von der Masse m werde von einem festen Zentrum der Masse M mit einer Kraft $Mmf(r)$ angezogen, wo $f(r)$ eine beliebige Funktion des Abstandes r ist. Wenn wir Polarkoordinaten r, φ mit M als Ursprung verwenden, so ist die Lagrangesche Funktion nach I, § 2, (29)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + MmF(r),$$

wo $F(r) = \int f(r)\, dr$. Hier ist φ eine verborgene und r die einzige wahrnehmbare Koordinate. Wir können daher nach dem Vorhergehenden für r allein eine Gleichung von der Lagrangeschen Form aufstellen. Wir haben $n = 2$, $\mu = 1$, $w_1 = \varphi$, $q_1 = r$ zu setzen. Es ist die Routhsche Funktion $R = -L + u\dot{\varphi}$, dabei ist

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Vermöge dieser Gleichung läßt sich $\dot{\varphi}$ eliminieren und R wird Funktion von r und $\dot{r}$, nämlich

$$R = -\frac{m}{2}\dot{r}^2 + MmF(r) + \frac{u^2}{2mr^2}.$$

Nach (2) ist dann r als Funktion der Zeit durch eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$m\ddot{r} = -Mmf(r) + \frac{u^2}{mr^3}$$

bestimmt. Aus (1) ergibt sich dann

$$u = \alpha \quad \text{und} \quad \varphi = \int \frac{u}{mr^2}\,dt + \beta = \frac{\alpha}{m}\int \frac{dt}{r^2} + \beta,$$

wo α und β willkürliche Konstanten sind[1]).

2. Quasistatische Bewegungen nach Routh. Aus dem vollständigen System von Lösungen der Bewegungsgleichungen läßt sich leicht ein Teilsystem hervorheben, das nur 2μ willkürliche Konstanten enthält und das man ohne jede Integration einer Differentialgleichung erhalten kann. Es lassen sich offenbar die Gl. (2) immer durch konstante Werte der $n-\mu$ wahrnehmbaren Koordinaten befriedigen. Wenn wir diese, die wir mit $q_i = \bar{q}_i$ bezeichnen wollen, einsetzen, werden die $\dot{q}_i$ zu Null, die $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ zu Konstanten, deren Ableitungen nach der Zeit verschwinden und die q_i müssen nur mehr den endlichen Gleichungen $\frac{\partial R}{\partial q_i} = 0$ genügen. Durch Auflösung dieser $n-\mu$ Gleichungen nach den q_i erhält man die gesuchten $\bar{q}_j$ als Funktionen der μ willkürlichen Konstanten $u_j = \alpha_j$. Setzen wir in $\frac{\partial R}{\partial u_j}$ die Werte $q_i = \bar{q}_i$, $u_j = \alpha_j$ ein, so lassen sich die Quadraturen sofort ausführen, und wir erhalten das 2μ willkürliche Konstanten enthaltende Lösungssystem:

$$(3)\quad w_j = \frac{\partial R}{\partial \alpha_j}\,t + \beta_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu), \quad q_i = \bar{q}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n-\mu).$$

Jede Bewegung, die diesem System angehört, nennen wir quasistatisch in bezug auf das gewählte Koordinatensystem. Sie ist nämlich „gleichgewichtsähnlich", weil alle wahrnehmbaren Koordinaten unverändert bleiben. Nur die verborgenen wachsen linear mit der Zeit, haben also konstante Geschwindigkeiten $\dot{w}_j$. Wegen I, § 2, (56) kann man die quasistatischen Bewegungen auch finden, indem man die $\dot{w}_j$ gleich willkürlichen Konstanten setzt, etwa $\dot{w}_j = \omega_j$ und die $\bar{q}_i$ aus $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ als Funktionen der μ willkürlichen Konstanten ω_j bestimmt; die w_j ergeben sich dann als $w_j = \omega_j t + \beta_j$, wo die β_j neue willkürliche Konstanten sind.

---

[1]) Ein weiteres Beispiel s. III, § 3, **3**.

Schließlich lassen sich die quasistatischen Bewegungen auch mit Hilfe der Hamiltonschen Funktion H kennzeichnen. Wegen I, § 2, (51) kommen auch in H die verborgenen Koordinaten w_j nicht vor. Wenn wir die kanonischen Differentialgleichungen in zwei Gruppen zerlegen, eine für die verborgenen, die andere für die wahrnehmbaren Koordinaten, also

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dw_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial u_j}, & \dfrac{du_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial w_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-\mu), \end{cases}$$

so folgt aus $\dfrac{\partial H}{\partial w_j} = 0$ die Konstanz der $u_j = \alpha_j$. Aus

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

folgt die Konstanz der p_i für die quasistatische Bewegung, die also durch

$$(5)\qquad q_i = \bar{q}_i, \quad p_i = \bar{p}_i \,(i = 1, 2, \ldots, \mu), \quad u_j = \alpha_j$$

gekennzeichnet ist, wo die α_j willkürliche Konstanten sind; die Werte $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ ergeben sich als Funktionen der α_j durch Auflösung der endlichen Gleichungen:

$$(6)\qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-\mu).$$

Wenn wir als Beispiel die Zentralbewegung betrachten, so ist die quasistatische Bewegung dadurch gekennzeichnet, daß die einzig wahrnehmbare Koordinate r konstant bleibt. Ihr Wert berechnet sich aus $\dfrac{\partial R}{\partial r} = 0$, wobei $\dot{r} = 0$ und $u = \alpha$ zu setzen ist, so daß R als Funktion von r allein betrachtet wird. Der konstante Wert $\bar{r}$ muß also nach der in **1** für R gegebenen Formel der Gleichung $Mmf(\bar{r}) = \dfrac{\alpha^2}{m\bar{r}^3}$ genügen, während φ durch $\varphi = \dfrac{\alpha}{m\bar{r}^2}\, t + \beta$ gegeben ist. Wir haben eine Schar gleichförmiger Kreisbewegungen vor uns, die von zwei willkürlichen Konstanten α, β abhängt. Führen wir anstatt α die ebenfalls konstante Winkelgeschwindigkeit ω durch $\dot{\varphi} = \omega = \dfrac{\alpha}{m\bar{r}^2}$ ein, so ist $Mf(\bar{r}) = \bar{r}\omega^2$, woraus für das Newtonsche Gravitationsfeld $f(r) = \dfrac{1}{r^2}$ sich das dritte Keplersche Gesetz $M = \bar{r}^3\omega^2$ ergibt.

3. Verallgemeinerung des Begriffes der quasistatischen Bewegung nach Levi-Civitá. Der in **2** eingeführte Begriff war wesentlich an das Vorhandensein verborgener Koordinaten geknüpft. Führt man aber

z. B. bei der Zentralbewegung anstatt der Polarkoordinaten rechtwinklige Koordinaten x, y ein, so lautet die Lagrangesche Funktion $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - MmF(\sqrt{x^2 + y^2})$ und es gibt keine verborgene Koordinate mehr. Die ausgezeichnete Rolle der gleichförmigen Kreisbewegungen bleibt aber offenbar erhalten. Es muß also eine Methode geben, die quasistatischen Bewegungen allgemeiner zu kennzeichnen. Eine solche rührt von T. Levi-Civitá her[1]). Während in 2 nach Routh Bewegungen betrachtet werden, bei denen die den verborgenen Koordinaten w_j entsprechenden Impulskomponenten u_j zeitlich konstant blieben, betrachten wir jetzt nach Levi-Civitá Bewegungen, bei denen irgendwelche μ Integrale der Bewegungsgleichungen im Sinne von I, § 2, (62) bestimmte Werte der Integrationskonstanten c_j haben.

Es seien wieder $q_1, q_2, \ldots, q_n$ beliebige Koordinaten und

$$(7) \qquad f_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

μ die Zeit nicht enthaltende Integrale der Bewegungsgleichungen I, § 2, (52). Wenn außerdem die f_j ein Involutionssystem bilden (s. I, § 2, 6), so kann man durch eine Berührungstransformation neue kanonische Veränderliche so einführen, daß die α_j wieder die konstanten Werte der den verborgenen Koordinaten entsprechenden Impulskomponenten werden. Wir führen neue Veränderliche $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-\mu}, W_1, W_2, \ldots, W_\mu$ und als deren konjugierte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-\mu}, U_1, U_2, \ldots, U_\mu$ durch folgende Bedingungen ein:

$$(8) \quad U_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = f_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \, (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Die anderen Q_i, P_i, W_j sollen solche Funktionen der $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ sein, daß die Differentialgleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} (W_j, W_k) = 0, (W_j, U_k) = \begin{cases} 0 \, (j \neq k) \\ 1 \, (j = k), \end{cases} \\ (Q_i, Q_k) = 0, (P_i, P_k) = 0, (Q_i, P_k) = \begin{cases} 0 \, (i \neq k) \\ 1 \, (i = k). \end{cases} \end{cases}$$

Die Beziehung $(U_j, U_k) = 0$ ist dann wegen (7), (8) und der Voraussetzung über die f_j von selbst erfüllt. Dann haben wir nach I, § 4, (22) eine Berührungstransformation von der Gestalt I, § 4, (23) vor uns. Die Bewegungsgleichungen behalten ihre Gestalt bei. Sie lauten also, wenn

---

[1]) Rendiconti dei Lincei 1901 und 1905. Eine vereinfachte und zusammenfassende Darstellung mit vielen Beispielen: T. Levi-Civitá, Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires. Prace mat.-fizyez. XVII. Warschau 1906.

wir sie gemäß unserer jetzigen Bezeichnung in zwei Gruppen schreiben, analog wie I, § 4, (10):

$$(10)\qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-\mu),$$

$$(11)\qquad \frac{dW_j}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial U_j}, \quad \frac{dU_j}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial W_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Dabei ist identisch

$$(12)\quad \begin{cases} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \\ = \bar{H}(Q_1, \ldots, Q_{n-\mu}, P_1, \ldots, P_{n-\mu}, W_1, \ldots, W_\mu, U_1, \ldots, U_\mu). \end{cases}$$

Da nach (8) und (7) die U_j zeitlich konstant sind, ist $\frac{\partial H}{\partial W_j} = 0$, d. h. in $\bar{H}$ kommen die W_j nicht vor; sie sind im transformierten Problem verborgene Koordinaten. Und jetzt sieht man genau wie in **2**, daß bei konstantem $U_j = \alpha_j$ sich eine Lösung der Gl. (10) angeben läßt, bei der die Q_i und P_i konstante Werte $\bar{Q}_i$, $\bar{P}_i$ besitzen, die sich aus den $2n - 2\mu$ endlichen Gleichungen

$$(13)\qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-\mu)$$

durch Auflösung nach den Q_i, P_i als Funktionen der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ ergeben. Setzen wir diese Werte in $\bar{H}$ ein, so ergibt sich aus (11)

$$(14)\qquad W_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_j}\, t + \beta_j, \quad U_j = \alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Zusammen mit $Q_i = \bar{Q}_i$, $P_i = \bar{P}_i$ haben wir ein Lösungssystem der Gl. (10), (11) mit 2μ willkürlichen Konstanten α_j, β_j vor uns, aus dem wir sofort ein ebensolches Lösungssystem der ursprünglichen Gleichungen erhalten, wenn wir in den Gleichungen der Berührungstransformation für die Q_i, P_i, W_j, U_j die Ausdrücke (14) und $Q_i = \bar{Q}_i$, $P_i = \bar{P}_i$ einführen und diese $2n$ Gleichungen nach den $2n$ Größen $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ auflösen. Wir erhalten so diese allgemeinen Koordinaten als Funktionen der Zeit t und der 2μ Konstanten α_j, β_j. Dieses Lösungssystem nennen wir im Anschluß an Levi-Civitá die quasistatischen Bewegungen in bezug auf die μ ein Involutionssystem bildenden Integrale f_j in Gl. (7).

In bezug auf ein Involutionssystem von n Integralen ist offenbar nach der Schlußbemerkung in I, § 4 jede Bewegung des Systems quasistatisch.

In konkreten Fällen wird es aber meist nicht möglich sein, die q_i, p_i für die quasistatische Bewegung auf die angegebene Art zu be-

rechnen, weil die wirkliche Herstellung der Berührungstransformation die Auflösung des Systems (9) von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erfordert. Doch kommt man mit folgender Bemerkung zum Ziel: Betrachten wir die Änderung, welche die Hamiltonsche Funktion H oder, was dasselbe ist, die Gesamtenergie des Systems erleidet, wenn man von der quasistatischen Bewegung zu einer benachbarten übergeht, die denselben Werten der Integrationskonstanten α_j in den Gl. (7) entspricht, und entwickeln wir diese Änderung nach den Anderungen $\Delta Q_i, \Delta P_i \ldots$ der Q_i, P_i, W_j, U_j. Wenn wir dann beachten, daß die W_j in $\bar{H}$ nicht vorkommen und die U_j sich nicht ändern, so lauten die in den Zuwächsen linearen Glieder, die wir mit δH bezeichnen wollen, nach Gl. (12) und (13)

$$(15) \qquad \delta H = \delta \bar{H} = \sum_{i=1}^{n-\mu} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \Delta Q_i + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \Delta P_i \right) = 0.$$

Und umgekehrt folgen aus $\delta H = 0$ unter den Nebenbedingungen, daß die U_j konstant bleiben sollen, die Gl. (13) für die quasistatische Bewegung. In dieser Gestalt ist also die Bedingung vom Koordinatensystem unabhängig und wir können sie auch direkt in den $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ folgendermaßen aussprechen: es sollen Bewegungen gesucht werden, von denen aus unter den μ Nebenbedingungen (7) $\delta H\ (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$ ist. Aus (7) folgt durch Auflösung

$$(16) \quad p_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{n-\mu}, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu), \quad (i = n-\mu+1, \ldots, n).$$

Durch Einsetzen in (12) wird dann

$$(17) \qquad \begin{cases} H\ (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{n-\mu}, \psi_{n-\mu+1}, \ldots, \psi_n) \\ = H^*\ (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{n-\mu}, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu). \end{cases}$$

Die Bedingung kann dann als $\delta H^* = 0$ ohne Nebenbedingungen formuliert werden. Aus ihr folgt:

$$(18) \quad \frac{\partial H^*}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \frac{\partial H^*}{\partial p_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n-\mu).$$

Das sind scheinbar $2n - \mu$ Bedingungen. Da sie aber äquivalent mit den $2n - 2\mu$ Bedingungen (13) sind, die man auch als Bedingungen für die q_i, p_i schreiben kann, sind unter den Gl. (18) μ Gleichungen Folgen der $2n - 2\mu$ übrigen. Man kann daher in ihnen noch μ Unbekannte, z. B. $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ willkürlich wählen und die übrigen $2n - 2\mu$ durch sie ausdrücken. Setzen wir diese Ausdrücke und die übrigen $p_i = \psi_i$ aus (16) in die Bewegungsgleichungen I, § 2, (52) ein, und betrachten etwa die ersten μ unter ihnen, so haben wir μ Differentialgleichungen erster Ordnung, aus denen wir $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ als Funktionen der Zeit t

und von μ Integrationskonstanten berechnen können. Da aber in H^* selbst noch die α_j stecken, enthält unsere Lösung 2μ Konstanten. Die Aufsuchung der quasistatischen Bewegungen erfordert also die Integration eines Systems von μ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die anderen Variablen ergeben sich dann durch Auflösung der Gl. (18) als Funktion der $q_1, \ldots, q_\mu$, daher auch von t und 2μ Konstanten. Daß diese auch den ursprünglichen Gleichungen genügen, ergibt sich daraus, daß die Beziehungen (18), wenn sie für einen Zeitpunkt gelten, vermöge der Bewegungsgleichungen identisch in t erfüllt sind. Das sieht man am leichtesten so ein: die Gl. (18) sind den Gl. (13) äquivalent. Diese sind aber gegenüber den Bewegungsgleichungen (10) „invariante Relationen", d. h. aus (13) und (10) folgt auch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n - \mu).$$

Es ist nämlich

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial Q_i \partial Q_k}\frac{dQ_k}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial Q_i \partial P_k}\frac{dP_k}{dt}.$$

Daraus folgt aber nach Gl. (10) und (13) das Verschwinden der linken Seite und damit das Bestehenbleiben der Beziehungen (13) für alle Zeiten.

In mehr symmetrischer Weise kann man die Beziehungen, die aus $\delta H = 0$ unter den Nebenbedingungen $f_j = \alpha_j$ fließen, aufstellen, wenn man μ unbestimmte Multiplikatoren λ_j einführt. Dann lauten die gesuchten Beziehungen bekanntlich

$$(19)\quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn die λ_j mit Hilfe der Gl. (7) eliminiert werden, bleiben aus denselben Gründen wie oben unter den $2n$ Gleichungen zwischen den $2n$ Größen $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ nur $2n - 2\mu$ unabhängige Beziehungen übrig.

Um die Anwendung der Methode an einem ganz durchsichtigen Beispiel zu zeigen, betrachten wir die Zentralbewegung in rechtwinkligen Koordinaten. Wenn wir die Komponenten der Bewegungsgröße mit $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$ bezeichnen, lautet die Hamiltonsche Funktion $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - M m F(r)$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wir suchen die quasistatischen Bewegungen in bezug auf das Flächenintegral: $y p_x - x p_y = \alpha$. In unserem Falle ist also $n = 2$, $\mu = 1$; es müssen also $2n - \mu = 3$ unabhängige Beziehungen zwischen x, y, p_x, p_y sich für die quasistatischen Bewegungen ergeben. Man erhält nach Gl. (19),

wenn wir $f_1 = yp_x - xp_y$ setzen, zunächst $2n + \mu = 5$ Beziehungen, nämlich:

$$(20)\quad \begin{cases} Mmf(r)\dfrac{x}{r} - \lambda p_y = 0, \quad \dfrac{p_x}{m} + \lambda y = 0, \\ Mmf(r)\dfrac{y}{r} + \lambda p_x = 0, \quad \dfrac{p_y}{m} - \lambda x = 0, \end{cases} \qquad yp_x - xp_y = \alpha.$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung läßt sich λ eliminieren; indem man nämlich im zweiten Gleichungssystem die erste mit y, die zweite mit x multipliziert und die Resultate subtrahiert, erhält man $\lambda = -\dfrac{\alpha}{mr^2}$. Setzt man diesen Wert ein, so bleiben $2n = 4$ Gleichungen zwischen x, y, p_x, p_y:

$$(21)\quad \begin{cases} Mm^2 rf(r)x + p_y = 0, \quad Mm^2 rf(r)y - p_x = 0, \\ p_x - \dfrac{\alpha y}{r^2} = 0, \quad p_y + \dfrac{\alpha x}{r^2} = 0. \end{cases}$$

Die vierte von ihnen folgt aber schon aus den $2n - \mu = 3$ ersten. Aus (21) lassen sich die folgenden drei unabhängigen symmetrischen Beziehungen ableiten: Aus den ersten beiden durch Multiplikation mit x bzw. y, und Addition unter Verwendung des Flächenintegrals $Mm^2 r^3 f(r) = \alpha$, aus dem zweiten Paar durch Multiplikation mit p_x bzw. p_y und Addition: $p_x^2 + p_y^2 = \dfrac{\alpha^2}{r^2}$, schließlich aus demselben Paar durch Multiplikation mit x bzw. y und Addition: $xp_x + yp_y = 0$. Nach der ersten Gleichung muß r einen konstanten Wert $\bar{r}$ haben, der nur von α abhängt; nach der zweiten gilt dasselbe für den absoluten Betrag der Geschwindigkeit. Nach der dritten steht die Geschwindigkeit immer auf dem Radiusvektor senkrecht. Die quasistatischen Bewegungen sind also gleichförmige Kreisbewegungen, deren Radius und Geschwindigkeit bestimmte Funktionen von α sind. Man erhält x, y als Funktionen der Zeit, indem man aus den drei Relationen p_x, p_y, y als Funktionen von x ausrechnet und in die kanonischen Bewegungsgleichungen einsetzt. Durch Auflösung der drei Beziehungen ergibt sich:

$$y = \sqrt{\bar{r}^2 - x^2}, \quad p_x = \frac{\alpha}{\bar{r}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\bar{r}^2}}, \quad p_y = \frac{\alpha x}{\bar{r}^2}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die erste Bewegungsgleichung $m\dfrac{dx}{dt} = p_x$ ein, so ergibt sich $m\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\alpha}{\bar{r}}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{\bar{r}^2}}$, also eine Differentialgleichung für x allein. Durch Integration erhält man x als

Funktion von t, α und einer Integrationskonstanten β, nämlich $x = \bar{r} \cos\left(\frac{\alpha}{m\bar{r}^2} t + \beta\right)$. Da y, p_x, p_y durch x ausgedrückt sind, erhält man daraus $y = \bar{r} \sin\left(\frac{\alpha}{m\bar{r}^2} t + \beta\right)$ usw.

Weitere Beispiele s. III, § 2, 3 und V, § 3, 3.

§ 2. Stabilität und Energie.

1. Begriff der Stabilität. Wir betrachten eine bestimmte Grundbewegung, d. h. eine bestimmte Lösung $q_i = \bar{q}_i(t)$, $p_i = \bar{p}_i(t)$ der Bewegungsgleichungen. Es sei ferner $q_i = \bar{q}_i(t) + \Delta q_i$, $p_i = \bar{p}_i(t) + \Delta p_i$ eine zweite Lösung der Bewegungsgleichungen; sie stellt, wie man sagt, eine „gestörte Bewegung" dar. Die Zeitfunktionen Δq_i, Δp_i heißen die „Störung" der Grundbewegung. Wenn nun Δq_i, Δp_i für alle Zeiten dadurch ihrem absoluten Betrag nach beliebig klein gemacht werden können, daß man die Störung in einem einzelnen Zeitpunkt genügend klein wählt, heißt die Grundbewegung stabil gegenüber beliebigen Störungen in diesem Zeitpunkt, und wenn dieser Zeitpunkt auch beliebig gewählt werden kann, schlechthin stabil. Wenn es nur möglich ist, für Störungen Δq_i, Δp_i, die gewissen Bedingungen genügen, durch Wahl genügend kleiner Werte in einem Zeitpunkt sie für immer beliebig herunterzudrücken, heißt die Grundbewegung „partiell stabil" oder stabil gegenüber der speziellen Klasse von Störungen.

Ein Spezialfall ist die Stabilität des Gleichgewichts, wo an Stelle der Grundbewegung eine Gleichgewichtslage des Systems tritt, also $\bar{q}_i(t) = \bar{q}_i$, wo die $\bar{q}_i$ Konstanten sind und $\bar{p}_i(t) = 0$. Die naheliegendste Verallgemeinerung der Gleichgewichtslage ist die quasistatische Bewegung eines Systems mit verborgenen Koordinaten, wo nur die wahrnehmbaren Koordinaten konstant bleiben, $\bar{q}_i(t) = \bar{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - \mu)$. Will man im engsten Anschluß an die Störungen einer Gleichgewichtslage bleiben, so betrachtet man solche Störungen der quasistatischen Bewegung, bei denen nur die wahrnehmbaren Koordinaten und die entsprechenden Impulskomponenten um $\Delta q_i, \Delta p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - \mu)$ sich ändern, während die den verborgenen Koordinaten entsprechenden Impulskomponenten u_j konstant bleiben, so daß die Änderung der Hamiltonschen Funktion $H(q_1, \ldots, q_{n-\mu}, p_1, \ldots, p_{n-\mu}, u_1, \ldots, u_\mu)$ nur von der Störung in den wahrnehmbaren Koordinaten und Impulsen abhängt.

Unter Stabilität einer quasistatischen Bewegung verstehen wir demgemäß immer die partielle Stabilität gegenüber Störungen der wahrnehmbaren Koordinaten und Impulse, bei denen also die u_j ungestört bleiben, d. h. die Werte der Grundbewegung $u_j = \alpha_j$ beibehalten. Wenn wir dann zu quasistatischen Bewegungen nach Levi-Civitá im Sinne

von 3 übergehen, so betrachten wir nur Störungen $\Delta q_i, \Delta p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$, die an den Werten der Integrationskonstanten in den Integralen Gl. (7) des § 1 nichts ändern, die also den Beziehungen

$$(1) \quad \begin{cases} f_j(\bar{q}_1 + \Delta q_1, \bar{q}_2 + \Delta q_2, \ldots, \bar{p}_n + \Delta p_n) = f_j(\bar{q}_1, \ldots, \bar{p}_n) = \alpha_j \\ (j = 1, 2, \ldots, \mu) \end{cases}$$

genügen, wo wieder $q_1 = \bar{q}_1(t), \ldots$ die Gleichungen der Grundbewegung sind. Unter Stabilität dieser Grundbewegung verstehen wir wieder partielle Stabilität gegenüber Störungen, die den μ Bedingungen (1) unterworfen sind.

2. Das Routhsche Energiekriterium der Stabilität. Wir denken uns kanonische Koordinaten nach § 1, 3 eingeführt, in denen sich die gegenüber den μ Integralen § 1 (7) quasistatische Bewegung durch die den Gleichungen § 1, (13) genügenden konstanten Werte $Q_i = \bar{Q}_i$, $P_i = \bar{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - \mu)$ ausdrückt. Die Hamiltonsche Funktion oder Gesamtenergie des Systems ist dann eine Funktion von $Q_1, \ldots, Q_{n-\mu}$, $P_1, \ldots, P_{n-\mu}$, $U_1, \ldots, U_\mu$. Wir betrachten ihre Wertänderung von der quasistatischen Bewegung als Grundbewegung aus, wobei die Störungen den Bedingungen (1) genügen sollen. Durch willkürliche Zuwächse $\Delta Q_1, \ldots, \Delta Q_{n-\mu}$, $\Delta P_1, \ldots, \Delta P_{n-\mu}$ ist immer eine solche Störung gegeben und der entsprechende Zuwachs ΔH von H ist nach § 1, (12):

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta H = \bar{H}(\bar{Q}_1 + \Delta Q_1, \ldots, \bar{P}_{n-\mu} + \Delta P_{n-\mu}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) \\ \qquad - \bar{H}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots, \bar{P}_{n-\mu}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu). \end{cases}$$

Wir nehmen nun an, daß H für das Wertesystem $Q_i = \bar{Q}_i, P_i = \bar{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - \mu)$ ein wirkliches Minimum gegenüber allen Änderungen der Q_i, P_i ist, wenn nur die α_j konstant bleiben, d. h. daß die Gesamtenergie für die quasistatische Bewegung ein Minimum ist, gegenüber allen Störungen der genannten Art. Unter dieser Voraussetzung zeigt Routh, daß die quasistatische Grundbewegung stabil gegenüber allen Störungen der genannten Art ist. Der Beweis von Routh ist einfach der folgende: Wenn eine Funktion von mehreren Veränderlichen für ein bestimmtes Wertesystem derselben ein eigentliches Minimum besitzt, z. B. $f(x, y)$ für $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ den Minimalwert $f(\bar{x}, \bar{y}) = f_0$, so läßt sich durch Wahl eines genügend zu f_0 benachbarten Funktionswertes von $f(x, y)$ auch immer erreichen, daß y und x beliebig nahe an $\bar{x}$ und $\bar{y}$ heranrücken. D. h., wenn ich erreichen will, daß $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ und $|y - \bar{y}| < \varepsilon$ werden, so kann das bei beliebig kleinem ε dadurch erreicht werden, daß in der Ungleichung $|f(x, y) - f_0| < \eta$ nur η genügend klein gewählt wird. Daraus folgt: Wenn E_0 der Energiewert für die quasistatische Grundbewegung ist, so kann ich dadurch, daß ich den Wert von H genügend nahe an E_0 wähle, erreichen, daß die Q_i, P_i

beliebig nahe an $\bar{Q}_i, \bar{P}_i$ bleiben, d. h. daß die Koordinaten der gestörten Bewegung für alle Zeiten beliebig nahe an denen der Grundbewegung bleiben. Durch geeignete Wahl der Störungswerte $\Delta Q_i, \Delta P_i$ in einem bestimmten Zeitpunkt kann ich aber immer erreichen, daß die Energie $E_0 + \Delta H$ der gestörten Bewegung beliebig nahe an E_0 liegt, was dann wegen der Konstanz der Energie auch während der ganzen gestörten Bewegung der Fall ist. Daraus folgt aber nach der Definition von 1 die Stabilität der Grundbewegung. Genau ebenso läßt sich beweisen, daß die Grundbewegung stabil ist, wenn H für sie ein eigentliches Maximum ist.

Wir wollen nun diese Bedingung, etwa für ein Minimum, auch in Formeln fassen. Es muß das ΔH der Gl. (2) für beliebige Werte der $\Delta Q_i, \Delta P_i$ positiv sein und nur mit ihnen verschwinden. Wir entwickeln ΔH nach dem Taylorschen Satz nach Potenzen der $\Delta Q_i, \Delta P_i$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung. Wenn wir durch Überstreichen einer Funktion der Q_i, P_i andeuten, daß in ihr $Q_i = \bar{Q}_i$, $P_i = \bar{P}_i$ zu setzen ist, so erhalten wir bei Beachtung von § 1, (13):

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta H = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Big(& \overline{\frac{\partial^2 H}{\partial Q_i \partial Q_k}} \Delta Q_i \Delta Q_k + \overline{\frac{\partial^2 H}{\partial Q_i \partial P_k}} \Delta Q_i \Delta P_k \\ & + \overline{\frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial P_k}} \Delta P_i \Delta P_k \Big) + \cdots \end{aligned} \right.$$

Auf der rechten Seite steht eine quadratische Form der ΔQ_i, ΔP_i mit konstanten Koeffizienten. Soll H für die Grundbewegung ($\Delta Q_i = \Delta P_i = 0$) ein Minimum sein, so muß diese quadratische Form positiv definit sein (bzw. wenn E_0 ein Maximum von H sein soll, negativ definit).

Wenn also die quadratische Form in Gl. (3) positiv oder negativ definit ist, so ist die quasistatische Grundbewegung stabil. Die Anwendung dieses Kriteriums ist aber meist nicht unmittelbar möglich, weil die Einführung der kanonischen Koordinaten Q_i, P_i praktisch undurchführbar ist. Nun kann aber eine quadratische Form ihren positiv definiten Charakters nicht verlieren, wenn man durch eine linear homogene Transformation voneinander unabhängige neue Veränderliche einführt. Nun sind vermöge der Berührungstransformation die $2n - 2\mu$ Größen Q_i, P_i Funktionen der $2n$ ursprünglichen Zustandsgrößen $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Daher sind die $\Delta Q_i, \Delta P_i$, wenn man nur Größen erster Ordnung berücksichtigt, lineare Funktionen der $\Delta q_i, \Delta p_i$, z. B.

$$\Delta Q_i = \sum_k \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \Delta p_k \Big),$$

wobei $\Delta q_k, \Delta p_k$ wieder die Abweichungen der Koordinaten der gestörten Bewegung von denen der Grundbewegung bedeuten. Die $2n$ Größen

$\Delta q_i, \Delta p_i$ sind aber nicht voneinander unabhängig; es bestehen zwischen ihnen wegen der Gl. (1), wenn man nur die Glieder erster Ordnung beibehält, die μ linear homogenen Relationen

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial f_j}{\partial p_i}\Delta p_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Vermöge dieser Beziehungen lassen sich μ unter den $\Delta q_i, \Delta p_i$ eliminieren, und das ΔH der Gl. (3) geht in eine quadratische Form von $2n - \mu$ Variablen, z. B. $\Delta q_1, \ldots, \Delta q_n, \Delta p_1, \ldots, \Delta p_{n-\mu}$ über, deren Koeffizienten allerdings nicht mehr Konstante sind, sondern im allgemeinen von der Zeit abhängen, weil in den Koeffizienten der Δq_i, Δp_i für die q_i, p_i ihre Werte bei der quasistatischen Grundbewegung einzusetzen sind, $q_i = \bar{q}_i(t)$, $p_i = \bar{p}_i(t)$. die im allgemeinen von der Zeit abhängen. Wenn diese Form positiv oder negativ definit ist, so ist die Grundbewegung stabil gegenüber den Störungen, die den Gl. (1) genügen.

Wenn wir als Grundbewegung insbesondere eine Gleichgewichtslage wählen, die durch die Werte

$$\bar{p}_i = 0, \qquad \overline{\frac{\partial H}{\partial q_i}} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, und wir die Stabilität gegenüber beliebigen Störungen untersuchen, so müssen wir beachten, daß H nach I, § 2, (53) für diese Werte niemals ein Maximum sein kann, da der erste Teil, die kinetische Energie, für $p_i = 0$ jedenfalls ein Minimum besitzt. Wenn H also im ganzen ein Minimum besitzen soll, so muß V für die Gleichgewichtslage ein Minimum sein. Wir erhalten so das bekannte klassische Dirichletsche Kriterium für die Stabilität einer Gleichgewichtslage: die potentielle Energie muß dort einen wirklichen Minimalwert haben.

3. Beispiele. Wir betrachten wieder die Zentralbewegung in Polarkoordinaten r, φ und den entsprechenden Impulskomponenten p, u. Die Hamiltonsche Funktion ist nach § 1, **1**

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + \frac{u^2}{r^2}\right) - MmF(r), \tag{4}$$

wo $-MmF(r)$ die potentielle Energie, also $MmF'(r) = Mmf(r)$ die anziehende Kraft ist. Da nur r wahrnehmbare Koordinate ist, ergibt sich die quasistatische Bewegung aus $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial r} = 0$ bei festgehaltenem $u = \alpha$ als: $\bar{p} = 0$, $r = \bar{r}$, wo $\bar{r}$ sich aus der Beziehung $Mm^2\bar{r}^3 f(\bar{r}) = -\alpha^2$ ergibt. Wenn wir nun H um die Stelle $p = \bar{p} = 0$,

$r = \bar{r}$ nach den Zuwächsen $\Delta p, \Delta r$ entwickeln und dabei $u = \alpha$ festhalten, ergibt sich:

$$\Delta H = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)_{r=\bar{r}}(\Delta r)^2.$$

Nun ist $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = \frac{3\alpha^2}{m r^4} - M m f'(r)$. Wenn wir hierin $r = \bar{r}$ setzen und auch α^2 durch $\bar{r}$ ausdrücken, erhalten wir schließlich

$$\Delta H = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 - \frac{Mm}{\bar{r}}[3 f(\bar{r}) + \bar{r} f'(\bar{r})](\Delta r)^2. \tag{5}$$

Das ist eine quadratische Form in $\Delta p, \Delta r$, die niemals negativ definit sein kann, und nur positiv definit ist, wenn

$$3 f(\bar{r}) + \bar{r} f'(\bar{r}) < 0. \tag{6}$$

Wenn das Kraftgesetz so beschaffen ist, daß die Gl. (6) identisch in $\bar{r}$ erfüllt ist, so ist jede gleichförmige Kreisbewegung stabil gegenüber Störungen, die u unverändert lassen. Ist insbesondere $f(r) = -r^n$, so folgt aus (6)

$$n + 3 > 0, \tag{7}$$

d. h. die Kreisbewegung ist stabil für $n > -3$, z. B. für das Newtonsche Gesetz $n = -2$.

Weitere Beispiele s. III, § 2, 3 und V, § 3, 3.

§ 3. Kleine Schwingungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage oder beständige Bewegung.

1. Herleitung und Gestalt der Differentialgleichungen. Wir betrachten ein System von n Freiheitsgraden, dessen Lagen durch n Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ relativ zu einem Inertialsystem festgelegt sei. Es sei ferner

$$x = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen; diese setzen wir als „Grundbewegung" an. Wir führen dann n neue Koordinaten ein, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, die wir als „relative Koordinaten in bezug auf die genannte Grundbewegung" bezeichnen; sie seien durch

$$x_i = \bar{q}_i(t) + q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

mit den x_i verknüpft und stellen die Abweichung einer beliebigen Lage von einer Lage der Grundbewegung zu irgend einer Zeit t dar. Da die Transformationsgleichungen (1) die Zeit t explizite enthalten, sind die Bewegungsgleichungen in den relativen Koordinaten q_i von der Gestalt I, § 2, (11). Sie sind noch dadurch spezialisiert, daß nach (1) die Grundbewegung $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine Lösung sein muß. Wenn wir durch Überstreichen einer Funktion der q_i und t immer ihren Wert für die Grundbewegung $q_i = 0$ andeuten, ist dazu not-

wendig und hinreichend, daß $\bar{Q}_j = -\frac{\overline{\partial a}}{\partial q_j}$. Wenn wir Bewegungen in der Nähe der Grundbewegung untersuchen, so können wir sie annähernd durch Differentialgleichungen darstellen, die wir aus den genannten erhalten, indem wir alle Glieder nach Potenzen der q_i und $\dot{q}_i$ entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung beibehalten. Wenn wir

$$a = a + \sum_j \frac{\overline{\partial a}}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2} \sum_{jk} \left(\frac{\overline{\partial^2 a}}{\partial q_j \partial q_k} q_j q_k + \cdots \right) + \cdots,$$

$$Q_j = \bar{Q}_j + \sum_k \left(\frac{\overline{\partial Q_j}}{\partial q_k} q_k + \frac{\overline{\partial Q_j}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \cdots$$

setzen, lauten die Gleichungen I, § 2, (11) mit den genannten Vernachlässigungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_k \bar{a}_{jk} \ddot{q}_k + \sum_k \overline{w}_{kj} \dot{q}_k - \sum_k \frac{\overline{\partial^2 a}}{\partial q_j \partial q_k} q_k \\ \qquad = \sum_k \frac{\overline{\partial Q_j}}{\partial q_k} q_k + \sum_k \frac{\overline{\partial Q_j}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Die überstrichenen Größen sind dabei im allgemeinen Funktionen der Zeit. Setzen wir

$$(3) \quad l_{jk} = \bar{a}_{jk}, \qquad r_{jk} = \overline{w}_{jk} - \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial \dot{q}_k}, \qquad p_{jk} = -\frac{\overline{\partial^2 a}}{\partial q \; \partial q_k} - \frac{\overline{\partial Q_j}}{\partial q_k},$$

so lauten die Differentialgleichungen (2) einer zur Grundbewegung $q_i = 0$ benachbarten Bewegung:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} (l_{jk} \ddot{q}_k + r_{jk} \dot{q}_k + p_{jk} q_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Es sind n homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die n relativen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$, deren Koeffizienten im allgemeinen Funktionen der Zeit sind. Wenn die Zeit t aus ihnen herausfällt, sie also Konstante werden, nennt man die Gl. (4) die „Differentialgleichung der kleinen Schwingungen“. So werden die Koeffizienten in Gl. (4) sicher konstant, wenn die Grundbewegung eine quasistatische ist und die q_i solche Koordinaten, daß ein Teil „verborgene“ Koordinaten sind, während die übrigen bei der Grundbewegung konstant sind[1]). Wenn die Kräfte Q_i keine Reibungskräfte enthalten, so sind sie von den $\dot{q}_i$ unabhängig; es ist $\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} = 0$ und es ist wegen I, § 2, (12)

[1]) Wenn die Differentialgleichungen der einer Bewegung „benachbarten“ Bewegung die Gestalt (4) mit konstanten Koeffizienten haben, nennt man die Grundbewegung eine „permanente“ oder „beständige“ Bewegung in bezug auf die verwendeten Koordinaten. In einer auf Anregung von R. v. Mises 1913 veröffentlichten Straßburger Dissertation führt G. Dorner den noch allgemeineren Begriff einer „quasi-beständigen“ Bewegung ein. Von ihr spricht er dann, wenn die

$r_{jk} = -r_{kj}$; ferner ist jedenfalls $l_{jk} = l_{kj}$, und wenn die Kräfte von einem Potential V abhängen, also $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ist, auch $p_{jk} = p_{kj}$. Wenn die Grundbewegung eine Gleichgewichtslage ist, so sind die q_i auch Koordinaten im Inertialsystem, und es ist auch $w_{kj} = 0$, $a = 0$, also $r_{jk} = 0$.

In jedem konkreten Falle wird man die Gleichungen (4) am einfachsten folgendermaßen herleiten: entweder geht man von den Bewegungsgleichungen in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ aus, also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

führt in ihnen nach Gl. (1) die q_i ein, entwickelt nach Potenzen der q_i und $\dot{q}_i$ und behält nur die Glieder erster Ordnung bei. Oder man kann auch die Substitution (1) in L selbst vornehmen, nach Potenzen der q_i und $\dot{q}_i$ entwickeln und nur die Glieder zweiter Ordnung beibehalten. Mit dieser quadratischen Form als Lagrangescher Funktion sind dann die Bewegungsgleichungen zu bilden. Die Glieder nullter und erster Ordnung in den $q_i, \dot{q}_i$ fallen ja bei der Bildung der in den Bewegungsgleichungen auftretenden Ableitungen von L teils fort, teils müssen sie verschwinden, wenn $q_i = 0$ eine Lösung sein soll.

Als Beispiel betrachten wir wieder die Zentralbewegung in Polarkoordinaten. Nach § 1, **1** ist hier $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - M m F(r)$. Gehen wir von der quasistatischen Grundbewegung $r = \bar{r}$, $\bar{\varphi} = \frac{\alpha}{m\bar{r}^2}t + \beta$ aus (§ 1, **2**), setzen $r = \bar{r} + \varrho$, $\varphi = \bar{\varphi} + \sigma$, entwickeln L nach Potenzen von ϱ, σ und behalten nur die Glieder zweiter Ordnung bei, so wird wegen $\alpha^2 = M m^2 \bar{r}^3 f(\bar{r})$

$$(5) \qquad L = \frac{m}{2}\left[\dot{\varrho}^2 + \bar{r}^2\dot{\sigma}^2 + 4\sqrt{\bar{r}M f(\bar{r})}\,\varrho\,\dot{\sigma} + \left(\frac{f(\bar{r})}{\bar{r}} - f'(\bar{r})\right)M\varrho^2\right].$$

Bilden wir die ϱ und σ entsprechenden Bewegungsgleichungen, so lauten sie

$$(6) \qquad \begin{cases} \ddot{\varrho} + M\left(f'(\bar{r}) - \frac{f(\bar{r})}{\bar{r}}\right)\varrho - 2\sqrt{\bar{r}Mf(\bar{r})}\,\dot{\sigma} = 0, \\ \bar{r}^2\ddot{\sigma} + 2\sqrt{\bar{r}Mf(\bar{r})}\,\dot{\varrho} \qquad\qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

sind also von der Gestalt (4).

Koeffizienten von (4) periodische Funktionen der Zeit sind. Nach dem Obigen ist klar, daß die quasistatischen Bewegungen unter die beständigen gehören. Der letztere Begriff ist schon deshalb allgemeiner, weil er auch auf Bewegungen unter dem Einfluß von Reibungskräften anwendbar ist.

2. Integration der Differentialgleichungen der freien Schwingungen. Man nennt die den Gl. (4) genügenden Bewegungen „freie“ Schwingungen um die Grundbewegung, weil keine anderen Kräfte als bei der Grundbewegung wirksam sind. Ihre Integration erfolgt nach der Bd. 1, VI, § 5, insbesondere **4** auseinandergesetzten Theorie der Systeme von n linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir machen wie dort den Ansatz:

$$q_k = A_k e^{\lambda t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Dann ergibt sich durch Einsetzen in (4), daß die Konstanten A_k Lösungen der n linear homogenen Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} (l_{jk}\lambda^2 + r_{jk}\lambda + p_{jk}) A_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

sein müssen, die nur dann nicht verschwindende Lösungen haben, wenn λ eine Lösung der algebraischen Gleichung $2n$-ter Ordnung $D(\lambda) = 0$ ist, wo

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} l_{11}\lambda^2 + r_{11}\lambda + p_{11}, & l_{12}\lambda^2 + r_{12}\lambda + p_{12}, \ldots & l_{1n}\lambda^2 + r_{1n}\lambda + p_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_{n1}\lambda^2 + r_{n1}\lambda + p_{n1}, & l_{n2}\lambda^2 + r_{n2}\lambda + p_{n2}, \ldots & l_{nn}\lambda^2 + r_{nn}\lambda + p_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Wenn $\lambda = \lambda_\alpha$ eine einfache Wurzel von $D(\lambda) = 0$ ist, so gibt es bis auf einen gemeinsamen Faktor C_α nur ein einziges Lösungssystem $A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_n^{(\alpha)}$ der Gl. (8) mit $\lambda = \lambda_\alpha$. Hat also $D(\lambda) = 0$ lauter einfache Wurzeln, also im ganzen $2n$, so gibt es nach (7) auch $2n$ verschiedene unabhängige Lösungssysteme der Gl. (4), nämlich

$$q_k^{(\alpha)} = C_\alpha A_k^{(\alpha)} e^{\lambda_\alpha t} \qquad \begin{matrix} (k = 1, 2, \ldots, n) \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n). \end{matrix} \tag{10}$$

Dabei sind die C_α willkürliche Konstante. Durch Summation der $2n$ Lösungen (10) nach α ergibt sich daher die allgemeinste Lösung.

Wenn hingegen $\lambda = \lambda_\alpha$ eine mehrfache Wurzel, etwa eine m_α-fache ist, so kommt es darauf an, wie sich die Unterdeterminanten von $D(\lambda)$ für $\lambda = \lambda_\alpha$ verhalten. Wenn nämlich auch die Unterdeterminanten von $n-1, n-2, \ldots$ Zeilen verschwinden und erst von denen mit $n - m_\alpha$ Zeilen eine von Null verschiedene ist, also die Determinante $D(\lambda_\alpha)$ vom Range $n - m_\alpha$ ist, so haben nach Bd. 1, II, § 1, **5** die linearen Gleichungen (8) für $\lambda = \lambda_\alpha$ nicht nur ein, sondern m_α unabhängige Lösungssysteme der Gestalt (10), die also dasselbe λ_α, aber verschiedene Koeffizientensysteme $A_k^{(\alpha)}$ besitzen. Wenn hingegen nicht alle Unterdeterminanten mit mehr als $n - m_\alpha$ Zeilen verschwinden, also $D(\lambda_\alpha)$ einen höheren Rang als $n - m_\alpha$ hat, so treten außer den Lösungen der Gestalt (10) noch andere der Gestalt

$$q_k^{(\alpha)} = (B_{k1} + B_{k2} t + \cdots B_{k m_\alpha} t^{m_\alpha - 1}) e^{\lambda_\alpha t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

auf, wo die $B_{k1}, \ldots, B_{km_\alpha}$ wieder bestimmte Koeffizienten sind (s. 1. Bd., VI, § 5, 2).

Die $A_k^{(\alpha)}$ und λ_α in den Gl. (10), die $B_{k1}, \ldots$ in den Gl. (11) werden im allgemeinen nicht reell sein. Man kann aber aus den Gl. (10) (s. 1. Bd., VI, § 5, 3) $2n$ reelle Lösungssysteme herleiten. Wir zerlegen die λ_α und $A_k^{(\alpha)}$ in reellen und imaginären Teil, d. h. setzen:

$$\lambda_\alpha = \varrho_\alpha + i\sigma_\alpha, \quad A_k^{(\alpha)} = a_k^{(\alpha)} e^{i\delta_\alpha}. \tag{12}$$

Da $D(\lambda) = 0$ eine Gleichung mit reellen Koeffizienten ist, so lassen sich die Wurzeln λ_α in Paare von konjugiert komplexen zusammenfassen, und zur konjugierten Wurzel von λ_α gehört auch ein zu $A_k^{(\alpha)}$ konjugiert komplexes Lösungssystem der Gl. (8).

Die $2n$ Lösungssysteme (10) ordnen sich also in Paare, und aus jedem Paare läßt sich durch Addition bzw. Subtraktion ein Paar reeller Lösungssysteme herleiten, nämlich

$$\begin{cases} q_k^{(\alpha)} = c_\alpha a_k^{(\alpha)} e^{\varrho_\alpha t} \cos(\sigma_\alpha t + \delta_\alpha), & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ q_k^{(n+\alpha)} = c_{n+\alpha} a_k^{(\alpha)} e^{\varrho_\alpha t} \sin(\sigma_\alpha t + \delta_\alpha) & (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{13}$$

Dabei sind die $c_1, \ldots, c_{2n}$ willkürliche reelle Konstante. Durch Summierung über α ergibt sich daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (8). Dieselbe läßt sich aber offenbar aus den folgenden $2n$ partikulären Lösungen aufbauen:

$$q_k^{(\alpha)} = D_\alpha a_k^{(\alpha)} e^{\varrho_\alpha t} \cos\sigma_\alpha t, \quad q_k^{(n+\alpha)} = E_\alpha a_k^{(\alpha)} e^{\varrho_\alpha t} \sin\sigma_\alpha t \quad \begin{matrix}(k=1,2,\ldots,n)\\(\alpha=1,2,\ldots,n)\end{matrix} \tag{14}$$

Man braucht dabei nur statt der $c_1, \ldots, c_{2n}$ die $2n$ neuen Konstanten $D_1, \ldots, D_n, E_1, \ldots, E_n$ folgendermaßen einzuführen:

$$D_\alpha = c_\alpha \cos\delta_\alpha + c_{n+\alpha} \sin\delta_\alpha, \quad E_\alpha = -c_\alpha \sin\delta_\alpha + c_{n+\alpha} \cos\delta_\alpha. \tag{15}$$

Der allgemeine Verlauf der durch die Gl. (13) und (14) dargestellten Bewegungen ergibt sich aus der im 1. Bd., VI, § 5, 3 durchgeführten Diskussion: für reelles λ_α (also $\sigma_\alpha = 0$) ergibt sich eine unperiodische Bewegung, die sich für positives ϱ_α mit der Zeit immer mehr von der Grundbewegung entfernt, für negatives ϱ_α sich asymptotisch der Grundbewegung $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$ nähert. Für rein imaginäres λ_α (also $\varrho_\alpha = 0$) gibt Gl. (14) für jedes α eine periodische Schwingung mit der Frequenz σ_α (in 2π Zeiteinheiten) um die Grundbewegung. Für allgemeines komplexes λ_α mit negativem Realteil $\varrho_\alpha = -d_\alpha$ haben wir eine Schwingung mit abnehmender Amplitude vor uns, wobei d_α das logarithmische Dekrement, e^{-d_α} der Dämpfungsfaktor heißen. Bei positivem Realteil nehmen die Amplituden immer zu; wir haben also keine Bewegung vor uns, die in der Nachbarschaft der Grundbewegung bleibt. Da in diesem Falle aber die höheren Potenzen der q_i und $\dot{q}_i$ auch nicht vernachlässigt werden dürfen, wie es bei Herleitung der

Gl. (4) vorausgesetzt wurde, stellen die Lösungen der Gl. (4), bei denen $\varrho_\alpha > 0$ ist, überhaupt keine angenäherten Lösungen der ursprünglichen Bewegungsgleichungen dar.

Jede für einen speziellen Wert des Index α in (14) enthaltene partikuläre Lösung stellt eine Schwingung dar, bei der die n Koordinaten q_i periodische Schwankungen mit gleicher Frequenz σ_α und von gleicher Phase (z. B. verschwinden alle zu gleicher Zeit) durchmachen. Nur ihre Amplituden sind verschieden, stehen aber in bestimmten Verhältnissen. Eine solche Schwingung des Systems heißt eine freie „Hauptschwingung“ oder „Eigenschwingung“ und die Frequenzen σ_α die „Eigenfrequenzen“. Wenn also $D(\lambda) = 0$ lauter einfache, nicht reelle Wurzeln hat, also $2n$ verschiedene, so hat das System n verschiedene Eigenfrequenzen (weil zu jedem λ_α und seinem konjugiert komplexen dasselbe σ_α gehört). Zu jeder Eigenfrequenz gehören aber nach Gl. (13) oder (14) zwei Hauptschwingungen mit gleichem Amplitudenverhältnis, aber mit einer Phasenverschiebung um $\pi/2$. Wenn unter den Wurzeln 2ν reelle sind, so gehören zu den $2n - 2\nu$ komplexen oder rein imaginären wieder $n - \nu$ Eigenfrequenzen und $2n - 2\nu$ Hauptschwingungen, zu den 2ν reellen gehören aber 2ν verschiedene unperiodische Bewegungen mit im allgemeinen auch 2ν verschiedenen Amplitudenverhältnissen.

Wenn λ_α eine m_α-fache komplexe Wurzel ist, und $D(\lambda_\alpha)$ vom Range $n - m_\alpha$, so gehören zur Frequenz σ_α nicht zwei, sondern $2m_\alpha$ Hauptschwingungen, von denen immer je zwei sich nur in der Phase unterscheiden. Ist der Rang von $D(\lambda_\alpha)$ höher als $n - m_\alpha$, so gehören zu λ_α noch andere Lösungen als Hauptschwingungen, nämlich reelle Lösungen, die sich aus (11) durch geeignete Kombination oder durch Zerlegung in reellen und imaginären Teil ergeben, sie sind wegen (12) von der Gestalt

$$(16)\quad q_k = (b_{k1} + b_{k2}t + \ldots + b_{km_\alpha}t^{m_\alpha - 1})e^{\varrho_\alpha t}\cos(\sigma_\alpha t + \delta_\alpha)\,(k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $b_{k1}, \ldots$ reell sind. Es sind dies auch Schwingungen der Frequenz σ_α, aber mit einer von der Zeit abhängigen Amplitude, die für negatives ϱ_α mit der Zeit asymptotisch gegen Null geht, aber schon für verschwindendes ϱ_α (also rein imaginäres λ_α) mit der Zeit ins Unendliche wächst.

3. Spezielle schwingende Systeme. Schwingungen um Gleichgewichtslagen. Wir nehmen nun insbesondere an, daß die Q_i von einem Potential V abhängen, das nur Funktion der $q_1, \ldots, q_n$ ist, daß also $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j}$. Dann ist mit der in Gl. (8) beibehaltenen Annäherung

$$(17)\qquad V = \frac{1}{2}\sum_{j,k} p_{jk}q_j q_k,$$

wo die $p_{jk} = p_{kj}$ Konstante sind. Wenn wir weiter annehmen, daß die Grundbewegung eine Ruhelage, also Gleichgewichtslage ist, so sind alle $r_{jk} = 0$ und die Gleichung (4) lautet einfach:

$$\sum_k (l_{jk}\ddot{q}_k + p_{jk}q_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei wegen (3)

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j,k} l_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{18}$$

die kinetische Energie in der verwendeten Annäherung darstellt. Die kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage lassen sich also als Lagrangesche Gleichungen auffassen, die zur Lagrangeschen Funktion $L = K - V$ gehören, wo K und V durch die quadratischen Formen (17) und (18) gegeben sind. Die entsprechende charakteristische Gl. (9) ist dann eine Gleichung n-ten Grades in λ^2, die sich leicht auf die im 1. Bd. II, § 2, 3 behandelte Sekulargleichung zurückführen läßt. Man kann ja immer eine lineare homogene Transformation der q_i mit konstanten Koeffizienten angeben (aus der dieselbe Transformation für die $\dot{q}_i$ folgt), vermöge deren K in eine Summe von Quadraten übergeht, da ja die kinetische Energie eine positiv definite quadratische Form ist. Mögen die neu eingeführten Koordinaten q_i^* heißen, so lautet in ihnen

$$K = \frac{1}{2}\sum_i (\dot{q}_i^*)^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum_{jk} p_{jk}^* q_j^* q_k^*.$$

Die Bewegungsgleichungen (4) lauten dann:

$$\ddot{q}_j^* + \sum_k p_{jk}^* q_k^* = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

und daher die Gl. (9)

$$\begin{vmatrix} p_{11}^* + \lambda^2, & p_{12}^*, & \ldots, & p_{1n}^* \\ p_{21}^*, & p_{22}^* + \lambda^2, & \ldots, & p_{2n}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}^*, & \ldots & \ldots & p_{nn}^* + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Das ist aber wegen $p_{jk}^* = p_{kj}^*$ eine Sekulargleichung für λ^2. Sie hat also nach 1. Bd., II, § 2, 3 lauter reelle Wurzeln. Daher sind die Wurzelwerte λ_α für alle λ entweder reell (für $\lambda^2 > 0$) oder rein imaginär (für $\lambda^2 < 0$). Es entstehen also entweder unperiodische Bewegungen oder ungedämpfte Schwingungen. Nach 1. Bd., II, § 2, 5 kann man, weil K positiv definit ist, auch eine solche lineare Transformation der q_i ausführen, daß beide Formen (K und V) sich auf Summen von Quadraten reduzieren, wobei allerdings nur bei einer (etwa K) alle Koeffizienten zu 1 gemacht werden können. Die so eingeführten Koordinaten mögen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ heißen. Es wird

$$K = \frac{1}{2}\sum_j \dot{y}_j^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum_j k_j y_j^2,$$

wo die k_j positive und negative Konstante sind. Die Bewegungsgleichungen lauten dann $\ddot{y}_j + k_j y_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Die charakteristische Gleichung wird:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 + k_1, & 0, \ldots, & 0 \\ 0 \ldots, & \lambda^2 + k_2, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \\ 0, \ldots, & 0, \ldots, & \lambda^2 + k_n \end{vmatrix} = (\lambda^2 + k_1)(\lambda^2 + k_2) \ldots (\lambda^2 + k_n) = 0.$$

Hier ist evident, daß die Wurzeln $\lambda_\alpha = +\sqrt{-k_\alpha}$, $\lambda_{\alpha+n} = -\sqrt{-k_\alpha}$ lauten und reell oder rein imaginär ausfallen, je nachdem die k_α negativ oder positiv sind. Wenn insbesondere auch V positiv definit ist, so sind alle k_j positiv und alle λ_α rein imaginär. Das ergibt wieder den Satz, daß um jede Gleichgewichtslage, für die (weil für sie $V = 0$ ist) V ein Minimum ist, nur kleine periodische Schwingungen stattfinden können, sie also stabil ist. Setzen wir wieder $\lambda_\alpha = i\sigma_\alpha$, so wird $\sigma_\alpha = k_\alpha$, also lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen in den Koordinaten y_j einfach: $y_j = D_j \cos \sigma_j t + E_j \sin \sigma_j t$, wo D_j, E_j willkürliche Konstante bedeuten. Zur Frequenz σ_j gehören also die beiden Hauptschwingungen:

$$(21) \quad \begin{cases} y_1 = \cdots y_{j-1} = y_{j+1} = \cdots y_n = 0, \\ y_j = D_j \cos \sigma_j t, \quad (\text{bzw. } E_j \sin \sigma_j t). \end{cases}$$

Eine Hauptschwingung ist also dadurch gekennzeichnet, daß sich nur eine Koordinate ändert, die andern aber konstant bleiben. Solche Koordinaten $y_1 \ldots y_n$ heißen daher „Hauptkoordinaten".

Wenn mehrere k_j zusammenfallen, so hat Gl. (20) mehrfache Wurzeln. Wenn z. B. $k_1 = k_2$, so entsteht eine Doppelwurzel; gleichzeitig aber reduziert sich der Rang der Determinante (20) auf $n - 2$, weil alle $n - 1$-reihigen Unterdeterminanten dann für $\lambda^2 = -k_1 = -k_2$ verschwinden. Zu den entsprechenden $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ gehören dann vier Hauptschwingungen (anstatt zwei), nämlich

$$y_1 = D_1 \cos \sigma t, \qquad (\text{bzw. } y_1 = E_1 \sin \sigma t),\ y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$$
$$\text{und } y_1 = 0,\ y_2 = D_2 \cos \sigma t, \ (\text{bzw. } y_2 = E_2 \sin \sigma t),\ y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0,$$

wo D_1, E_1, D_2, E_2 willkürliche Konstante sind. Dasselbe gilt bei mehrfachen Wurzeln, die also beim Problem der Schwingungen um Gleichgewichtslagen beim Fehlen von Reibungskräften nie Bewegungen nach Gl. (16) zur Folge haben.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Schwingungen eines Systems von einem Freiheitsgrad. Die Gl. (4) reduzieren sich dann einfach auf

$$(22) \qquad l\ddot{q} + r\dot{q} + pq = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist dann $l\lambda^2 + r\lambda + p = 0$; daher ihre Wurzeln $\lambda = -\frac{r}{2l} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4l^2} - \frac{p}{l}}$. Im Falle starker Dämpfung $r^2 > 4pl$ sind beide Wurzeln reell. Wir betrachten ausführlicher nur den Fall kleiner Dämpfung, also $r^2 < 4p$, wo die Bewegung oszillatorisch wird. Mit der Bezeichnung von Gl. (12) wird dann $\lambda_1 = \varrho + i\sigma$, $\lambda_2 = \varrho - i\sigma$, wobei

$$\varrho = -\frac{r}{2l}, \quad \sigma = \frac{1}{2l}\sqrt{4pl - r^2}. \tag{23}$$

Die beiden Hauptschwingungen lauten dann nach (14)

$$q = D e^{\varrho t} \cos \sigma t, \quad q = E e^{\varrho t} \sin \sigma t. \tag{24}$$

Bei positivem r und l ist $\varrho < 0$, also liegt eine gedämpfte Schwingung vor. Für $r = 0$ geht daraus die ungedämpfte Schwingung hervor, ihre Frequenz ist $\sigma_0 = \sqrt{\frac{p}{l}}$; daher besteht zwischen σ und σ_0 die Beziehung

$$\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 - \frac{r^2}{4l^2}}. \tag{25}$$

Die Frequenz wird also durch die Dämpfung nur um kleine Größen zweiter Ordnung in der Kostanten r/l verändert. Betrachten wir insbesondere die ungedämpfte Schwingung ($\varrho = r = 0$), so lautet die allgemeine Lösung nach (24)

$$q = D \cos \sigma_0 t + E \sin \sigma_0 t. \tag{26}$$

Die Konstanten D, E kann man z. B. bestimmen, wenn für $t = 0$ die Anfangslage $q = q^*$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q} = u^*$ vorgeschrieben ist. Man erhält dann aus (26)

$$q = q^* \cos \sigma_0 t + \frac{u^*}{\sigma_0} \sin \sigma_0 t. \tag{27}$$

Führen wir an Stelle von D und E andere Konstante A und δ ein durch $D = A \cos \delta$, $E = A \sin \delta$, so lautet (26) auch

$$q = A \cos(\sigma_0 t - \delta). \tag{28}$$

Die Gesamtenergie einer ungedämpften Schwingung lautet: $\frac{l}{2}\dot{q}^2 + \frac{p}{2}q^2$. Führen wir q und $\dot{q}$ ihren Wert aus (28) ein und bilden den zeitlichen Mittelwert, indem wir nach t über eine volle Periode von $t = 0$ bis $t = \frac{2\pi}{\sigma_0}$ integrieren und durch die Periode $\frac{2\pi}{\sigma_0}$ dividieren, so erhalten wir für die mittlere Schwingungsenergie oder Schwingungsintensität J:

$$J = \frac{1}{2} l \sigma_0^2 A^2. \tag{29}$$

§ 4. Erzwungene Schwingungen.

1. Allgemeine Integration der Differentialgleichungen. Während bei den in § 3 behandelten „freien" Schwingungen ein mechanisches System durch eine Störung der Anfangsbedingungen aus seiner Grundbewegung gebracht und dann seinen inneren Kräften überlassen wurde, betrachten wir jetzt eine Störung der Grundbewegung, die durch äußere Kräfte hervorgebracht wird, die als Funktionen der Zeit gegeben sind. Wenn wir uns wieder auf kleine Abweichungen von der Grundbewegung beschränken, so treten an Stelle der Gleichungen § 3, (4) jetzt

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (l_{jk}\ddot{q}_k + r_{jk}\dot{q}_k + p_{jk}q_k) = f_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $f_j(t)$ gegebene Funktionen von t sind. Die Gl. (1) nennt man die Differentialgleichungen der „erzwungenen Schwingungen". Es sind inhomogene lineare Differentialgleichungen. Man erhält die allgemeine Lösung der Gl. (1), wenn man zu einer partikulären Lösung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen § 3, (4) addiert. Da diese in § 3 gefunden wurden, brauchen wir hier nur eine partikuläre Lösung von (1) zu suchen. Wir wollen das allgemein für den Fall durchführen, daß die Kräfte die reellen Teile von Exponentialfunktionen der Zeit sind, von Ausdrücken der Gestalt

$$E_j e^{\varepsilon t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei E_j und ε komplex sein können. Darin sind für rein imaginäres ε die trigonometrischen Funktionen enthalten. Wenn also die $f_j(t)$ beliebige periodische Funktionen der Zeit wären, ließen sie sich durch die Fouriersche Reihenentwicklung als Summen von trigonometrischen Funktionen darstellen und daher eine Lösung der Gl. (1) als Summe der Lösungen, die man erhält, wenn man für $f_j(t)$ ein einzelnes Glied der Entwicklung in eine trigonometrische Reihe setzt.

Man kann offenbar die gewünschte Lösung von (1) erhalten, indem man die Gleichungen

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} (l_{jk}\ddot{q}_k + r_{jk}\dot{q}_k + p_{jk}q_k) = E_j e^{\varepsilon t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

löst und das Resultat in reellen und imaginären Bestandteil spaltet. Der erstere gibt dann die gesuchte partikuläre Lösung der Gl. (1). Wir versuchen, den Gl. (2) durch den Ansatz

$$(3) \qquad q_k = A_k e^{\varepsilon t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

zu genügen; dann ergibt sich

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} d_{jk}(\varepsilon) A_k = E_j \ (j = 1, 2, \ldots, n), \quad d_{jk}(\varepsilon) = l_{jk}\varepsilon^2 + r_{jk}\varepsilon + p_{jk}.$$

Wir haben n lineare inhomogene Gleichungen für die n Unbekannten A_k vor uns. Bezeichnen wir (s. 1. Bd., II, § 1, 2) mit $D_{jk}(\varepsilon)$ die Unterdeterminante von $d_{jk}(\varepsilon)$ mit dem entsprechenden Vorzeichen, mit $D(\varepsilon)$ die Determinante der d_{jk}, so lautet die Lösung:

$$(5) \qquad A_k = \sum_{j=1}^{n} E_j \frac{D_{jk}(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

also ist nach (3) die gesuchte Lösung von (2):

$$(6) \qquad q_k = \sum_{j=1}^{n} E_j \frac{D_{jk}(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} e^{\varepsilon t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese Lösung existiert nur, wenn die Gl. (4) eine nicht verschwindende Determinante $D(\varepsilon)$ haben, d. h. wenn die charakteristische Gleichung § 3, (9) $D(\lambda) = 0$ der Differentialgleichungen der freien Schwingungen keine mit ε zusammenfallende Wurzel hat. Wenn wir nun insbesondere voraussetzen, daß die E_j reell sind und $\varepsilon = i\nu$ rein imaginär, so sind die reellen Teile der rechten Seite von Gl. (2) $E_j \cos \nu t$, und die reellen Teile der Ausdrücke (6) ergeben eine Lösung der Gl. (1) für $f_j(t) = E_j \cos \nu t$. Zerspalten wir in:

$$(7) \qquad \frac{D_{jk}(i\nu)}{D(i\nu)} = a_{jk}(\nu) e^{i\delta_{jk}(\nu)} \qquad \varepsilon = i\nu,$$

so erhalten wir aus (6) die reelle Lösung:

$$(8) \qquad q_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}(\nu) E_j \cos(\nu t + \delta_{jk}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei sind a_{jk} und δ_{jk} aus (7) berechenbare Funktionen von ν. Man nennt E_j die Amplituden, ν die Frequenz der „erregenden" Schwingung. Aus (8) folgt, daß die „erzwungene" Schwingung sich aus Schwingungen zusammensetzt, deren Frequenz mit der der erregenden Schwingung übereinstimmt, die aber Phasenverschiebungen δ_{jk} und Amplitudenänderungen a_{jk} gegenüber der erregenden Schwingung aufweisen, die von ν abhängen. Die Lösung (8) versagt im allgemeinen, wenn $\varepsilon = i\nu$ eine Wurzel $\lambda_\alpha = \varrho_\alpha + i\sigma_\alpha$ von $D(\lambda) = 0$ ist, d. h. wenn eine ungedämpfte Eigenschwingung ($\varrho_\alpha = 0$) von der Frequenz der erregenden Schwingung, also mit $\sigma_\alpha = \nu$ existiert. Da aber zu jeder Lösung von (1) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichungen § 3, (4) addiert werden kann, so kann man die Konstanten in dieser so wählen, daß die durch Summierung entstandene Lösung auch für $\nu = \sigma_\alpha$ noch endlich bleibt. Alle diese Sätze sollen im Spezialfall eines Freiheitsgrades näher ausgeführt werden.

2. Systeme von einem Freiheitsgrad. Wir betrachten den Spezialfall, in dem das System (1) nur aus einer Gleichung besteht:

$$l\ddot{q} + r\dot{q} + pq = f(t). \tag{9}$$

Wieder sei $f(t)$ der Realteil von $Ee^{\varepsilon t}$, und wir betrachten zunächst

$$l\ddot{q} + r\dot{q} + pq = Ee^{\varepsilon t}. \tag{10}$$

Hier ist einfach $D(\varepsilon) = l\varepsilon^2 + r\varepsilon + p$, und die Lösung (6) lautet hier

$$q = \frac{E}{l\varepsilon^2 + r\varepsilon + p} e^{\varepsilon t}. \tag{11}$$

Nehmen wir wieder E reell und $\varepsilon = i\nu$ rein imaginär an, so ist die erregende Schwingung durch $E\cos \nu t$ gegeben. Die erzwungene erhalten wir durch die Gl. (7) analoge Zerlegung

$$\frac{1}{-l\nu^2 + ir\nu + p} = a(\nu) e^{i\delta(\nu)}. \tag{12}$$

Durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Ausdruck auf beiden Seiten und Ziehen der Quadratwurzel erhalten wir

$$a(\nu) = \frac{1}{\sqrt{(p - l\nu^2)^2 + r^2\nu^2}}. \tag{13}$$

Durch Multiplikation der linken Seite von (12) mit dem konjugiert komplexen Ausdruck $-l\nu^2 - ir\nu + p$ im Zähler und Nenner und Zerlegung beider Seiten in reellen und imaginären Bestandteil sowie Division des imaginären durch den reellen erhält man

$$\operatorname{tang} \delta(\nu) = \frac{r\nu}{l\nu^2 - p}. \tag{14}$$

Die reelle Lösung von (9) mit $f(t) = E\cos \nu t$ lautet denn nach (11) und (12)

$$q = a(\nu) E \cos(\nu t + \delta), \tag{15}$$

wo $a(\nu)$ und $\delta(\nu)$ die durch (13) und (14) gegebenen Funktionen von ν sind.

Die mittlere kinetische Energie der erzwungenen Schwingung berechnen wir ganz analog zu § 3, (29) als Zeitmittel von $l/2\,\dot{q}^2$ mit dem q von Gl. (15). Wir erhalten so die „Intensität des Mitschwingens“ $J(\nu)$:

$$J(\nu) = \frac{l}{4} a^2(\nu) E^2 \nu^2. \tag{16}$$

Aus Gl. (13) läßt sich der Verlauf der Funktion $J(\nu)$ berechnen. Ihre darstellende Kurve, die „Resonanzkurve“, hat ihr Maximum für $\nu = \sigma_0$,

die „Resonanzfrequenz“. Die entsprechende „Resonanzintensität“ hat nach (13) und (16) unter Beachtung von $p = l\sigma_0^2$ den Wert

$$J(\sigma_0) = \frac{lE^2}{4r^2}. \tag{17}$$

Aus (17) und (16) erhalten wir, wenn in (13) $l = \frac{p}{\sigma_0^2}$ gesetzt wird,

$$\frac{J(\nu)}{J(\sigma_0)} = a^2(\nu)\nu^2 r^2 = \frac{1}{1 + \frac{p^2}{r^2\sigma_0^2}\left(\frac{\sigma_0}{\nu} - \frac{\nu}{\sigma_0}\right)^2}. \tag{18}$$

Das Verhältnis der Intensität des Mitschwingens zur maximal erreichten hängt also nur vom „akustischen Intervall“ ν/σ_0 zwischen Erregungsfrequenz ν und Eigenfrequenz σ_0 des Systems ab. Der Abfall vom Maximalwert ist um so schroffer, die Resonanz ist um so schärfer, je größer p^2/r^2, d. h. je kleiner die Dämpfung des Systems ist. Für verschwindende Dämpfung ($r = 0$) wäre der Bruch in (18) Null, d. h. die Resonanz wäre vollkommen scharf. Das kommt aber daher, daß dann nach (17) die Resonanzintensität unendlich wird und die Lösung (15) für $\nu = \sigma_0$ und $r = 0$ nicht mehr existiert. Doch läßt sich auch im Falle der Resonanz bei ungedämpften Schwingungen eine Lösung angeben, wenn man bedenkt, daß man von jeder Lösung von (10) eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung abziehen kann und wieder eine Lösung von (10) erhält. Wir setzen also $\varepsilon = i\sigma_0 + h$, $r = 0$; dann lautet (11)

$$q = \frac{E e^{(i\sigma_0 + h)t}}{D(i\sigma_0 + h)}. \tag{19}$$

Da σ_0 die Eigenfrequenz der freien Schwingungen ist, haben wir $D(i\sigma_0) = 0$. Wir setzen es etwa als eine einfache Nullstelle voraus; dann ist $D'(i\sigma_0) \neq 0$. Wenn wir aus (19)

$$q^* = \frac{E e^{(i\sigma_0 + h)t} - E e^{i\sigma_0 t}}{D(i\sigma_0 + h)} \tag{20}$$

bilden, so haben wir nur eine Lösung der homogenen Gleichung, der „freien“ Schwingungen, subtrahiert. Entwickeln wir Zähler und Nenner in (20) nach Potenzen von h und lassen h gegen Null gehen, so erhalten wir

$$q^* = \frac{E t e^{i\sigma_0 t}}{D'(i\sigma_0)}. \tag{21}$$

Wir erhalten so eine Lösung von (10) für $\varepsilon = i\sigma_0$, $r = 0$. Durch Abspaltung des Realteiles erhalten wir wegen $D'(i\sigma_0) = 2li\sigma_0$ die reelle Lösung

$$q = \frac{E}{2\sigma_0 l} t \sin \sigma_0 t. \tag{22}$$

Die Lösung der Gleichung (9) bei beliebigem $f(t)$ wollen wir nur für $r = 0$ angeben. Man kann sie aus der Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung etwa in der Form § 3, (26) durch die im 1. Bd., VI, § 2, 3 auseinandergesetzte Methode der Variation der Konstanten finden. Doch wollen wir einen mehr anschaulichen Weg (der von Thomson und Tait herrührt) einschlagen. Wir gehen von der Lösung der homogenen Gleichung in der Form § 3, (27) aus. Wenn wir in ihr jetzt unter q^*, u^* die Werte von q und $\dot{q}$ zur Zeit τ verstehen, so stellt sie den Wert von q zur Zeit t dar, wenn rechts überall anstatt t das Zeitintervall zwischen τ und t gesetzt wird. Die „freie“ Schwingung läßt sich so durch die Gleichung

$$q(t) = q(\tau)\cos\sigma_0(t-\tau) + \frac{u(\tau)}{\sigma_0}\sin\sigma_0(t-\tau) \tag{23}$$

darstellen. Wenn zur Zeit τ eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung $\Delta u(\tau)$ ohne Lagenveränderung stattfindet, so entsteht eine „freie“ Schwingung, deren Elongation sich von der früheren um $\Delta q(t) = \frac{\Delta u(\tau)}{\sigma_0}\sin\sigma_0(t-\tau)$ unterscheidet. Wenn wir uns diese Geschwindigkeitsänderung durch Einwirkung der Kräfte $f(\tau)$ während des kurzen Zeitintervalles $\Delta\tau$ hervorgerufen denken, so folgt aus Gl. (9) bei $r = 0$, wenn die Einwirkung so kurz ist, daß die Lageänderung während derselben vernachlässigt werden kann und nur die Geschwindigkeitsänderung in Betracht kommt, durch Integration (wegen $\dot{q} = u$)

$$l\Delta u = l[u(\tau+\Delta\tau) - u(\tau)] = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(\tau)\,d\tau. \tag{24}$$

Man nennt das Integral rechts im Grenzfall, wo gar keine Lageänderung im Zeitintervall $\Delta\tau$ vor sich geht, die „Stoßkraft“ im Zeitelement $\Delta\tau$.

Man kann nun die Wirksamkeit der erregenden Kraft so auffassen, daß man die ganze Zeitstrecke von 0 bis t in Zeitintervalle $\Delta\tau$ zerlegt und jedesmal eine Stoßkraft, wie sie durch die rechte Seite von (24) gegeben ist, wirken läßt und schließlich zur Grenze für kleine $\Delta\tau$ übergeht. Durch Einsetzen von Δu aus Gl. (24) in $\Delta q(t)$ und Summierung über alle Teilintervalle $\Delta\tau$ von 0 bis t erhält man beim Grenzübergang

$$q(t) = \frac{1}{l\sigma_0}\int_0^t f(\tau)\sin\sigma_0(t-\tau)\,d\tau. \tag{25}$$

Wenn auch die gegebene Ableitung nicht streng mathematisch, sondern mehr anschaulich war, sieht man durch Einsetzen von (25) sofort, daß es eine partikuläre Lösung von (9) (für $r = 0$) darstellt.

Addieren wir zu (25) die Lösung der homogenen Gleichung in § 3, (27), so erhält man die allgemeine Lösung der Gleichung der erzwungenen Schwingungen, die für $t = 0$ in die Anfangswerte q^*, u^* übergeht.

§ 5. Kleine Schwingungen und Stabilität.

1. Allgemeine Kriterien. Wenn wir eine „beständige" Bewegung betrachten, deren benachbarte Bewegungen sich daher durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten § 3, (4) darstellen lassen, so läßt sich die Stabilität der Grundbewegung $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aus den Wurzeln λ_α der charakteristischen Gleichung $D(\lambda) = 0$, § 3, (9) beurteilen. Der Charakter der gestörten Bewegung hängt von den Anfangsbedingungen nur insofern ab, als von den Anfangswerten der Störung, d. h. den Werten der q_i und $\dot{q}_i$ zur Zeit $t = 0$ es abhängt, welche der Konstanten D_α und E_α in den Lösungen § 3, (14) von Null verschieden sind, welche unter den Dämpfungen ϱ_α und Frequenzeu σ_α also in der Lösung wirklich vorkommen. Wenn alle vorkommenden ϱ_α negativ sind, so gehen nach § 3, (14) alle q_k mit wachsendem t gegen Null; dasselbe gilt sogar, wenn das betreffende $\lambda_\alpha = \varrho_\alpha + i\sigma_\alpha$ eine mehrfache Wurzel ist und eine Lösung der Gestalt § 3, (16) zur Folge hat. Die Grundbewegung ist also stabil gegenüber allen Störungen, die in den Lösungen Wurzeln von $D(\lambda) = 0$ mit negativem Realteil einführen. Sie ist allgemein stabil, wenn alle Wurzeln λ_α negativen Realteil haben. Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig, weil bei verschwindendem Realteil $(\varrho_\alpha = 0)$ die Lösungen § 3, (14) rein trigonometrische Funktionen der Zeit werden, und durch Verkleinerung der Störungen die Koeffizienten D_α, E_α beliebig verkleinert werden können, wodurch auch die q_k selbst für alle Zeiten unter jeden Betrag herabgedrückt werden können. Doch gilt das nicht mehr, wenn die Lösungen die Form § 3, (16) haben, da für $\varrho_\alpha = 0$ die Ausdrücke der Gestalt $t\cos(\sigma_\alpha t + \delta)$ usw. mit wachsendem t ins Unendliche wachsen.

Zusammenfassend lassen sich folgende notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Grundbewegung formulieren:

Die Wurzeln von $D(\lambda) = 0$ § 3, (9) dürfen keinen positiven Realteil haben. Wenn der Realteil verschwindet, so müssen die betreffenden Wurzeln $\lambda_\alpha = i\sigma_\alpha$ entweder einfache Wurzeln sein oder solche m_α-fache, für welche die Determinante $D(\lambda_\alpha)$ gerade den Rang $n - m_\alpha$ hat.

Partielle Stabilität für gewisse Störungen tritt ein, wenn die λ_α, welche in den Lösungen vorkommen, die obigen Bedingungen erfüllen.

Der wichtigste Fall der Stabilität ist der, wo $D(\lambda) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist (s. 1. Bd., III, § 4, 3).

2. Beispiele. Wir wollen zunächst die Stabilität der gleichförmigen Kreisbewegung bei einer beliebigen Zentralbewegung untersuchen. Wir betrachten die Gleichungen der benachbarten Bewegungen, die durch § 3, (6) gegeben sind. Die charakteristische Gleichung lautet dann:

$$(26) \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + M\left[f'(\bar{r}) - \frac{f(\bar{r})}{\bar{r}}\right], & -2\lambda\sqrt{\bar{r}Mf(\bar{r})} \\ 2\lambda\sqrt{\bar{r}Mf(\bar{r})}, & \bar{r}^2\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgeführt:

$$(27) \quad \lambda^2\bar{r}\{\lambda^2\bar{r} + M[\bar{r}f'(\bar{r}) + 3f(\bar{r})]\} = 0.$$

Die Gl. (27) hat jedenfalls die Doppelwurzel $\lambda = 0$; da für $\lambda = 0$ die Determinante $D(\lambda)$ nicht vom Range $n - 2 = 2 - 2 = 0$ wird, sondern vom Range 1 bleibt, so ist die Grundbewegung gegenüber Störungen, welche die entsprechenden Glieder zur Folge haben, nicht stabil. Das zweite Wurzelpaar ist rein imaginär oder reell, je nachdem

$$\bar{r}f'(\bar{r}) + 3f(\bar{r}) \gtrless 0$$

positiv oder negativ ist. Nur im ersten Falle ist die Grundbewegung stabil gegenüber den entsprechenden Störungen. Die Bedingung stimmt mit der in § 2, (6) aus dem Energiekriterium gefolgerten überein. Dort waren durch die Bedingung konstanten Drehimpulses $u = \alpha$ die Störungen ausgeschlossen, welche die Glieder mit $\lambda = 0$ in den Lösungen zur Folge haben. Doch sind auch diese Störungen nur sehr einfacher Natur, die Lösungen sind nach § 4, (16), (22) von der Gestalt $t\cos\sigma_0 t$, woraus wegen $\lambda = \sigma = 0$ lineare Funktionen der Zeit werden. Man kann auch direkt einsehen, daß die Gleichungen § 3, (6) durch den Ansatz $\varrho = \text{const}$, $\dot{\sigma} = \text{const}$, also $\dot{\varrho} = \ddot{\sigma} = 0$ sich lösen lassen. Ein komplizierteres Beispiel für die Anwendung der kleinen Schwingungen als Stabilitätskriterium ist in III, § 4, 4 behandelt.

Lehrbücher.

Außer den allgemeinen, bei Kap. I erwähnten (insbesondere dem von Routh) W. Hort, Technische Schwingungslehre. Berlin 1922.

Drittes Kapitel.

Die Bewegungsgleichungen starrer Körper.

§ 1. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

1. Lagekoordinaten. Die Lage eines starren Körpers im Raume kann man festlegen, wenn man die Lage eines starr mit dem Körper verbundenen rechtwinkligen Koordinatensystems, des „körperfesten Systems“,

relativ zu einem im Raume ruhenden „raumfesten“ System festlegt. Das geschieht am einfachsten durch Angabe des Ortsvektors $\mathfrak{s}$ des Ursprungs des körperfesten Systems und der neun Richtungskosinusse der Achsen der beiden Systeme. Die neun Kosinusse kann man als die Komponenten der drei in den ruhenden Achsen liegenden Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in bezug auf die körperfesten Achsen auffassen. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im ruhenden System mit x, y, z, im körperfesten mit x_1, x_2, x_3, so heißen folgerichtig die Komponenten von $\mathfrak{s}$ in bezug auf das ruhende System: s_x, s_y, s_z, von $\mathfrak{a}$ in bezug auf das körperfeste System: a_1, a_2, a_3, und analog von $\mathfrak{b}$: b_1, b_2, b_3, von $\mathfrak{c}$: c_1, c_2, c_3.

Da zwischen den Richtungskosinussen die sechs Beziehungen

$$(1) \qquad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}) = 1, \qquad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = 0$$

bestehen (s. die Definition des skalaren Produktes 1. Bd., II, § 3, (61), sind unter ihnen nur drei unabhängige. Mit s_x, s_y, s_z zusammen haben wir also sechs Lagekoordinaten; der starre Körper ist ein System von sechs Freiheitsgraden. Es ergibt sich also die Aufgabe, die neun Größen $a_1, a_2, \ldots, c_3$ so durch drei unabhängige Größen auszudrücken, daß die sechs Beziehungen zwischen den Richtungskosinussen identisch erfüllt sind. Das geschieht durch Einführung der drei „Eulerschen Winkel“ ϑ, ψ, φ. Man setzt

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1 = \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, \\ b_1 = \sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi, \\ c_1 = \sin\vartheta\sin\varphi, \\ a_2 = -\cos\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi, \\ b_2 = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, \\ c_2 = \sin\vartheta\cos\varphi, \\ a_3 = \sin\vartheta\sin\psi, \\ b_3 = -\sin\vartheta\cos\psi, \\ c_3 = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke genügen den Gl. (1). Die geometrische Bedeutung der ϑ, ψ, φ sieht man leicht ein, wenn man den Ursprung des raumfesten Systems so wählt, daß er mit dem des körperfesten zusammenfällt. Die x, y-Ebene und die x_1, x_2-Ebene schneiden einander dann in einer durch den Ursprung gehenden Geraden, der „Knotenlinie“. ϑ ist dann der Winkel, durch welchen man um die Knotenlinie als Achse das raumfeste System drehen muß, um auf dem kürzesten Wege die x, y-Ebene mit der x_1, x_2-Ebene zur Deckung zu bringen, so daß in der nun gemeinsamen Ebene die x- und y-Achse im selben Sinne aufeinander folgen, wie die x_1- und x_2-Achse. Durch diese Deckung ist in der

Knotenlinie ein Richtungssinn festgelegt. Wir nennen die positive Seite die, von der aus gesehen die Drehung durch ϑ im Sinne des Uhrzeigers erfolgt ist. Ferner ist ψ der Winkel, durch den man den Körper um die z-Achse drehen muß, damit die positive x-Achse mit der positiven Knotenlinie zur Deckung kommt, wobei die Drehung von der positiven z-Richtung gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Schließlich ist φ der Winkel, durch welchen man dann den Körper um die x_3-Achse drehen muß, damit die positive Hälfte der Knotenlinie mit der positiven x_1-Achse zur Deckung kommt, wobei wieder die Drehung von der positiven x_3-Richtung aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Durch diese drei Drehungen sind tatsächlich die x, y, z-Achsen in die x_1, x_2, x_3-Achsen unter Beibehaltung des Richtungssinnes übergeführt. Der Beweis für den Zusammenhang dieser drei Winkel mit den Richtungskosinussen nach (2) wird durch Betrachtung der sphärischen Dreiecke geführt, die sich aus den Durchstoßpunkten der Achsen mit der an den Ursprung gelegten Einheitskugel bilden lassen.

2. Geschwindigkeitskoordinaten. Wenn wir eine Bewegung eines starren Körpers betrachten, bei der ein Punkt, etwa der Ursprung C des körperfesten Systems, im Ursprung des raumfesten festgehalten wird und jedem Punkte P des Körpers seinen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in bezug auf das raumfeste System zuordnen, so legt im Zeitelement dt der Punkt des Körpers, der durch den vom festgehaltenen Punkte aus gezogenen Ortsvektor $\mathfrak{x}$ festgelegt wird, eine infinitesimale Strecke zurück, die durch den Vektor $\mathfrak{v}\,dt$ gegeben ist. Bezeichnen wir den Abstand des Punktes P von der momentanen Drehungsachse mit r, so hat $\mathfrak{v}\,dt$ den absoluten Betrag $r\omega dt$, wenn ω die momentane Winkelgeschwindigkeit ist. Das ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\overline{\omega}\,dt$ bestimmt ist, wobei $\overline{\omega}$ den absoluten Betrag ω und die Richtung der Drehungsachse hat. Da durch die Drehung eine Verschiebung von P senkrecht zur Ebene der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\overline{\omega}$ erfolgt, ist nach der Definition des vektoriellen Produktes, 1. Bd. II, § 3, **1**, die Geschwindigkeit eines Punktes mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{v} = \overline{\omega} \times \mathfrak{x}. \tag{3}$$

Die geometrische Bedeutung von $\overline{\omega}$ ist die folgende: Die infinitesimale Bewegung ist eine Drehung um eine Achse, deren Richtung durch die des Vektors $\overline{\omega}$, deren Winkelgeschwindigkeit durch den Betrag von $\overline{\omega}$ bestimmt ist. Der Drehungssinn ist dabei im Sinne des Uhrzeigers vom Pfeil $\overline{\omega}$ aus gesehen. Man nennt $\overline{\omega}$ den „Drehungsvektor“ [1]).

[1]) Durch (3) ist jedem Vektor $\mathfrak{x}$ ein Vektor $\mathfrak{v}\,dt$ durch eine lineare homogene Transformation zugeordnet. Wenn $\mathfrak{x}$ ein Einheitsvektor ist, so ist im Sinne von 1. Bd., II, § 4, **1** die Zuordnung durch einen Tensor bestimmt. Wegen der Starr-

Man kann (3), wenn man $\mathfrak{v}$ durch die Ableitung von $\mathfrak{x}$ nach t ersetzt, noch folgendermaßen deuten: sie gibt uns die Änderung $d\mathfrak{x}$, die ein vom Ursprung aus gezogener Vektor $\mathfrak{x}$ im Zeitelement dt erleidet, wenn $\mathfrak{x}$ starr mit dem Körper verbunden bleibt, während dieser die durch $\bar{\omega}$ bestimmte Drehung macht. Wenn ein Vektor $\mathfrak{a}$ im Zeitelement dt in bezug auf das körperfeste System die Änderung $\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}$ erleidet, so ist seine Änderung in bezug auf das raumfeste System $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ von dieser verschieden: es kommt noch die Änderung dazu, die $\mathfrak{a}$ auch erlitte, wenn er in bezug auf das körperfeste System konstant, also starr mit ihm verbunden wäre. Es ist daher nach (3)

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{a}). \tag{4}$$

Natürlich sind nur die Richtungsänderungen in bezug auf beide Systeme verschieden, nicht die Änderungen des Betrages, da sich die beiden infinitesimalen Änderungen von $\mathfrak{a}$ nur um einen auf $\mathfrak{a}$ senkrecht stehenden Vektor unterscheiden.

Wenn wir insbesondere die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ betrachten, die in den drei raumfesten Achsen festliegen, so sind ihre Änderungen in bezug auf die raumfesten Achsen Null und es gilt

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{a}) = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{b}) = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{c}) = 0. \tag{5}$$

Bezeichnen wir die Komponenten von $\bar{\omega}$ in bezug auf die körperfesten Achsen wit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, so folgt aus (3) nach 1. Bd., II, § 3, (10)

$$\begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} + \omega_2 a_3 - \omega_3 a_2 = 0, & \dfrac{da_2}{dt} + \omega_3 a_1 - \omega_1 a_3 = 0, \\ \dfrac{da_3}{dt} + \omega_1 a_2 - \omega_2 a_1 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

und die analogen Gleichungen für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. Der Geschwindigkeitszustand des starren Körpers läßt sich durch die Ableitungen der Lagekoordinaten nach der Zeit darstellen, also durch $\dot{s}_x, \dot{s}_y, \dot{s}_z, \dot{a}_1, \dot{a}_2, \ldots, \dot{c}_3$ bzw. $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$. Da aber nach den Gl. (6) die Ableitungen $\dot{a}_1, \ldots, \dot{c}_3$ aus den drei Größen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und den Lagekoordinaten sich berechnen lassen, können auch

---

heit des Körpers gehen bei der Transformation alle Figuren in kongruente über; der Tensor ist daher nach 1. Bd., II, § 4, **4** (Schluß) ein antisymmetrischer und die Transformation läßt sich nach 1. Bd., II, § 4, (23) in der Gestalt $\mathfrak{v}\,dt = \bar{\omega}\,dt \times \mathfrak{x}$ schreiben, wo $\bar{\omega}\,dt$ ein die Transformation bestimmender infinitesimaler Vektor ist. Halten wir die Gleichung auch noch fest, wenn $\mathfrak{x}$ kein Einheitsvektor ist, so definiert sie uns die Verschiebung eines beliebigen Punktes, wobei die Kongruenz der Figuren erhalten bleibt.

die drei Komponenten des Drehungsvektors $\bar{\omega}$ mit denen von $\dot{\mathfrak{s}}$ zusammen den Geschwindigkeitszustand darstellen, wobei immer zu beachten ist, daß die $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nicht zeitliche Ableitungen von Lagekoordinaten sind. Es können aber, wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als Funktionen der Zeit gegeben sind, die Gl. (6) als Differentialgleichungen zur Bestimmung der Lagekoordinaten $a_1, a_2, \ldots, c_3$ betrachtet werden. Wir haben ein System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung vor uns, dem sowohl die Komponenten von $\mathfrak{a}$, als auch die von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ genügen müssen. Es sind also drei Lösungssysteme dieser Gleichungen zu suchen, zwischen denen die Beziehungen (1) und die durch Differentiation daraus hervorgehenden bestehen müssen. Die Integration des Systems (6) läßt sich auf die einer Riccatischen Gleichung [s. 1. Bd., VI, § 2, (47)] zurückführen[1]).

Man kann umgekehrt aus drei von den neun Gleichungen (6) (wobei von den drei höchstens zwei die Komponenten von $\mathfrak{a}$ enthalten dürfen), $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als Funktionen der Richtungskosinusse und ihrer Ableitungen ausrechnen, dann für $\dot{a}_1, \ldots, \dot{c}_3$ ihre Ausdrücke aus (2) und für $\ddot{a}_1, \ldots, \ddot{c}_3$ die durch Differentiation von (2) erhaltenen einsetzen, dann wird

$$(7)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \qquad \omega_2 = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ \omega_3 = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Die aus drei von den Gleichungen (6) erhaltenen Werte können den übrigen wegen (1) und den durch Differentiation aus ihnen erhaltenen $a_1\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2 + a_3\dot{a}_3 = 0$ usw. nicht widersprechen. Durch Auflösung von (7) erhält man:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_3 - \operatorname{ctg}\vartheta\,(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi), \\ \dot{\psi} = \operatorname{cosec}\vartheta\,(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi), \\ \dot{\vartheta} = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi. \end{cases}$$

Wenn also die $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als Funktionen der Zeit gegeben sind, haben wir in (8) drei Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ vor uns.

3. Bewegungsgesetze des starren Körpers. Jede infinitesimale Bewegung eines starren Körpers kann man aus einer allen Punkten gemeinsamen, durch den Vektor $\delta\mathfrak{s}$ gegebenen Translation und einer infinitesimalen Drehung um eine durch den Ursprung C des körperfesten Systems gehende Achse zusammensetzen. Der letzteren entspricht für den Punkt des Körpers mit dem von C aus gezogenen Ortsvektor $\mathfrak{x}^{(\alpha)}$ nach (3) die Verschiebung $\delta\mathfrak{o} \times \mathfrak{x}^{(\alpha)}$, wo $\delta\mathfrak{o}$ die Richtung von $\bar{\omega}$, aber zur Länge

[1]) Nähere Ausführungen darüber findet man bei G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. I, livre I, ch. II, III.

den infinitesimalen Drehungswinkel hat. Es ist dann jede Verschiebung $\delta \mathfrak{q}^\alpha$ des Punktes $\mathfrak{x}^\alpha$ möglich, bei der

$$\delta \mathfrak{q}^\alpha = \delta \mathfrak{s} + (\delta \mathfrak{o} \times \mathfrak{x}^\alpha) \tag{9}$$

bei beliebigem $\delta \mathfrak{s}$ und $\delta \mathfrak{o}$. Nun lautet das d'Alembertsche Prinzip für die Bewegung eines beliebigen mechanischen Systems, wenn wir die Gleichung I, § 1, (35) vektoriell schreiben und mit m^α die Masse, $\mathfrak{w}^\alpha$ den Beschleunigungsvektor, mit $\mathfrak{k}^\alpha$ die Kraft für den materiellen Punkt $\mathfrak{x}^\alpha$ bezeichnen

$$\sum_\alpha (m_\alpha \mathfrak{w}^\alpha - \mathfrak{k}^\alpha) \delta \mathfrak{q}^\alpha = 0. \tag{10}$$

Setzen wir aus (9) ein, so muß (10) für beliebiges $\delta \mathfrak{s}$ und $\delta \mathfrak{o}$ erfüllt sein. Da nach 1. Bd., II, § 3, (11) $\mathfrak{w}^\alpha (\delta \mathfrak{o} \times \mathfrak{x}^\alpha) = \delta \mathfrak{o} (\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{w}^\alpha)$, folgt daraus, wenn wir den starren Körper als ein System starr verbundener Massenpunkte auffassen,

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{w}^\alpha = \sum_\alpha \mathfrak{k}^\alpha, \qquad \sum_\alpha m_\alpha (\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{w}^\alpha) = \sum_\alpha (\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{k}^\alpha). \tag{11}$$

Wir bezeichnen wie in I, § 1, (18), (25) mit $\mathfrak{g}$ den gesamten translatorischen Impuls, mit $\mathfrak{i}$ den Drehimpuls des Körpers in bezug auf C, also

$$\mathfrak{g} = \sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{v}^\alpha, \qquad \mathfrak{i} = \sum_\alpha m_\alpha (\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{v}^\alpha), \tag{12}$$

wo $\mathfrak{v}^\alpha$ der Geschwindigkeitsvektor des Punktes $\mathfrak{x}^\alpha$ in bezug auf das ruhende System ist, mit $\mathfrak{k}$ die Resultierende der eingeprägten Kräfte, mit $\mathfrak{d}$ deren Drehmoment in bezug auf C, den Bezugspunkt, also

$$\mathfrak{k} = \sum_\alpha \mathfrak{k}^\alpha, \qquad \mathfrak{d} = \sum_\alpha (\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{k}^\alpha). \tag{12a}$$

Da $\mathfrak{s}$ der Ortsvektor von C im ruhenden System ist, gilt $\mathfrak{v}^\alpha = \dot{\mathfrak{s}} + \dot{\mathfrak{x}}^\alpha$, $\mathfrak{w}^\alpha = \dot{\mathfrak{v}}^\alpha$, also ergibt sich durch Differentiation von (12) nach t und Einsetzen von $\dot{\mathfrak{x}}^\alpha = \mathfrak{v}^\alpha - \dot{\mathfrak{s}}$:

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{w}_\alpha, \qquad \frac{d\mathfrak{i}}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha (\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{w}^\alpha) - (\dot{\mathfrak{s}} \times \sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{v}^\alpha). \tag{12b}$$

Wenn wir den Ortsvektor des Körperschwerpunktes mit $\mathfrak{x}$, die gesamte Masse mit $m = \sum_\alpha m_\alpha$ bezeichnen, so ist nach I, § 1, (21) $m\mathfrak{x} = \sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$, also $m\dot{\mathfrak{x}} = \sum m_\alpha \mathfrak{v}^\alpha - m\dot{\mathfrak{s}}$. Durch Einsetzen in (12b) ergibt sich dann in Verbindung mit (12a), (11):

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \mathfrak{k}, \qquad \frac{d\mathfrak{i}}{dt} = \mathfrak{d} + m(\dot{\mathfrak{x}} \times \dot{\mathfrak{s}}). \tag{13}$$

Wenn der Bezugspunkt festgehalten wird ($\dot{\mathfrak{s}} = 0$), reduziert sich die zweite Gleichung (13) auf $\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = \mathfrak{d}$, d. h. wenn ein Punkt des Körpers festgehalten wird, ist die Zunahme des Drehimpulses in bezug auf

diesen Punkt gleich dem resultierenden Drehmoment der eingeprägten Kräfte in bezug auf denselben Punkt. Wählt man den Schwerpunkt des Körpers zum Bezugspunkt (also $\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{x}} = 0$), so ergibt sich, auch ohne daß ein Punkt des Körpers festgehalten wird, dieselbe Vereinfachung von (13) und wir erhalten

$$m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \mathfrak{k}, \qquad \frac{d\mathfrak{i}}{dt} = \mathfrak{d}. \tag{14}$$

Die erste Gleichung sagt aus, daß der Schwerpunkt sich so bewegt, wie ein freier materieller Punkt, in dem die ganze Masse und alle Kräfte konzentriert sind; die zweite Gleichung, daß sich der Körper um den Schwerpunkt so bewegt, als wäre dieser in Ruhe (relativ zum raumfesten System).

4. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen. Wenn wir die Impulse $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{i}$ durch Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten ausdrücken, erhalten wir durch Einsetzen in (13) die Differentialgleichungen für die Bewegung eines starren Körpers. Wir müssen also für das $\mathfrak{v}^\alpha$ in (12) den Ausdruck setzen, der aus (9) entsteht, wenn wir überall an Stelle der Verschiebungen die Geschwindigkeiten setzen. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{v}^\alpha = \mathfrak{u} + (\overline{\omega} \times \mathfrak{x}^\alpha), \tag{15}$$

wobei $\mathfrak{u} = \dot{\mathfrak{s}}$ die Geschwindigkeit des Ursprungs des körperfesten Systems ist. Dann ist nach (12) und (15), wenn wir den Lagevektor $\mathfrak{x}$ des Schwerpunktes durch $m\mathfrak{x} = \sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ einführen, nach 1. Bd., II, § 3, (12) und § 4, (5)

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = m[\mathfrak{u} + (\overline{\omega} \times \mathfrak{x})], \\ \mathfrak{i} = m(\mathfrak{x} \times \mathfrak{u}) + \sum_\alpha [m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\alpha)\overline{\omega} - m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha; \mathfrak{x}^\alpha)\overline{\omega}]. \end{cases} \tag{16}$$

Wenn wir den Einheitstensor E [1. Bd., II, § 4, (20)] einführen und einen Tensor θ durch

$$\theta = \sum_\alpha [m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\alpha) E - m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha; \mathfrak{x}^\alpha)] \tag{17}$$

definieren, schreibt sich einfach

$$\mathfrak{i} = m(\mathfrak{x} \times \mathfrak{u}) + \theta\overline{\omega}. \tag{18}$$

Wenn wir jetzt von den einzelnen Massenpunkten m_α zu einer stetig den Raum erfüllenden Massenverteilung mit der Masse dm im Volumelement übergehen, so verwandelt sich die Summe in (17) in ein Integral. Wenn wir außerdem nach 1. Bd., II, § 4, (17) die Jaumannsche Dyade einführen, geht (17) in die Formel 1. Bd., II, § 4, (18′) über. (In der dort folgenden Gl. (18″) sind die Komponenten der „Trägheitsdyade“ angegeben; nur sind in unserer jetzigen Bezeichnung an Stelle

von x, y, z die Komponenten nach den körperfesten Achsen, d. i. x_1, x_2, x_3, zu setzen.)

Wenn wir nun im folgenden den Schwerpunkt selbst zum Ursprung des körperfesten Systems wählen, wird $\mathfrak{x} = 0$ und $\mathfrak{u}$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit. Wenn wir dann die Komponenten des Drehimpulses mit i_k, die der Trägheitsdyade mit θ_{kj} bezeichnen, folgt aus (18) nach 1. Bd., II, § 4, (8)

$$\mathfrak{i} = \theta\,\bar{\omega}, \qquad i_k = \theta_{k1}\,\omega_1 + \theta_{k2}\,\omega_2 + \theta_{k3}\,\omega_3 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Wie 1. Bd., II, § 4, 4 bewiesen ist, kann man das Achsensystem x_1, x_2, x_3 mindestens auf eine Weise so wählen, daß die θ_{kj} für $k \neq j$ verschwinden. Ein solches System nennen wir „Hauptträgheitsachsen“. Es bleiben dann nur die Komponenten θ_{kk} übrig. Wir setzen dann $\theta_{kk} = \theta_k$ und nennen es das „Hauptträgheitsmoment“ in bezug auf die x_k-Achse. Es ist

$$i_k = \theta_k\,\omega_k \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Wollen wir die in (13) vorkommende zeitliche Änderung des Drehimpulses in bezug auf das raumfeste Achsensystem bilden, so müssen wir beachten, daß ω_k $(k = 1, 2, 3)$ die Komponenten der zeitlichen Änderung von $\bar{\omega}$ in bezug auf das körperfeste System sind, das von jetzt ab mit dem System der Hauptträgheitsachsen zusammenfallen möge. Durch Anwendung von (4) auf (13) erhalten wir

$$\frac{\partial \mathfrak{i}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{i}) = \mathfrak{d}. \tag{21}$$

Zerlegen wir in Komponenten, so wird daraus nach (20)

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\theta_3 - \theta_2)\,\omega_2\,\omega_3 = d_1, \qquad \theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\theta_1 - \theta_3)\,\omega_1\,\omega_3 = d_2, \\ \theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (\theta_2 - \theta_1)\,\omega_1\,\omega_2 = d_3. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Die Gl. (22) heißen die „Eulerschen Gleichungen“ für die Bewegung des starren Körpers. Zu ihnen treten die Gleichungen, die sich aus der ersten Gl. (13) ergeben, wenn wir in sie nach (16) $\mathfrak{g} = m\,\mathfrak{u}$ einführen (wegen $\mathfrak{x} = 0$). Wenn wir die Komponenten u_x, u_y, u_z der Schwerpunktsgeschwindigkeit in bezug auf die raumfesten Achsen einführen, erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{du_x}{dt} = k_x, \qquad m\frac{du_y}{dt} = k_y, \\ m\frac{du_z}{dt} = k_z \quad \left(\text{oder auch } m\frac{d^2 s_x}{dt^2} = k_x, \text{ usw.}\right). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Die Gl. (22), (23) bilden zusammen mit den „kinematischen Differentialgleichungen“ (8) ein System von neun simultanen Differential-

gleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der neun Größen ϑ, φ, ψ, u_x, u_y, u_z, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als Funktionen der Zeit. Dabei ist natürlich angenommen, daß die Kraftkomponenten k_x, k_y, k_z wie auch d_1, d_2, d_3 als Funktionen dieser Größen und ihrer ersten Ableitungen gegeben sind.

Der Unterschied in der Gestalt der Gl. (23) und (22) rührt nur daher, daß wir die Komponenten von u in bezug auf das raumfeste System eingeführt haben. Wenn man die Komponenten u_1, u_2, u_3 längs der Hauptträgheitsachsen einführte, so müßte man auch die erste Gl. (13) nach (4)

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + (\overline{\omega} \times \mathfrak{g}) = \mathfrak{k} \tag{24}$$

schreiben, woraus dann wegen $\mathfrak{g} = m\,\mathfrak{u}$ durch Komponentenzerlegung

$$m\left[\frac{d u_1}{d t} + \omega_2 u_3 - \omega_3 u_2\right] = k_1 \quad \text{usw.} \tag{25}$$

folgt. Dabei sind die k_1, k_2, k_3 die Komponenten der resultierenden Kraft in bezug auf die Hauptträgheitsachsen.

5. Formale Erweiterung des Ansatzes (Motorrechnung). Man kann den Bewegungsgleichungen des starren Körpers größere Anschaulichkeit und für manche Zwecke erhöhte Verwendbarkeit geben, wenn man in der Richtung, die von der skalaren Betrachtungsweise zur Vektorrechnung führt, noch um einen Schritt weitergeht. Während man durch Anwendung des Vektorbegriffes die Ansätze nur von der Wahl bestimmter Koordinatenrichtungen unabhängig macht, werden sie durch Einführung des analogen Motorbegriffes nach R. v. Mises auch von der Wahl des Anfangspunktes der Koordinaten unabhängig[1]).

Das Kräftesystem, das auf einen starren Körper wirkt, war oben durch den Resultantvektor $\mathfrak{k}$ und den auf einen bestimmten Anfangspunkt $\mathfrak{x}$ bezogenen Momentvektor $\mathfrak{d}$ gegeben. Gehen wir zu einem neuen Bezugspunkt $\mathfrak{x}'$ über, so ist das neue Moment

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} + \mathfrak{k} \times (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}). \tag{26}$$

In der gleichen Beziehung wie $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{k}$ stehen zueinander die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ der beiden Bezugspunkte und der Drehvektor $\overline{\omega}$:

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \overline{\omega} \times (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}). \tag{27}$$

Wir fassen nun $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{d}$ bzw. $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{d}'$ als erste und zweite Vektorkomponente eines „Kraftmotors“ $\mathfrak{K}$ auf, ebenso $\overline{\omega}$ und $\mathfrak{v}$ bzw. $\overline{\omega}$ und $\mathfrak{v}'$ als die beiden Vektorkomponenten eines „Geschwindigkeitsmotors“ $\mathfrak{G}$. Der Motor ist eine sechswertige Größe, deren skalare

[1]) Die „Motorrechnung“, die auf den älteren Begriff der „Dyname“ zurückgeht, ist ausgeführt in zwei Arbeiten von R. v. Mises, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. **4**, 1924.

Komponenten K_1 bis K_6 bzw. G_1 bis G_6 von Koordinatenanfangspunkt und -richtungen, deren Vektorkomponenten nur vom Anfangspunkt abhängen. Die Bezeichnung wählen wir so, daß K_1, K_2, K_3 die Komponenten des Resultantvektors $\mathfrak{k}$ sind, K_4, K_5, K_6 die des Momentvektors $\mathfrak{d}$, analog G_1, G_2, G_3 die Komponenten von $\bar{\omega}$ und G_4, G_5, G_6 die von $\mathfrak{v}$. In der älteren, rein geometrischen Betrachtungsweise der Mechanik des starren Körpers entspricht dem Begriff des Kraftmotors der der Dyname oder Kraftschraube, dem Begriff des Geschwindigkeitsmotors der der Bewegungsschraube.

Wir definieren als die Summe zweier Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen Motor $\mathfrak{C}$, dessen skalare und vektorielle Komponenten die Summen der betreffenden Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind, also $C_\iota = A_\iota + B_\iota$; ganz analog soll $\mathfrak{B} = \lambda\mathfrak{A}$ bedeuten, daß $B_\iota = \lambda A_\iota$ für $\iota = 1, 2 \ldots 6$.

Außer dem Kraft- und Geschwindigkeitsmotor eines Körpers spielt noch der Impulsmotor eine ausschlaggebende Rolle. Für einen einzelnen Punkt von der Masse m_α, der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}^\alpha$ und dem Ortsvektor $\mathfrak{x}^\alpha$ hat der Impuls die Vektorkomponenten $m_\alpha\mathfrak{v}^\alpha$ und $\mathfrak{x}^\alpha \times m_\alpha\mathfrak{v}^\alpha$. Als Impulsmotor $\mathfrak{J}$ des starren Körpers definieren wir die Summe der Einzelimpulse, also den Motor mit der ersten Komponente $\sum m_\alpha\mathfrak{v}^\alpha$ und der zweiten $\sum m_\alpha\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{v}^\alpha$, die Summation über alle Teile des Körpers erstreckt. Das vollständige Bewegungsgesetz des starren Körpers lautet dann

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{K}, \tag{28}$$

in Worten: die Ableitung des Impulsmotors nach der Zeit ist gleich dem Kraftmotor.

Schreibt man (27) in der Form $\mathfrak{v}^\alpha = \mathfrak{v} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{x}^\alpha)$ und setzt dies in die Ausdrücke für die Vektorkomponenten von $\mathfrak{J}$ ein, so erkennt man, daß der Impulsmotor eine lineare Funktion des Geschwindigkeitsmotors ist, deren Koeffizienten von folgenden 10 Summen (Integralen) abhängen: 1. der Gesamtmasse $m = \sum m_\alpha$; 2. den drei statischen Momenten σ_1, σ_2, σ_3 oder den Schwerpunktskoordinaten x^*, y^*, z^*, nämlich

$$\sigma_1 = \sum m_\alpha x_\alpha = m x^*, \quad \sigma_2 = \sum m_\alpha y_\alpha = m y^*, \quad \sigma_3 = \sum m_\alpha z_\alpha = m z^*;$$

3. den drei Trägheitsmomenten $\vartheta_1 = \sum m_\alpha(y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$ usf. und 4. den drei Deviationsmomenten $\delta_1 = \sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha$ usf. Nennen wir u_1, u_2, u_3 die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Bezugspunktes, ω_1, ω_2, ω_3 die Komponenten von $\bar{\omega}$, so erhalten wir

$$\begin{cases} J_1 = m(u + z^*\omega_2 - y^*\omega_3) \ldots, \\ J_4 = \vartheta_1\omega_1 - \delta_3\omega_2 - \delta_2\omega_3 + m(y^*u_3 - z^*u_2) \ldots \end{cases} \tag{29}$$

Da die $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u_1, u_2, u_3$ nichts anderes sind als die skalaren Komponenten $G_1, G_2 \ldots G_6$ des Geschwindigkeitsmotors $\mathfrak{G}$, kann man (29) in der Form

$$J_\varkappa = \sum_{\iota=1}^{6} T_{\varkappa,\iota+3} G_\iota \tag{30}$$

schreiben (wobei für die Indizes 7, 8, 9 im Sinne zyklischer Reihenfolge 1, 2, 3 zu setzen ist), wenn die Matrix $T_{\varkappa\iota}$ folgendermaßen aussieht:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} m & 0 & 0 & 0 & mz^* & -my^* \\ 0 & m & 0 & -mz^* & 0 & mx^* \\ 0 & 0 & m & my^* & -mx^* & 0 \\ 0 & -mz^* & my^* & \vartheta_1 & -\delta_3 & -\delta_2 \\ mz^* & 0 & -mx^* & -\delta_3 & \vartheta_2 & -\delta_1 \\ -my^* & mx^* & 0 & -\delta_2 & -\delta_1 & \vartheta_3 \end{array}\right\} \tag{30'}$$

Analog dem im 1. Bd., II, § 4 definierten Dyadenbegriff bezeichnen wir (31) als das Schema einer motorischen Dyade, die wir speziell die „Trägheitsdyade" nennen, und sprechen (29) oder (30) in der einfachen Form aus: Der Impulsmotor ist das Produkt der (motorischen) Trägheitsdyade in den Geschwindigkeitsmotor

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{T} . \mathfrak{G}. \tag{30''}$$

Um die Beziehungen (28) und (30″) in ihrer Verbindung ausnutzen zu können, müssen wir noch zwei Produktdefinitionen der Motorrechnung einführen. Wir nennen skalares Produkt der Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{A} . \mathfrak{B} = A_1 B_4 + A_2 B_5 + A_3 B_6 + A_4 B_1 + A_5 B_2 + A_6 B_1. \tag{31}$$

Das skalare Produkt des Kraft- und Geschwindigkeitsmotors ist die Leistung L, das skalare Produkt von Impuls- und Geschwindigkeitsmotor die doppelte lebendige Kraft $2K$:

$$\mathfrak{K} . \mathfrak{G} = L, \quad \mathfrak{J} . \mathfrak{G} = 2K. \tag{32}$$

Für $2K$ erhält man aus (29) und (31) den Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} 2K = m(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \vartheta_1 \omega_1^2 + \vartheta_2 \omega_2^2 + \vartheta_3 \omega_3^2 \\ \qquad - 2(\delta_1 \omega_2 \omega_3 + \delta_2 \omega_3 \omega_1 + \delta_3 \omega_1 \omega_2) \\ + 2m[x^*(u_2 \omega_3 - u_3 \omega_2) + y^*(u_3 \omega_1 - u_1 \omega_3) + z^*(u_1 \omega_2 - u_2 \omega_3)]. \end{array}\right. \tag{33}$$

Aus zwei beliebigen Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, deren erste bzw. zweite Vektorkomponenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0$ seien, bilden wir ferner ein motorisches Produkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, indem wir für die erste bzw. zweite Vektorkomponente von $\mathfrak{P}$ festsetzen:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}_0. \tag{34}$$

Die hauptsächlichste Anwendung des motorischen Produktes ist die der Gl. (4) analoge. Wenn ein Motor $\mathfrak{A}$ in einem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{G}$ bewegten System unveränderlich erscheint, so ändert er sich, vom ruhenden Raume aus gesehen, pro Zeiteinheit um $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}$; also wird aus (4), wenn man allgemeine Bewegung und nicht bloße Drehung betrachtet:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}). \tag{35}$$

Man kann sich leicht, mit Hilfe vektoranalytischer Formeln, davon überzeugen, daß die Produktdefinitionen (31) und (34) gegen Veränderung des Bezugspunktes invariant sind und den geläufigen Gesetzen der Multiplikation genügen, z. B. der Vertauschungsregel $\mathfrak{A}.(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \mathfrak{B}.(\mathfrak{C} \times \mathfrak{A})$ usf.

Multipliziert man die linke Seite von (28) skalar mit $\mathfrak{G}$, benutzt die Differentiationsformel (35), dann die eben angeführte Vertauschungsregel, beachtet, daß nach (34) $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} = 0$, endlich, daß $\mathfrak{T}$ vom bewegten Körper aus gesehen unveränderlich ist, so erhält man:

$$\mathfrak{G} \cdot \frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{G} \cdot \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} + \mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{G} \times \mathfrak{J}) = \mathfrak{G} \cdot \left(\mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}\right). \tag{36}$$

Die Symmetrie von $\mathfrak{T}$ hat zur Folge, daß in dem letzten Ausdruck die Reihenfolge der Multiplikationen vertauscht werden kann, so daß dafür

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{G}) = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} \cdot \mathfrak{J} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \cdot \mathfrak{J} \tag{37}$$

gesetzt werden darf. Der erste Ausdruck in (36) und der letzte in (37) sind aber die beiden Teile der Ableitung von $2K$ nach der Zeit. Da sie in (36) und (37) als gleich befunden wurden, haben wir somit aus (28) die Energiegleichung des starren Körpers

$$\frac{dK}{dt} = \mathfrak{G} \frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{G}.\mathfrak{K} \tag{38}$$

abgeleitet.

Wichtiger ist es, die allgemeine Form der Bewegungsgleichung selbst etwas weiter zu verfolgen. Wenden wir die Differentiationsformel (35) auf (28) an, so entsteht

$$\mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \mathfrak{G} \times (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{G}) = \mathfrak{K}. \tag{39}$$

Hiervon kann man die sechs skalaren Komponentengleichungen rein mechanisch nach den in (30) und (34) enthaltenen Rechnungsregeln bilden. Wir geben nur die erste und vierte an, da die übrigen durch zyklische Vertauschung aller Veränderlichen ohne weiteres zu finden sind. Dabei bezeichnen wir Ableitungen nach der Zeit durch über die

Variablen gesetzte Punkte; die Komponenten von $\mathfrak{k}$ seien wie in **4** k_1, k_2, k_3, die von $\mathfrak{d}$ wieder d_1, d_2, d_3. Dann wird:

$$(40)\quad \begin{cases} m(\dot{u}_1 + z^*\dot{\omega}_2 - y^*\dot{\omega}_3) + m\omega_2(u_3 - y^*\omega_1 + x^*\omega_2) \\ \qquad - m\omega_3(u_2 - z^*\omega_1 + x^*\omega_3) = k_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \vartheta_1\dot{\omega}_1 - \delta_3\dot{\omega}_2 - \delta_2\dot{\omega}_3 + m(y^*\dot{u}_3 - z^*\dot{u}_2) + (\vartheta_3 - \vartheta_2)\omega_2\omega_3 + \delta_1(\omega_3^2 - \omega_2^2) \\ \quad + \omega_1(\delta_3\omega_3 - \delta_2\omega_2) + m\omega_1(z^*u_3 + y^*u_2) - mu_1(z^*\omega_3 + y^*\omega_2) = d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Man erkennt, daß die Gl. (40) in die „Schwerpunktsgleichungen“ (25) übergehen, wenn x^*, y^*, z^* gleich Null gesetzt werden, und daß aus (41) die „Eulerschen Gleichungen“ (22) hervorgehen, wenn man überdies $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ setzt, d. h. als das im Körper feste Koordinatensystem das Hauptachsenkreuz wählt. In manchen Fällen, wenn man es z. B. mit mehreren in einzelnen Punkten zusammenhängenden Körpern zu tun hat, wird man von dem allgemeineren Ansatz (40), (41) Gebrauch machen müssen.

6. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. Um die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers nach den allgemeinen Formeln I, § 2, (9) aufzustellen, muß man zunächst die lebendige Kraft K als Funktion der sechs Lagekoordinaten s_x, s_y, s_z, ϑ, ψ, φ und ihrer Ableitungen berechnen. Da $2K = \sum_\alpha m_\alpha(\mathfrak{v}^\alpha\mathfrak{v}^\alpha)$, folgt aus (15) bei Anwendung der Vektorformeln 1. Bd., II, § 3, (13) und § 4, (15) und Einführung des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ des Schwerpunktes

$$(42)\quad \begin{cases} K = \dfrac{m}{2}(\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}) + m\,\mathfrak{x}\,(\mathfrak{u} \times \overline{\omega}) \\ + \dfrac{1}{2}\sum_\alpha [m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha\,\mathfrak{x}^\alpha)\overline{\omega} - m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha;\,\mathfrak{x}^\alpha)\,\overline{\omega}]\,\overline{\omega} \end{cases}$$

oder, wenn wir wieder den Ursprung des körperfesten Systems in den Schwerpunkt verlegen und die Trägheitsdyade θ Gl. (17) einführen:

$$(43)\qquad K = \frac{m}{2}(\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}) + \tfrac{1}{2}(\theta\,\overline{\omega})\,\overline{\omega}.$$

Führen wir wieder als x_1, x_2, x_3 Hauptträgheitsachsen ein, so folgt nach (19), (20)

$$(44)\qquad K = \frac{m}{2}(\dot{s}_x^2 + \dot{s}_y^2 + \dot{s}_z^2) + \tfrac{1}{2}(\theta_1\omega_1^2 + \theta_2\omega_2^2 + \theta_3\omega_3^2),$$

und wenn wir nach (7) die Eulerschen Winkel einführen,

$$(45)\quad \begin{cases} K = \dfrac{m}{2}(\dot{s}_x^2 + \dot{s}_y^2 + \dot{s}_z^2) + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2(\theta_1 \cos^2\varphi + \theta_2 \sin^2\varphi) \\ \quad + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2(\theta_1 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + \theta_2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \theta_3 \cos^2\vartheta) \\ \quad + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\theta_3 + \dot{\vartheta}\dot{\psi}(\theta_1 - \theta_2)\sin\vartheta \sin\varphi \cos\varphi + \dot{\varphi}\dot{\psi}\theta_3 \cos\vartheta. \end{cases}$$

Die generalisierten Kraftkomponenten $Q_x, Q_y, Q_z, Q_\vartheta, Q_\psi, Q_\varphi$ sind nach I, § 2, (4), wenn wir die Vektorbezeichnung einführen, durch

$$(46)\quad \sum_\alpha (\mathfrak{k}^\alpha \delta \mathfrak{q}^\alpha) = Q_x \delta s_x + Q_y \delta s_y + Q_z \delta s_z + Q_\vartheta \delta\vartheta + Q_\psi \delta\psi + Q_\varphi \delta\varphi$$

definiert. Entnehmen wir $\delta \mathfrak{q}^\alpha$ aus (9), so erhalten wir nach (12), (13)

$$(47)\quad \begin{cases} \sum_\alpha (\mathfrak{k}^\alpha \delta \mathfrak{q}^\alpha) = \sum_\alpha (\mathfrak{k}^\alpha \delta \mathfrak{s}) + \sum_\alpha \mathfrak{k}^\alpha (\delta \mathfrak{o} \times \mathfrak{r}^\alpha) = (\mathfrak{k} \delta \mathfrak{s}) + (\mathfrak{d} \delta \mathfrak{o}) \\ \quad = k_x \delta s_x + k_y \delta s_y + k_z \delta s_z + d_1 \delta o_1 + d_2 \delta o_2 + d_3 \delta o_3. \end{cases}$$

Setzen wir $\delta o_h = \omega_h \delta t$, $\delta\vartheta = \dot{\vartheta}\delta t$, $\delta\psi = \dot{\psi}\delta t$, $\delta\varphi = \dot{\varphi}\delta t$, so folgen aus (7) für die δo_h dieselben Ausdrücke in den $\delta\vartheta$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ wie dort für die ω_h in den $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$. Setzt man diese Formeln für δo_h in die rechte Seite von (47), so erhält man durch Koeffizientenvergleichung

$$(48)\quad \begin{cases} Q_x = k_x, \quad Q_y = k_y, \quad Q_z = k_z, \quad Q_\vartheta = d_1 \cos\varphi - d_2 \sin\varphi, \\ Q_\psi = d_1 \sin\vartheta \sin\varphi + d_2 \sin\vartheta \cos\varphi + d_3 \cos\vartheta, \quad Q_\varphi = d_3. \end{cases}$$

Wenn man dann mit dem K aus (45) die sechs Lagrangeschen Gleichungen I, § 2, (9) bildet, erhält man für die auf s_x, s_y, s_z bezüglichen wegen (48) gerade die Gl. (23), für ϑ, ψ, φ aber

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial K}{\partial \dot{\vartheta}} - \dfrac{\partial K}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} - \dfrac{\partial K}{\partial \psi} = Q_\psi, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} - \dfrac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \end{cases}$$

Wir haben in (23) und (49) sechs simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die sechs Lagekoordinaten $s_x, s_y, s_z, \vartheta, \psi, \varphi$ vor uns, wenn wir $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{d}$ als Funktionen der Koordinaten und ihrer zeitlichen Ableitungen ansehen.

§ 2. Kräftefreie Bewegung des starren Körpers.

1. Allgemeine Integration der Eulerschen Gleichungen. Wenn wir annehmen, daß keine äußeren Kräfte wirken, also $\mathfrak{k} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$ ist, so wird aus § 1, (22)

$$1)\quad \begin{cases} \theta_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} + (\theta_3 - \theta_2)\omega_2 \omega_3 = 0, \quad \theta_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} + (\theta_1 - \theta_3)\omega_1 \omega_3 = 0, \\ \theta_3 \dfrac{d\omega_3}{dt} + (\theta_2 - \theta_1)\omega_1 \omega_2 = 0. \end{cases}$$

aus § 1, (23) einfach $\ddot{s}_x = \ddot{s}_y = \ddot{s}_z = 0$. Das System von neun simultanen Differentialgleichungen § 1, (22), (23), (8) zerfällt also in das System (1) von drei simultanen Differentialgleichungen für $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, in drei Gleichungen für s_x, s_y, s_z, aus denen sofort folgt, daß diese Schwerpunktskoordinaten lineare Funktionen der Zeit werden, und in die drei simultanen Differentialgleichungen § 1, (8) für ϑ, ψ, φ, in die für $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die durch Integration von (1) bekannten Zeitfunktionen einzusetzen sind. Die Gl. (1) bestimmen die Bewegung eines frei beweglichen starren Körpers um seinen Schwerpunkt. Wird aber ein beliebiger Punkt des Körpers festgehalten, so gelten die Gl. (1) auch für die kräftefreie Bewegung um diesen Punkt, wobei aber das System von Hauptträgheitsachsen x_1, x_2, x_3 durch diesen festen Punkt als Ursprung gezogen werden muß (s. § 1, **3**).

Wir leiten zunächst zwei Integrale der Gl. (1) her, indem wir sie der Reihe nach mit $\theta_1 \omega_1, \theta_2 \omega_2, \theta_3 \omega_3$ multiplizieren und addieren. Wir erhalten $\theta_1^2 \omega_1 \dot{\omega}_1 + \theta_2^2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + \theta_3^2 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0$. Wenn wir dann die Gl. (1) mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ multiplizieren und addieren, erhalten wir analog: $\theta_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + \theta_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + \theta_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0$. Da die linken Seiten dieser beiden Beziehungen vollständige Ableitungen nach t sind, folgt aus ihnen durch Integration

$$(2) \qquad \theta_1^2 \omega_1^2 + \theta_2^2 \omega_2^2 + \theta_3^2 \omega_3^2 = \theta_0^2 \omega_0^2, \quad \theta_1 \omega_1^2 + \theta_2 \omega_2^2 + \theta_3 \omega_3^2 = \theta_0 \omega_0^2,$$

wo θ_0, ω_0 zwei passend eingeführte Integrationskonstante sind. Aus § 1, (20) und (44) folgt, daß die Gl. (2) die Konstanz des absoluten Betrages des Drehimpulses und der kinetischen Energie K aussagen; θ_0 und ω_0 sind dann das „charakteristische" Trägheitsmoment und die „charakteristische" Winkelgeschwindigkeit, die der Körper haben müßte, um bei Drehung um eine Hauptträgheitsachse in kinetischer Energie und Drehimpuls mit der wirklichen Bewegung übereinzustimmen.

Wenn wir den absoluten Betrag ω der momentanen Winkelgeschwindigkeit durch

$$(3) \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2$$

einführen, können wir aus (2) und (3) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als Funktionen von ω berechnen, in (1) einsetzen und erhalten eine einzige Differentialgleichung für ω, die durch Quadratur lösbar ist.

Sehen wir (2) und (3) als drei lineare Gleichungen in $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ an, so ist ihre Determinante das bekannte Differenzenprodukt $(\theta_1 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_3)$. Es ist sicher von Null verschieden, wenn alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind, wie wir von nun an annehmen wollen. Es sei

$$(4) \qquad \theta_1 > \theta_2 > \theta_3.$$

Durch Auflösung folgt dann

$$(5)\qquad \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{\theta_2\theta_3}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)}\,(\omega^2-\varepsilon_1^2), \\ \omega_2^2 = \dfrac{\theta_3\theta_1}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_1-\theta_2)}\,(\varepsilon_2^2-\omega^2), \\ \omega_3^2 = \dfrac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_3)}\,(\omega-\varepsilon_3^2), \end{cases}$$

wenn wir mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die folgenden Ausdrücke in den θ_h bezeichnen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1^2 = \dfrac{\theta_0(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{\theta_2\theta_3}\,\omega_0^2, \quad \varepsilon_2^2 = \dfrac{\theta_0(\theta_3+\theta_1-\theta_0)}{\theta_3\theta_1}\,\omega_0^2, \\ \varepsilon_3^2 = \dfrac{\theta_0(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{\theta_1\theta_2}\,\omega_0^2. \end{cases}$$

Aus (5) folgt durch Multiplikation und Wurzelziehen

$$(7)\qquad \omega_1\omega_2\omega_3 = \pm\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_3)}\sqrt{(\omega^2-\varepsilon_1^2)(\varepsilon_2^2-\omega^2)(\omega^2-\varepsilon_3^2)}.$$

Andererseits folgt aus den Gl. (1), wenn man sie der Reihe nach mit $\frac{\omega_1}{\theta_1}, \frac{\omega_2}{\theta_2}, \frac{\omega_3}{\theta_3}$ multipliziert und addiert,

$$(8)\qquad \omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_3)}{\theta_1.\theta_2.\theta_3}\,\omega_1\omega_2\omega_3.$$

Wenn man die aus (3) durch Differentiation folgende Beziehung

$$(9)\qquad \omega_1\dot{\omega}_1+\omega_2\dot{\omega}_2+\omega_3\dot{\omega}_3 = \omega\dot{\omega}$$

verwendet, folgt aus (7) und (8)

$$(10)\qquad \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = \pm\sqrt{(\omega^2-\varepsilon_1^2)(\varepsilon_2^2-\omega^2)(\omega^2-\varepsilon_3^2)},$$

also für ω^2 eine Differentialgleichung der Gestalt von I, § 3, (14). Der Anfangswert von ω muß so gewählt werden, daß der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist. Die Wahl des Vorzeichens ergibt sich aus den Anfangswerten von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, da nach (8) und (9) daraus das Vorzeichen von $\omega\dot{\omega}$, also der linken Seite von (10) folgt. Um den Bewegungsverlauf auf Grund der Betrachtungen von I, § 3, 3 zu untersuchen, müssen die Größen $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_3^2$ der Größe nach geordnet werden. Der Anfangszustand ist durch die Anfangswerte von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oder, was nach (2) und (3) auf dasselbe hinauskommt, durch die drei Konstanten $\theta_0, \omega_0, \omega^*$ gegeben, wobei ω^* der Anfangswert von ω ist. Dabei kann ω^* willkürlich vorgeschrieben werden, während θ_0 und ω_0 den Ungleichungen $\theta_1 \gtrless \theta_0 \gtrless \theta_3$, $\omega_0 \lessgtr \omega^*$ genügen müssen, die aus (2), (1) (mit $\omega = \omega^*$) und den zwischen den drei Hauptträgheitsmomenten

bestehenden Ungleichungen $\theta_1 \leqq \theta_2 + \theta_3$[1]) usw. folgen. Durch Subtrahieren der Gl. (6) voneinander erhalten wir:

$$(11)\qquad \begin{cases} \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 = \dfrac{\theta_0\,\omega_0^2}{\theta_1\,\theta_2\,\theta_3}(\theta_1 - \theta_2)\,(\theta_0 - \theta_3), \\ \varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2 = \dfrac{\theta_0\,\omega_0^2}{\theta_1\,\theta_2\,\theta_3}(\theta_2 - \theta_3)\,(\theta_0 - \theta_1), \\ \varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2 = \dfrac{\theta_0\,\omega_0^2}{\theta_1\,\theta_2\,\theta_3}(\theta_3 - \theta_1)\,(\theta_0 - \theta_2). \end{cases}$$

Aus den Ungleichungen zwischen den θ_h folgt dann $\varepsilon_2^2 \gtreqless \varepsilon_1^2$, $\varepsilon_2^2 \gtreqless \varepsilon_3^2$. Hingegen läßt sich das Vorzeichen der Differenz $\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2$ nicht angeben, da θ_0 sowohl kleiner als auch größer als das mittlere Hauptträgheitsmoment θ_2 sein kann. Wir wollen, um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, $\theta_0 \leqq \theta_2$ annehmen (im entgegengesetzten Falle verlaufen die Rechnungen ganz analog); dann gelten nach (4) und (11) die Ungleichungen

$$(12)\qquad \theta_1 > \theta_2 \geqq \theta_0 \geqq \theta_3 \qquad \varepsilon_2^2 \geqq \varepsilon_1^2 \geqq \varepsilon_3^2.$$

Damit in (10) die rechte Seite reell wird, müssen die Anfangsbedingungen der Ungleichung $\varepsilon_2^2 \geqq (\omega^*)^2 \geqq \varepsilon_1^2$ genügen. Dann bleibt nach I, § 3, 3 während der ganzen Bewegung ω^2 zwischen den Werten ε_1^2 und ε_2^2. Die Funktion K in I, § 3, (14) ist hier

$$\tfrac{1}{4} K(\omega^2) = (\omega^2 - \varepsilon_1^2)\,(\varepsilon_2^2 - \omega^2)\,(\omega^2 - \varepsilon_3^2).$$

Wenn $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_3^2$ voneinander verschieden sind, haben wir es mit einfachen Nullstellen von $K(\omega^2)$ zu tun und ω^2 ist eine periodische Funktion der Zeit, die mit der Periode

$$(13)\qquad T = \int_{\varepsilon_1^2}^{\varepsilon_2^2} \frac{d\,\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \varepsilon_1^2)\,(\varepsilon_2^2 - \omega^2)\,(\omega^2 - \varepsilon_3^2)}}$$

zwischen den Grenzen ε_1^2 und ε_2^2 hin und her pendelt. Ist hingegen wohl $\varepsilon_2^2 > \varepsilon_1^2$ aber $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_3^2$, so haben wir es mit einer doppelten Nullstelle von $F(\omega^2)$ zu tun; ω^2 nähert sich mit wachsender Zeit asymptotisch dem Wert $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_3^2$. Daraus folgt aber nach (5), daß sich ω_1^2 und ω_3^2 dem Wert Null nähern, daß also die Bewegung asymptotisch in eine gleichförmige Rotation um die Achse x_2 des mittleren Hauptträgheitsmoments übergeht. Die Gleichförmigkeit folgt daraus, daß nach (11) $\theta_2 = \theta_0$ wird, woraus wegen $\omega_1 = \omega_3 = 0$ aus (2) $\omega_2^2 = \omega_0^2$ sich ergibt. Die Bewegung ist also in diesem Falle eine unperiodische. Wenn hingegen $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2$ eine Doppelwurzel von $F(\omega^2) = 0$ ist, so folgt aus Gl. (11) $\theta_0 = \theta_3$. Das kann aber, weil θ_3 das kleinste Haupt-

[1]) Diese sind eine unmittelbare Folge der Definitionen der θ_h, s. 1. Bd., II, § 4, (18″).

trägheitsmoment ist, nach den Gl. (2) nur der Fall sein, wenn die Bewegung schon von Anfang an eine gleichförmige Rotation um die x_3-Achse war.

2. Explizite Gestalt der Lösungen für den periodischen Fall. Für den periodischen Fall, wo in (12) nirgends das Gleichheitszeichen gilt, wollen wir Formeln für die Lösungen aufsuchen. Da ω^2 für alle Zeiten zwischen ε_1^2 und ε_2^2 bleibt, können wir einen Hilfswinkel η einführen:

$$\omega^2 = \varepsilon_1^2 \sin^2\eta + \varepsilon_2^2 \cos^2\eta = \varepsilon_2^2 - (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\sin^2\eta. \tag{14}$$

Daher ist

$$\begin{cases} \omega^2 - \varepsilon_1^2 = (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\cos^2\eta, & \varepsilon_2^2 - \omega^2 = (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\sin^2\eta, \\ \omega^2 - \varepsilon_3^2 = (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2)(1 - k^2\sin^2\eta), \end{cases} \tag{15}$$

wobei

$$k^2 = \frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}, \qquad 0 < k^2 < 1. \tag{16}$$

Ferner folgt aus (14)

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = -(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\sin\eta\cos\eta\frac{d\eta}{dt} \tag{17}$$

und durch Einsetzen von (15) und (17) in (10)

$$\frac{d\eta}{dt} = \sqrt{(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2)}\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta} \tag{18}$$

und durch eine Quadratur

$$\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}\,(t - t_0) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta}}, \tag{19}$$

wenn t_0 eine Integrationskonstante ist, nämlich der Zeitpunkt, in dem der Körper die Lage $\eta = 0$ (d. h. $\omega^2 = \varepsilon_2^2$) einnimmt.

Das Integral in (19) ist das im 1. Bd., III, § 5, **3**, (11''') eingeführte elliptische Integral erster Gattung $F(k, \eta)$. Setzt man darin $\sin\eta = z$, so geht es in die Legendresche Normalform (1. Bd., III, § 5, **4**, S. 140) über. Die Umkehrungsfunktion ist die dort eingeführte sin am:

$$z = \sin\eta = \sin\mathrm{am}\,[\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}\,(t - t_0)]. \tag{20}$$

Daraus folgt aus (5), (16), (14) unter Verwendung der im 1. Bd., III, § 5, **4** definierten elliptischen Funktionen cos am und Δ am

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{\dfrac{\theta_0(\theta_0 - \theta_3)}{\theta_1(\theta_1 - \theta_3)}}\cos\mathrm{am}\,[\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}\,(t - t_0)], \\ \omega_2 = -\omega_0\sqrt{\dfrac{\theta_0(\theta_0 - \theta_3)}{\theta_2(\theta_2 - \theta_3)}}\sin\mathrm{am}\,[\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}\,(t - t_0)], \\ \omega_3 = \omega_0\sqrt{\dfrac{\theta_0(\theta_1 - \theta_0)}{\theta_3(\theta_1 - \theta_3)}}\,\Delta\,\mathrm{am}\,[\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}\,(t - t_0)]. \end{cases} \tag{21}$$

Die Vorzeichen müssen bei positiv gezogenen Quadratwurzeln so gewählt werden, weil bei positivem ω_3 nach der ersten Gl. (1) wegen (4) $\dot{\omega}_1$ und ω_2 im Vorzeichen übereinstimmen und nach 1. Bd., III, § 5, (20) die Beziehung $d \cos \operatorname{am} t/dt = -\sin \operatorname{am} t \Delta \operatorname{am} t$ besteht. Die Gl. (11) geben die allgemeinste Lösung der Eulerschen Gleichungen (1), weil sie drei willkürliche Konstanten ω_0, ϑ_0, t_0 enthalten.

Um die Lagekoordinaten ϑ, ψ, φ als Funktionen der Zeit und von drei weiteren willkürlichen Konstanten (den Anfangswerten der ϑ, ψ, φ) zu erhalten, muß man für ω_1, ω_2, ω_3 die Ausdrücke (21) in die kinematischen Gleichungen § 1, (8) einsetzen und diese integrieren. In unserem Falle kann man sich die Aufgabe durch einen Umweg um die Differentialgleichungen für die Richtungskosinusse a_1, a_2, ..., c_3, § 1, (6) erleichtern. Aus § 1, (13) folgt wegen $\mathfrak{d} = 0$ die zeitliche Konstanz des Impulsvektors i. Wählen wir ihn zur z-Achse des raumfesten Systems, so sind seine Komponenten im körperfesten nach § 1, (20): $\theta_1 \omega_1$, $\theta_2 \omega_2$, $\theta_3 \omega_3$, sein absoluter Betrag nach (2) $\vartheta_0 \omega_0$ und daher die Richtungskosinusse der z-Achse:

$$c_1 = \frac{\theta_1 \omega_1}{\vartheta_0 \omega_0}, \quad c_2 = \frac{\theta_2 \omega_2}{\vartheta_0 \omega_0}, \quad c_3 = \frac{\theta_3 \omega_3}{\vartheta_0 \omega_0}. \tag{22}$$

Diese c_1, c_2, c_3 bilden, wenn ω_1, ω_2, ω_3 den Gl. (1) genügen, eine partikuläre Lösung des Systems § 1, (6). Durch die letzten drei Gleichungen § 1, (2) kann man von den c_1, c_2, c_3 zu den ϑ, φ übergehen; es ist nämlich

$$\frac{c_1}{c_2} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\theta_1 \omega_1}{\theta_2 \omega_2}, \quad c_3 = \cos \vartheta = \frac{\theta_3 \omega_3}{\vartheta_0 \omega_0} \tag{23}$$

und

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} = \frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2}, \quad \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} = \frac{c_2}{c_1^2 + c_2^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die letzte der Gl. § 1, (8) ergibt sich

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2}{c_1^2 + c_2^2}. \tag{24}$$

Setzt man für c_1, c_2 ihre Werte aus (22), eliminiert dann ω_1, ω_2 vermöge der ersten Gl. (2), so folgt aus (24) durch eine Quadratur

$$\psi = \vartheta_0 \omega_0 \int_{t_0}^{t} \frac{\vartheta_0 \omega_0^2 + \theta_3 \omega_3^2}{\vartheta_0^2 \omega_0^2 - \theta_3^2 \omega_3^2} \, dt + \psi_0. \tag{25}$$

Dabei bedeutet ψ_0 den willkürlichen Anfangswert von ψ. Da in ω_3 nach (21) drei willkürliche Konstanten stecken und zwei willkürliche Konstanten die Lage des Impulsvektors im Raume bestimmen, so ist in (23) und (25) die allgemeinste Lösung mit sechs willkürlichen Kon-

stanten enthalten. Nun sind ω_1, ω_2, ω_3 periodische Funktionen der Zeit mit der Periode T, die sich nach (13) und (14) auch

$$T = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \tag{26}$$

schreiben läßt. Nach (23), (24) sind auch $\cos\vartheta$, $\operatorname{tg}\varphi$ und $\dot{\psi}$ Funktionen der Zeit mit der Periode T.

Man sieht leicht ein: φ wächst beständig und muß daher während einer Periode T gerade um 2π zunehmen, damit $\operatorname{tg}\varphi$ seinen alten Wert annimmt; hingegen pendelt ϑ zwischen zwei Grenzwerten (die den Werten $\omega = \varepsilon_1$ und $\omega = \varepsilon_2$ entsprechen) hin und her und vollführt in der Zeit T gerade eine volle Schwingung. Für ψ folgt aus $\dot{\psi}(t + T) = \dot{\psi}(T)$ durch Integration $\psi(t + T) = \psi(t) + \text{konst.}$, d. h. ψ wächst in jeder Periode um denselben konstanten Betrag.

3. Quasistatische Bewegungen. Als einfachstes Lösungssystem untersuchen wir die quasistatischen Bewegungen in bezug auf das Impulsintegral $f = \theta_1^2\omega_1^2 + \theta_2^2\omega_2^2 + \theta_3^2\omega_3^2 - \theta_0^2\omega_0^2 = 0$. Nach II, § 1, 3 lassen sich diese Bewegungen dadurch definieren, daß $\delta H = 0$ sein soll für alle δq_h, δp_h, die der Bedingungsgleichung $f = 0$ genügen. Da in dieser Form die Regel unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, können wir sie auch anwenden, wenn die Hamiltonsche Funktion H und das Integral f überhaupt nicht durch Lagekoordinaten und deren Ableitungen, sondern durch Lagekoordinaten und Drehungskomponenten ω_1, ω_2, ω_3 ausgedrückt sind. Bei kräftefreier Bewegung ist einfach $H = K = \frac{1}{2}(\theta_1\omega_1^2 + \theta_2\omega_2^2 + \theta_3\omega_3^2)$ und die Bedingungen $\delta(H + \lambda f) = 0$ lauten, wenn wir ω_1, ω_2, ω_3 als unabhängige Veränderliche ansehen,

$$\theta_1\omega_1(1 + 2\lambda\theta_1) = 0, \quad \theta_2\omega_2(1 + 2\lambda\theta_2) = 0, \quad \theta_3\omega_3(1 + 2\lambda\theta_3) = 0. \tag{27}$$

Wegen der Verschiedenheit der Hauptträgheitsmomente (4) kann von den eingeklammerten Faktoren höchstens einer verschwinden. Es sei z. B. $1 + 2\lambda\theta_3 = 0$. Aus dem Nichtverschwinden der beiden übrigen folgt dann $\omega_1 = \omega_2 = 0$ und aus $f = 0$ die zeitliche Konstanz von ω_3. Es ergibt sich also eine gleichförmige Rotation um die Hauptträgheitsachse x_3. Ebenso sind natürlich die Rotationen um die beiden anderen Hauptträgheitsachsen quasistatisch in bezug auf das Impulsintegral. Wenn man die Rotation um die x_3-Achse auf ihre Stabilität untersuchen will, so muß man nach II, § 2, 2 die Größe ω_3 mit Hilfe von $f = 0$ aus H eliminieren und dann in eine Potenzreihe nach den Zuwächsen $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$ um die quasistatische Bewegung entwickeln. Da aber diese durch $\omega_1 = \omega_2 = 0$ gegeben ist, sind ω_1 und ω_2 selbst die

Abweichungen von der quasistatischen Bewegung. Um ΔH im Sinne von II, § 2, (3) zu bilden, hat man also nur ω_3^2 aus $f = 0$ auszurechnen, in H einzusetzen und den Wert von H für $\omega_1 = \omega_2 = 0$ abzuziehen. Auf diese Weise erhält man:

$$2\Delta H = \frac{1}{\theta_3}[\omega_1^2\theta_1(\theta_3 - \theta_1) + \omega_2^2\theta_2(\theta_3 - \theta_2)]. \tag{28}$$

Hier ist ΔH selbst schon eine quadratische Form in den Störungsgrößen ω_1, ω_2. Sie ist positiv definit, wenn $\theta_3 > \theta_1$ und $\theta_3 > \theta_2$; sie ist negativ definit, wenn $\theta_3 < \theta_1$, $\theta_3 < \theta_2$. In beiden Fällen ist also die Grundbewegung stabil, d. h. die gleichförmige Rotation um die Achse des größten oder kleinsten Hauptträgheitsmomentes ist stabil. Wenn hingegen x_3 die Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes ist, also z. B. $\theta_3 < \theta_2$ aber $\theta_3 > \theta_1$, wird die quadratische Form (28) indefinit. Die Rotation um diese Achse ist nicht stabil.

4. Der symmetrische Kreisel. Wir betrachten nun nicht mehr den Fall, daß alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden sind, sondern nehmen an, daß zwei unter ihnen gleich sind.

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta', \quad \theta_3 = \theta. \tag{29}$$

Der Körper wird dann symmetrischer Kreisel und die x_3-Achse seine „Figurenachse“ genannt. Das System der Hauptträgheitsachsen ist dann nach den Betrachtungen im 1. Bd., II, § 2, **3** nicht mehr eindeutig bestimmt; sondern alle Geraden in der x_1, x_2-Ebene durch den Ursprung sind gleichberechtigt. Der Ausdruck für die lebendige Kraft § 1, (45) wird in diesem Falle, wenn wir immer noch einen Punkt festgehalten denken ($\dot{s}_x = \dot{s}_y = \dot{s}_z = 0$):

$$K = \tfrac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\theta' + \tfrac{1}{2}\dot{\psi}^2(\theta'\sin^2\vartheta + \theta\cos^2\vartheta) + \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2\theta + \dot{\varphi}\dot{\psi}\theta\cos\vartheta. \tag{30}$$

Da wegen der Abwesenheit äußerer Kräfte $K = L$ ist, so sind im Sinne von II, § 1, **1** φ und ψ „verborgene“ Koordinaten und ϑ, der Winkel zwischen der Figurenachse und der raumfesten z-Achse, die einzige „wahrnehmbare“ Koordinate. Man erhält nach II, § 1, **2** ∞^4 quasistatische Bewegungen, wenn man $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ und ϑ gleich Konstanten setzt.

$$\dot{\varphi} = \nu, \quad \dot{\psi} = \mu, \quad \vartheta = \vartheta^*. \tag{31}$$

Dabei muß die Beziehung $\dfrac{\partial K}{\partial \vartheta} = 0$ bestehen; dieser Ausdruck ist aus (30) durch Differentiation zu berechnen, und nachträglich sind die Werte aus (31) einzusetzen. Die Beziehung lautet dann

$$\mu\sin\vartheta^*[\mu(\theta' - \theta)\cos\vartheta^* - \nu\theta] = 0. \tag{32}$$

Wenn wir von den trivialen Fällen $\mu = 0$ und $\sin\vartheta^* = 0$ absehen, folgt daraus:

$$(33) \qquad \cos\vartheta^* = \frac{\nu}{\mu}\frac{\theta}{\theta' - \theta} \quad \text{oder} \quad \mu = \nu\frac{\theta}{(\theta' - \theta)\cos\vartheta^*}.$$

Die Bewegung besteht also darin, daß der Kreisel mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ν um die Figurenachse rotiert und diese gleichzeitig mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit μ einen Kreiskegel vom Öffnungswinkel ϑ^* um die raumfeste z-Achse beschreibt. Eine solche Bewegung nennt man „reguläre Präzession". Durch Integration von (31) erhält man die expliziten Formeln

$$(34) \qquad \varphi = \nu(t - t_0), \quad \psi = \mu(t - t_0) + \psi_0, \quad \vartheta = \vartheta^*.$$

Diese Formeln enthalten die vier willkürlichen Konstanten μ, ν, t_0, ψ_0, da ja ϑ^* sich nach (33) durch μ und ν ausdrücken läßt. Da aber keine Richtung im Raume ausgezeichnet ist, kann man jede Gerade durch den festgehaltenen Punkt zur z-Achse wählen. Da zwei Konstante zur Festlegung einer Richtung notwendig sind, so erhalten wir aus (34) durch Variation der z-Achse eine Lösung mit sechs willkürlichen Konstanten. Das ist aber die allgemeinste Lösung der drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für ϑ, φ, ψ. Beim symmetrischen Kreisel lassen sich also alle Bewegungen durch Betrachtung der quasistatischen erhalten. Es gibt nur reguläre Präzessionen.

Haben wir schließlich den „Kugelkreisel" vor uns, wo alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, gibt es nur gleichförmige Rotationen um feste Achsen.

§ 3. Bewegung im Schwerefeld.

1. Allgemeine Theorie. Die Wirkung der Schwerkraft kann man immer so auffassen, als würde im Schwerpunkt des Körpers eine vertikal nach abwärts gerichtete Kraft vom Betrage mg wirken; ziehen wir die z-Achse vertikal nach aufwärts, so ist in § 1, (13), (14)

$$(1) \qquad \mathfrak{k} = -mg\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{d} = 0$$

zu setzen, wenn $\mathfrak{c}$ der vertikal nach aufwärts gerichtete Einheitsvektor ist und der Schwerpunkt als Ursprung des körperfesten Systems gewählt wird, so daß in bezug auf ihn die Schwerkraft kein Drehmoment hat. Nach § 1, (14) bewegt sich dann der Schwerpunkt wie ein freier materieller Punkt im Schwerefeld und die Drehung um den Schwerpunkt gehorcht denselben Gesetzen wie die kräftefreie Bewegung um einen festgehaltenen Punkt. Das führt auf den Fall von § 2 zurück. Um zu einem neuen Problem zu kommen, müssen wir annehmen, daß ein vom Schwerpunkt verschiedener Punkt des Körpers festgehalten

wird. In diesen Punkt verlegen wir den Ursprung des raumfesten und körperfesten Systems, auf ihn beziehen sich jetzt das Drehmoment $\mathfrak{d}$, der Drehimpuls $\mathfrak{i}$ und die Trägheitsmomente θ_k. Da ein Punkt festgehalten ist, kommt von den Bewegungsgleichungen (14) nur die zweite in Betracht. Weil die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Ursprungs verschwindet ist nach § 1, (18) $\mathfrak{i} = \theta\,\overline{\omega}$, und nach § 1, (12a)

$$\mathfrak{d} = \sum_\alpha m_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha \times \mathfrak{f}^\alpha) = m(\mathfrak{x} \times \sum_\alpha \mathfrak{f}^\alpha) = m(\mathfrak{x} \times \mathfrak{f}),$$

also nach der auch jetzt geltenden ersten Gl. (1)

$$\mathfrak{d} = -mg(\mathfrak{x} \times \mathfrak{c}), \tag{2}$$

wo $\mathfrak{x}$ mit den Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 den Ortsvektor des Schwerpunktes bedeutet. Durch Einsetzen in die Eulerschen Gleichungen § 1, (21) erhält man in Verbindung mit § 1, (5)

$$\frac{\partial \mathfrak{i}}{\partial t} + (\overline{\omega} \times \mathfrak{i}) + mg(\mathfrak{x} \times \mathfrak{c}) = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} + (\overline{\omega} \times \mathfrak{c}) = 0. \tag{3}$$

Setzt man $\mathfrak{i} = \theta\,\overline{\omega}$ und zerlegt in Komponenten, so wird daraus

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\theta_3 - \theta_2)\omega_2\omega_3 + mg(\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2) = 0,\\ &\theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\theta_1 - \theta_3)\omega_1\omega_3 + mg(\xi_3 c_1 - \xi_1 c_3) = 0,\\ &\theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (\theta_2 - \theta_1)\omega_1\omega_2 + mg(\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dc_1}{dt} + \omega_2 c_3 - \omega_3 c_2 = 0, \quad \frac{dc_2}{dt} + \omega_3 c_1 - \omega_1 c_3 = 0,\\ &\frac{dc_3}{dt} + \omega_1 c_2 - \omega_2 c_1 = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die Gl. (4), (5) bilden ein System von sechs simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der sechs Unbekannten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, c_1, c_2, c_3$. Es lassen sich nicht mehr wie im Falle der freien Bewegung (§ 2) die drei Eulerschen Gleichungen (4) für sich integrieren.

Nun lassen sich drei Integrale des Systems (4), (5) sofort finden. Multiplizieren wir die Gl. (4) der Reihe nach mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, addieren sie und berücksichtigen (5), so erhalten wir $\theta_1\omega_1\dot{\omega}_1 + \theta_2\omega_2\dot{\omega}_2 + \theta_3\omega_3\dot{\omega}_3 + mg(\xi_1\dot{c}_1 + \xi_2\dot{c}_2 + \xi_3\dot{c}_3) = 0$. Wenn wir hingegen die Gl. (4) der Reihe nach mit c_1, c_2, c_3, die Gl. (5) mit $\theta_1\omega_1, \theta_2\omega_2, \theta_3\omega_3$ multiplizieren und alle sechs addieren, erhalten wir $\theta_1 c_1\dot{\omega}_1 + \theta_2 c_2\dot{\omega}_2 + \theta_3 c_3\dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_1\dot{c}_1 + \theta_2\omega_2\dot{c}_2 + \theta_3\omega_3\dot{c}_3 = 0$. Aus der Gl. (5) allein folgt durch Multiplikation mit c_1, c_2, c_3 und Addition $c_1\dot{c}_1 + c_2\dot{c}_2 + c_3\dot{c}_3 = 0$.

Da die linken Seiten dieser Beziehungen vollständige Differentialquotienten nach der Zeit sind, folgt durch Integration:

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}(\theta_1\omega_1^2 + \theta\omega_2^2 + \theta_3\omega_3^2) + mg(\xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \xi_3 c_3) = \text{konst.},$$

$$(7) \qquad \theta_1\omega_1 c_1 + \theta_2\omega_2 c_2 + \theta_3\omega_3 c_3 = \text{konst.},$$

$$(8) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \text{konst.},$$

also drei Integrale, die algebraische Funktionen der Unbekannten sind. Es zeigt sich, daß man ein viertes algebraisches Integral im allgemeinen nicht finden kann, sondern nur in drei Fällen, die durch besondere Verteilung der Massen ausgezeichnet sind.

Erstens: im Falle, wo der Schwerpunkt in den festgehaltenen Punkt fällt. Dann ist $\xi = 0$, also $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, und die Gl. (4) reduzieren sich auf die Gl. § 2, (1), sie haben also nach § 2, (2) als viertes Integral: $\theta_1^2\omega_1^2 + \theta_2^2\omega_2^2 + \theta_3^2\omega_3^2 = \text{konst.}$ (Eulerscher Fall).

Zweitens: im Falle des symmetrischen Kreisels (§ 2, 4), wenn der Schwerpunkt und der festgehaltene Punkt auf der Figurenachse (der x_3-Achse) liegen, lautet wegen $\theta_1 = \theta_2$ und $\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1 = 0$ die letzte Gl. (4) einfach $\dot{\omega}_3 = 0$, und wir haben das vierte Integral $\omega_3 = \text{konst.}$ (Lagrangescher Fall).

Drittens: im Falle des symmetrischen Kreisels ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$), wenn außerdem $\theta_3 = 2\theta$ ist und der Schwerpunkt nicht auf der Figurenachse, sondern in der x_1, x_2-Ebene liegt ($\xi_3 = 0$). Auf diesen Fall (den von Sonja Kowalewska) gehen wir hier nicht näher ein.

2. Symmetrischer Kreisel. Quasistatische Bewegung. Ausführlicher soll nur der Lagrangesche Fall besprochen werden. Wir berechnen die Lagrangesche Funktion $L = K - V$. Dabei ist K aus § 2, (30) zu entnehmen. Die in den Bewegungsgleichungen § 1, (49) vorkommenden Kraftkomponenten Q_ϑ, Q_ψ, Q_φ ergeben sich aus § 1, (48), wenn für d_1, d_2, d_3 nach § 3, (2) die Komponenten von $\mathfrak{d}$ eingesetzt werden. Wenn mit ξ der Abstand des Schwerpunktes vom festgehaltenen Punkt bezeichnet wird, ist $d_1 = mg\xi c_2$, $d_2 = -mg\xi c_1$, $d_3 = 0$. Dabei ist $Q_\varphi = Q_\psi = 0$, $Q_\vartheta = mg\xi\sin\vartheta$ und $V = mg\xi\cos\vartheta$. Daraus folgt:

$$(9) \quad L = \tfrac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\theta' + \tfrac{1}{2}\dot{\psi}^2(\theta'\sin^2\vartheta + \theta\cos^2\vartheta) + \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2\theta + \dot{\varphi}\dot{\psi}\theta\cos\vartheta - mg\xi\cos\vartheta.$$

Setzt man die quasistatische Bewegung wieder in der Gestalt von § 2, (31) an, so ergibt sich der Wert ϑ^* jetzt nach II, § 1, 2 aus der Gleichung $\dfrac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0$. Das ergibt nach (9) und § 2, (31) die Beziehung

$$(10) \qquad \mu^2(\theta' - \theta)\cos\vartheta^* - \mu\nu\theta + mg\xi = 0,$$

die jetzt an Stelle von § 2, (32) tritt. Durch Integration ergeben sich wieder die Gl. § 2, (34); es existieren also wieder reguläre Präzessions-

bewegungen, die von vier willkürlichen Konstanten abhängen. Nur ist jetzt die z-Achse, um welche die Figurenachse den Kegelmantel beschreibt, im Raume ausgezeichnet, es ist die Richtung der Schwerkraft. Man kann daher nicht wie bei der kräftefreien Bewegung, die Lage der z-Achse beliebig wählen. Es gibt nur Präzessionsbewegungen um die Vertikale als Kegelachse. Diese können daher nicht alle möglichen Bewegungen erschöpfen. Aus (10) folgt übrigens durch Auflösung nach μ

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\theta}{2(\theta'-\theta)\cos\vartheta^*} \pm \sqrt{\frac{\theta^2\nu^2 - 4mg\xi(\theta'-\theta)\cos\vartheta^*}{4(\theta'-\theta)^2\nu^2\cos^2\vartheta^*}}. \tag{11}$$

Eine reguläre Präzession kann also nur eintreten, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist. Sobald er aber positiv ist, gibt es immer zwei Werte von μ, also Präzessionsbewegungen mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten, die „schnelle“ und die „langsame“ Präzession.

3. Symmetrischer Kreisel. Allgemeinste Bewegung. Bei der allgemeinen Integration der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen bedienen wir uns, da zwei verborgene Koordinaten φ und ψ vorhanden sind, der in II, § 1, **1** auseinandergesetzten Methode. Es ist nach (9)

$$\begin{cases} u_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \theta\,(\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi), \\ u_\psi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \theta'\sin^2\vartheta\,\dot\psi + \theta\cos\vartheta\,(\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi). \end{cases} \tag{12}$$

Wir bilden nun aus (9) und (12) nach I, § 2, (55) die Routhsche Funktion R

$$R(\vartheta,\dot\vartheta,\varphi,u_\varphi,\psi,u_\psi) = L - \dot\varphi\,u_\varphi - \dot\psi\,u_\psi. \tag{13}$$

Durch Auflösen von (12) nach $\dot\varphi$, $\dot\psi$ und Einsetzen in (13) ergibt sich

$$\begin{cases} R = \tfrac{1}{2}\theta'\dot\vartheta^2 - V^*(\vartheta), \\ V^*(\vartheta) = mg\xi\cos\vartheta + \dfrac{1}{2}\dfrac{u_\varphi^2}{\theta} + \dfrac{(u_\psi - u_\varphi\cos\vartheta)^2}{2\theta'\sin^2\vartheta}. \end{cases} \tag{14}$$

Man kann dann nach II, § 1 (2) für die einzige vorhandene Koordinate ϑ eine nur sie enthaltende Differentialgleichung aufstellen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot\vartheta} - \frac{\partial R}{\partial\vartheta} = 0 \quad\text{oder}\quad \theta'\ddot\vartheta = -\frac{\partial V^*}{\partial\vartheta}. \tag{15}$$

Multiplizieren wir beiderseits mit $\dot\vartheta$ und intregrieren, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\theta'\dot\vartheta^2 + V^*(\vartheta) = h, \tag{16}$$

wo h eine willkürliche Konstante ist. Setzen wir für V^* seinen Wert aus (14) in (16) ein und führen anstatt ϑ die Veränderliche $\cos\vartheta = \sigma$ ein, so wird aus (16)

$$(17)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\theta'^2}\left[\theta'(1-\sigma^2)\left(2h - 2mg\xi\sigma - \frac{1}{\theta}u_\varphi^2\right) - (u_\psi - \sigma u_\varphi)^2\right].$$

Das ist wieder eine Gleichung von der Gestalt I, § 3, (14). Um den Verlauf der Lösung kennenzulernen, müssen wir die Nullstellen der Funktion $F(\sigma)$ auf der rechten Seite von (17) untersuchen. Wenn wir die x_3-Achse so gezogen denken, daß der Schwerpunkt auf der negativen Hälfte liegt, ist $\xi < 0$ und man kann das Vorzeichen von $F(\sigma)$ für gewisse Argumente sofort erkennen. Es folgt aus (17)

$$(18)\qquad \begin{cases} F(-\infty) > 0,\ F(-1) = -\left(\dfrac{u_\psi + u_\varphi}{\theta'}\right)^2 \leqq 0, \\ F(+1) = -\left(\dfrac{u_\psi - u_\varphi}{\theta'}\right)^2 \leqq 0. \end{cases}$$

Wegen der Stetigkeit von $F(\sigma)$ muß von den drei Nullstellen der Gleichung dritten Grades $F(\sigma) = 0$ mindestens eine reell und negativ sein; sie heiße $-S$. Da eine wirkliche Bewegung nur von einem Anfangszustand möglich ist, für den $F(\sigma)$ positiv ist, gilt, wenn $\sigma_0 = \cos\vartheta_0$ der Anfangswert von σ ist:

$$(19)\qquad F(\sigma_0) \geqq 0 \qquad -1 \leqq \sigma_0 \leqq +1.$$

Aus (18) und (19) folgt aber, daß zwei reelle Nullstellen $\sigma_1 = \cos\vartheta_1$ und $\sigma_2 = \cos\vartheta_2$ zwischen -1 und $+1$ liegen müssen; es ist also

$$(20)\qquad -\infty < -S \leqq -1 \leqq \sigma_1 \leqq \sigma_0 \leqq \sigma_2 \leqq +1.$$

Die Gl. (17) schreibt sich also

$$(21)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = F(\sigma) = -\frac{2mg\xi}{\theta'}(\sigma + S)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma - \sigma_1).$$

Wenn $\sigma_1 > -1$ ist, kann es nicht mit $-S$ zusammenfallen; ist es auch von σ_2 verschieden, so sind σ_1 und σ_2 einfache Nullstellen von $F(\sigma)$. Nach I, § 3, 3 schwankt dann σ fortwährend periodisch zwischen den Werten σ_1 und σ_2 hin und her, also auch ϑ zwischen den Werten ϑ_1 und ϑ_2, d. h. die Figurenachse pendelt fortwährend im Zwischenraum von zwei Kegelmänteln mit vertikaler Achse hin und her, wobei sie in gleichen Zeitabschnitten den Kegel mit dem Öffnungswinkel $2\vartheta_1$ bzw. $2\vartheta_2$ berührt. Wenn man dann eine Hilfsvariable η durch

$$(22)\qquad \sigma = \sigma_1 \sin^2\eta + \sigma_2 \cos^2\eta = \sigma_2 - (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\eta$$

einführt, erhält man analog zu § 2, (10), (14), (19), wenn man beachtet, daß an Stelle des dortigen ε_1^2, ε_2^2, ε_3^2 hier σ_1, σ_2, $-S$ tritt:

$$(23)\quad \lambda(t-t_0) = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}},\quad \lambda = \sqrt{\frac{-mg\xi(\sigma_2+S)}{2\theta'}},\quad k^2 = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+S}.$$

Durch Auflösung nach η und Einsetzen in (22) folgt dann bei Verwendung der im 1. Bd., III, § 5, 4 definierten Funktion sinus amplitudinis, wenn man wieder $\sigma = \cos\vartheta$ setzt:

$$(24)\qquad \cos\vartheta = \cos\vartheta_2 - (\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1)[\sin\mathrm{am}\,\lambda(t-t_0)]^2.$$

Löst man die Gl. (12) nach $\dot\varphi$, $\dot\psi$ auf, so erhält man

$$(25)\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_\varphi(\theta'\sin^2\vartheta + \theta\cos^2\vartheta) - u_\psi\theta\cos\vartheta}{\theta\theta'\sin^2\vartheta},\quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{u_\varphi\cos\vartheta - u_\psi}{\theta'\sin^2\vartheta}.$$

Führen wir hier nach (24) $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ als Funktionen von t ein, so erhält man durch Quadratur φ und ψ als Funktion der Zeit und der sechs Integrationskonstanten h, u_φ, u_ψ, t_0, φ_0, ψ_0, wo φ_0, ψ_0 die durch die Integration von (25) hinzugekommenen Werte von φ und ψ zur Zeit t_0 sind. Die Gl. (24), (25) geben die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichungen. Danach sind $\cos\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ periodische Funktionen der Zeit mit der Periode T,

$$(26)\qquad T = 2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\sqrt{F(\sigma)}} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}},$$

wo die zweite Form aus der ersten durch die Substitution (22) hervorgeht. Wenn daher t um T wächst, nimmt $\cos\vartheta$ seinen alten Wert wieder an, während φ und ψ, wie in § 2, um gewisse Konstante zunehmen. Die Bewegung besteht also aus einer „Rotation“ um die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$, einer „Präzession“ der Figurenachse, die aber keine reguläre ist, weil die Figurenachse keinen Kegelmantel beschreibt, sondern während der Präzession zwischen zwei Kegelmänteln hin und her pendelt und als dritter Komponente diesen Pendelungen oder „Nutationen“ der Figurenachse. Wenn $\vartheta_1 = \vartheta_2$ wird, haben wir reguläre Präzession vor uns. Wenn aber $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, aber beide sehr wenig voneinander verschieden sind, so findet eine Bewegung statt, die praktisch von der regulären Präzession nicht zu unterscheiden ist. Nur bei genauem Zusehen wird man kleine „Nutationen“ bemerken, periodische Pendelungen der Figurenachsen, die sich über die Präzessionsbewegung überlagern. Diese Bewegung heißt „pseudoreguläre Präzession“. Man kann sie im Sinne von II, § 3 als kleine Schwingung um eine quasistatische Bewegung auffassen.

Man kann schließlich zeigen, daß gerade die gewöhnlichsten Anfangsbedingungen bei Kreiselversuchen auf solche pseudoreguläre Präzessionen führen. Wenn man nämlich am Anfang dem Kreisel nur eine Rotation um die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit ν erteilt und ihn im übrigen sich selbst überläßt, lauten die Anfangsbedingungen $\dot{\vartheta} = \dot{\psi} = 0$, $\dot{\varphi} = \nu$. Dann folgt für die Integrationskonstanten h, u_φ, u_ψ aus den Gl. (12), (14), (16) $u_\varphi = \theta\nu$, $u_\psi = \theta\sigma_0\nu$, $h = mg\xi\sigma_0 + \theta\nu^2/2$. Dann wird aus (17)

$$(27) \qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = F(\sigma) = \frac{\sigma_0 - \sigma}{\theta'^2}\,[2\theta'(1-\sigma^2)mg\xi - \theta\nu^2(\sigma_0 - \sigma)].$$

Von den beiden Nullstellen von $F(\sigma)$ zwischen -1 und $+1$ ist eine offenbar σ_0 selbst. Die zweite ist σ_0 nahe benachbart, wenn das zweite Glied in der eckigen Klammer gegenüber dem ersten für den Wert des Klammerausdruckes überwiegend in Betracht kommt, wenn also die lebendige Kraft $\theta\nu^2/2$ der Kreiselrotation groß ist und gegenüber der potentiellen Energie $mg\xi$. Wenn man also dem Kreisel eine starke Rotation um die Figurenachse erteilt und diese dann mit der Neigung ϑ_0 gegen die Vertikale sich selbst überläßt, beschreibt die Figurenachse, oberflächlich betrachtet, einen Kegelmantel vom Öffnungswinkel $2\vartheta_0$; in Wirklichkeit aber führt sie kleine Pendelungen „Nutationen" zwischen dem Kegel vom Öffnungswinkel $2\vartheta_0$ und einem sehr benachbarten Kegel von etwas größerem Öffnungswinkel aus.

Wenn σ_1 in (21) eine Doppelwurzel ist, so haben wir nach I, § 3, **3** keine periodische Bewegung mehr vor uns, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

4. Pendelschwingungen mit endlicher Amplitude. Wenn wir dem Körper keine anfängliche Rotation erteilen, so lauten die Anfangsbedingungen $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, und wenn wir eine Anfangsgeschwindigkeit ω_0 in der Vertikalebene zulassen, $\dot{\vartheta} = \omega_0$. Die Integrationskonstanten lauten dann nach Gl. (12), (16), (14) $u_\varphi = u_\psi = 0$, $h = \theta'\omega_0^2/2 + mg\xi\sigma_0$. Aus Gl. (17) wird dann

$$(28) \qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = F(\sigma) = \frac{1-\sigma^2}{\theta'}\,[\theta'\omega_0^2 + 2mg\xi(\sigma_0 - \sigma)].$$

Die Nullstellen von $F(\sigma)$ sind hier: $-S = -1$, $\sigma_1 = \sigma_0 + \dfrac{\theta'\omega_0^2}{2mg\xi}$, $\sigma_2 = +1$. Daher schwankt σ periodisch zwischen σ_1 und $\sigma_2 = +1$. Wegen $\sigma = \cos\vartheta$ schwankt daher ϑ zwischen dem aus $\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_0 + \dfrac{\theta'\omega_0^2}{2mg\xi}$ sich ergebenden Wert ϑ_1 (der sich für $\omega_0 = 0$ auf ϑ_0 selbst reduziert) und $\vartheta_2 = 0$. Es findet also eine Pendel-

schwingung in der Vertikalebene mit der durch (26) gegebenen Periode T statt. Die Größen λ und k^2 haben aber nach (23) jetzt die Werte:

$$\lambda = \sqrt{\frac{-mg\xi}{\theta'}}, \quad k^2 = \frac{1-\sigma_0}{2}, \tag{29}$$

wenn wir $\omega_0 = 0$ setzen. Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet dann nach (24)

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\vartheta_0}{2}\,[\sin\mathrm{am}\,\lambda(t-t_0)]. \tag{30}$$

Die Periode T ist dann nach (26) und (29) eine Funktion der anfänglichen Elongation ϑ_0. Wenn wir die Elongationen so klein annehmen, daß man nur die ersten Potenzen beibehält, kann man die Sinusse durch die Bögen, die Kosinusse σ durch 1 ersetzen. Die Funktion sinus amplitudinis wird dann, weil k^2 zu vernachlässigen ist, eine einfache Sinusfunktion, und (30) geht in

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin\lambda(t-t_0), \quad \lambda = \sqrt{\frac{-mg\xi}{\theta'}} \tag{31}$$

über. Das ist die elementare Formel für die Schwingung des physischen Pendels. Die Frequenz λ ist durch das Drehmoment der Schwerkraft $mg\xi$ und das Trägheitsmoment θ' um die horizontale Drehungsachse bestimmt.

§ 4. Die Flugzeugbewegung.

1. Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Im Falle der kräftefreien Bewegung, § 2, und der Bewegung im Schwerefeld, § 3, läßt sich von dem System der Bewegungsgleichungen ein Teilsystem von drei Gleichungen abspalten, das nur die drei Schwerpunktskoordinaten s_x, s_y, s_z enthält und gestattet, die Bewegung des Schwerpunktes ohne Kenntnis der Drehbewegung zu berechnen. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn die Kräfte k_x, k_y, k_z auch von den Eulerschen Winkeln und deren Ableitungen ϑ, φ, ψ, $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ abhängen. Dann muß man das ganze System von neun simultanen Differentialgleichungen gemeinsam behandeln.

Als Beispiel betrachten wir die Flugzeugbewegung. Hier wirken außer der Schwerkraft und dem Propellerantrieb, den wir uns durch seine Komponenten p_1, p_2, p_3 fest gegeben denken, noch die Luftkräfte, die von der Intensität und Richtung des Luftstromes relativ zum Flugzeug abhängen. Wir nehmen zur Vereinfachung an[1]), daß diese Wirkung sich für jeden selbständigen Teil des Flugzeuges durch eine Einzelkraft darstellen läßt, die abhängt: 1. von der Geschwindigkeit $(v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, v_3^{(j)})$ eines „mittleren“ Punktes (mit den Koordinaten $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}$) dieses

[1]) Siehe v. Mises, Dynamische Probleme der Maschinenlehre. Encyklop. d. math. Wissenschaften, 4. Bd., S. 345.

Teiles relativ zur ruhenden Luft (also zum raumfesten System); 2. von dem Winkel $\delta^{(j)}$ zwischen dieser Geschwindigkeit und einer bestimmten im mittleren Punkte mit dem betreffenden Flugzeugteil starr verbundenen Richtung, der „mittleren Normalen“ mit den Richtungskosinussen $n_1^{(j)}$, $n_2^{(j)}$, $n_3^{(j)}$. Führt man noch den „Anstellwinkel“ des betreffenden Teiles $\alpha_j = \frac{\pi}{2} - \delta^{(j)}$ ein, so ist

$$(1)\quad \sin\alpha_j = \cos\delta^{(j)} = \frac{n_1^{(j)} v_1^{(j)} + n_2^{(j)} v_2^{(j)} + n_3 v_3^{(j)}}{v^{(j)}},\quad v^{(j)2} = v_1^{(j)2} + v_2^{(j)2} + v_3^{(j)2}.$$

Die Versuchsergebnisse legen es nahe, für die Komponenten der Luftkräfte den Ansatz $v^{(j)2} A_1^{(j)}(\alpha_j)$ usw. und für die Koordinaten ihres Angriffspunktes $x_1^{(j)} + h_1^{(j)}(\alpha_j)$ usw. zu machen, wo die $A_1^{(j)}, \ldots, h_1^{(j)}, \ldots$ durch Versuch zu ermittelnde Funktionen von α_j sind. Da für die Schwerkraft der Ansatz § 3, (1) gilt, wo m die Gesamtmasse des Flugzeuges bedeutet, so sind die neun Bewegungsgleichungen die Gl. § 1, (25), (22) und § 3, (5). In ihnen ist zu setzen:

$$(2)\quad \begin{cases} k_1 = -mg\,c_1 + p_1 + \sum\limits_j v^{(j)2} A_1^{(j)}(\alpha_j) \text{ usw.} \\ d_1 = \sum\limits_j v^{(j)2} \left[\left(x_2^{(j)} + h_2^{(j)}(\alpha_j)\right) A_3^{(j)}(\alpha_j) - \left(x_3^{(j)} + h_3^{(j)}(\alpha_j)\right) A_2^{(j)}(\alpha_j)\right] \text{usw.} \end{cases}$$

Dabei sind d_1, d_2, d_3 die Drehmomente der eingeprägten Kräfte um den Schwerpunkt des Flugzeuges, und es ist angenommen, daß die Wirkungslinie der Propellerkraft durch den Schwerpunkt geht. Da nach § 1, (3)

$$(3)\quad \begin{cases} v_1^{(j)} = u_1 + \omega_2 x_3^{(j)} - \omega_3 x_2^{(j)}, \quad v_2^{(j)} = u_2 + \omega_3 x_1^{(j)} - \omega_1 x_3^{(j)}, \\ v_3^{(j)} = u_3 + \omega_1 x_2^{(j)} - \omega_2 x_1^{(j)}, \end{cases}$$

haben wir neun Differentialgleichungen für die neun Unbekannten u_1, u_2, u_3, ω_1, ω_2, ω_3, c_1, c_2, c_3 vor uns. Wir wollen ihre Integration nur unter folgenden drei Annahmen wirklich durchführen: Die x_1-x_3-Ebene ist eine Symmetrieebene des Flugzeuges. Sie bewegt sich fortwährend in derselben (raumfesten) Vertikalebene, etwa der x-z-Ebene. Die translatorische Geschwindigkeit in der Richtung der Propellerachse ist groß gegenüber allen anderen Geschwindigkeitskomponenten.

2. Differentialgleichungen der Längsbewegung. Wenn wir die x_1-Achse in die Propellerachse legen, können wir die gemachten Voraussetzungen mathematisch folgendermaßen formulieren: Es verschwinden $p_2, p_3, c_2, x_2^{(j)}, n_2^{(j)}, A_2^{(j)}, h_2^{(j)}, u_2, \omega_1, \omega_3$, also auch k_2, d_1, d_3. Ferner sind u_3/u, $\omega_2 x_1^{(j)}/u$, $\omega_2 x_3^{(j)}/u$ kleine Größen, deren Quadrate vernachlässigt werden können. Dabei ist $u = \sqrt{u_1^2 + u_3^2}$, also in der verlangten Näherung $u = u_1$. Auch alle Winkel α_j sollen so klein sein, daß mit der angestrebten Genauigkeit $\sin\alpha_j = \alpha_j$, $\cos\alpha_j = 1$ gesetzt werden kann. Die Flugzeugbestandteile sind dann als Zylinderflächen mit der x_2-Richtung als

Erzeugenden aufzufassen; ihre Schnittlinien mit der x_1, x_3-Ebene sind Kurvenbögen „Profile“, deren „Sehnen“ die Winkel α_j mit der Flugrichtung einschließen; bezeichen wir die festen Winkel dieser Sehnen mit der Propeller- (x_1-) Achse mit β_j, so ist $\alpha_j = \beta_j + \alpha$, wo α, der Winkel zwischen Propellerachse und Flugrichtung, der „Anstellwinkel des Flugzeuges“ heißt (s. Fig. 3). Dann ist $n_1^{(j)} = \sin \beta_j$, $n_3^{(j)} = -\cos \beta^j$,

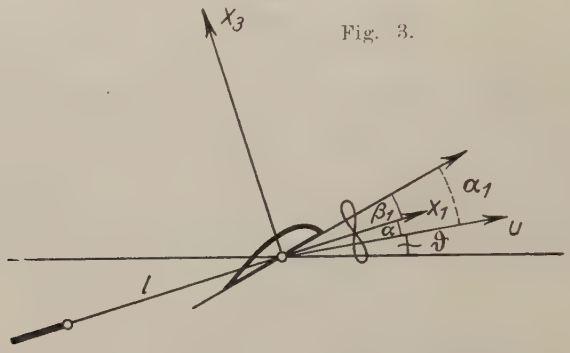


Fig. 3.

$u_1 = u \cos \alpha$, $u_3 = -u \sin \alpha$, so daß aus (1), (3) mit der genannten Vernachlässigung folgt:

$$\alpha_j = \beta_j + \alpha + \frac{\omega_2 x_1^{(j)}}{u}. \tag{4}$$

Mit derselben Genauigkeit gelten für $A_1^{(j)}(\alpha_j), A_2^{(j)}(\alpha_j), \ldots, h_1^{(j)}(\alpha_j), \ldots$ Beziehungen der Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{(j)}(\alpha_j) = A_1^{(j)}(\beta_j) + \bar{A}_1^{(j)}(\beta_j)\,\alpha + \bar{A}_1^{(j)}(\beta_j)\,\dfrac{\omega_2 x_1^{(j)}}{u}, \text{ usw. ...} \\ \bar{A}_1^{(j)}(\beta_j) = \left(\dfrac{d A_1^{(j)}}{d \alpha_j}\right)_{\alpha_j = \beta_j}, \end{array} \right. \tag{5}$$

und die analogen Formeln für $h_1^{(j)} \ldots$ Die sechs Ausdrücke (2) reduzieren sich auf drei. Wenn man das Argument β_j immer fortläßt, lauten sie nach (3), (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = -mgc_1 + p_1 + u^2 \sum\limits_j \left[A_1^{(j)} + \dfrac{2\omega_2 x_3^{(j)}}{u} A_1^{(j)} + \alpha \bar{A}_1^{(j)} + \dfrac{\omega_2 x_1^{(j)}}{u} \bar{A}_1^{(j)} \right], \\ k_3 = -mgc_3 + u^2 \sum\limits_j \left[A_3^{(j)} + \dfrac{2\omega_2 x_3^{(j)}}{u} A_3^{(j)} + \alpha \bar{A}_3^{(j)} + \dfrac{\omega_2 x_1^{(j)}}{u} \bar{A}_3^{(j)} \right]. \end{array} \right. \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2 = u^2 \sum\limits_j \left\{ \left(1 + \dfrac{2\omega_2 x_3^{(j)}}{u}\right) \left[(x_3^{(j)} + h_3^{(j)}) A_1^{(j)} - (x_1^{(j)} + h_1^{(j)}) A_3^{(j)} \right] \right. \\ \left. + \left(\alpha + \dfrac{\omega_2 x_1^{(j)}}{u}\right) \left[\bar{h}_3^{(j)} A_1^{(j)} - \bar{h}_1^{(j)} A_3^{(j)} + (x_3^{(j)} + h_3^{(j)}) \bar{A}_1^{(j)} - (x_1^{(j)} + h_1^{(j)}) \bar{A}_3^{(j)} \right] \right\}. \end{array} \right. \tag{7}$$

Die Bewegungsgleichungen § 1, (25), (22), § 3, (5) reduzieren sich auf:

$$(8)\quad \begin{cases} m\left(\dfrac{du_1}{dt} + \omega_2 u_3\right) = k_1, \quad m\left(\dfrac{du_3}{dt} - \omega_2 u_1\right) = k_3, \quad \theta_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} = d_2, \\ \dfrac{dc_1}{dt} + \omega_2 c_3 = 0, \quad \dfrac{dc_3}{dt} - \omega_2 c_1 = 0, \quad c_1^2 + c_3^2 = 1. \end{cases}$$

Um den Verhältnissen beim wirklichen Flugzeug nahe zu kommen, betrachten wir ein schematisches Flugzeug, das nur zwei Bestandteile hat, auf die Luftkräfte wirken: die Tragfläche ($j = 1$) und die Dämpfungsfläche ($j = 2$). Erstere liegt nicht weit vom Schwerpunkt (also $x_1^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$), letztere um das Stück l hinter ihm ($x_1^{(2)} = -l$, $x_3^{(2)} = 0$). Was die Luftkräfte und ihre Angriffspunkte für den Fall einer Bewegung längs der Propeller- (x_1-) Achse (also für $\alpha = \omega_2 = 0$, $\alpha_j = \beta_j$) betrifft, so soll der Angriffspunkt an der Tragfläche im Schwerpunkt liegen ($h_1^{(1)} = h_3^{(1)} = 0$); auf die Dämpfungsfläche soll in diesem Falle überhaupt keine Luftkraft wirken ($A_1^{(2)} = A_3^{(2)} = h_1^{(2)} = h_3^{(2)} = 0$). Dann wird aus (6), (7)

$$(9)\quad \begin{cases} k_1 = -mgc_1 + p_1 + u^2\left[A_1^{(1)} + \alpha(\bar{A}_1^{(1)} + \bar{A}_1^{(2)}) - \dfrac{\omega_2 l}{u}\bar{A}_1^{(2)}\right], \\ k_3 = -mgc_3 + u^2\left[A_3^{(1)} + \alpha(\bar{A}_3^{(1)} + \bar{A}_3^{(2)}) - \dfrac{\omega_2 l}{u}\bar{A}_3^{(2)}\right]. \end{cases}$$

$$(10)\quad d_2 = u^2\alpha(\bar{h}_3^{(1)} A_1^{(1)} - \bar{h}_1^{(1)} A_3^{(1)} + l\bar{A}_3^{(2)}) - \omega_2 u l^2 \bar{A}_3^{(2)}.$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen so umformen, daß sie unmittelbar die Koordinaten des Flugzeuges im raumfesten System zu berechnen gestatten. Von diesen sechs Koordinaten sind bei der Bewegung der x_1, x_3-Ebene in der vertikalen (x, z)-Ebene nur drei veränderlich, nämlich s_x, s_z, ϑ. Die anderen sind konstant, und zwar $s_y = 0$ und [nach § 1, (21)] $\varphi = \pi/2$, $\psi = -\pi/2$, also $c_1 = \sin\vartheta$, $c_3 = \cos\vartheta$ und nach § 1, (7) $\omega_2 = -\dot{\vartheta}$. Dadurch sind die letzten drei Gleichungen in § 4, (8) schon erfüllt und wir erhalten die drei Bewegungsgleichungen, indem wir in den Gl. (8), (9), (10) durch eine Drehung der Koordinatenachsen die Kraftkomponenten längs raumfester Achsen einführen. Wir wählen dazu nicht die x- und z-Achse, sondern die Richtung der Geschwindigkeit u und die dazu Senkrechte mit dem Sinne, der (s. Fig. 3) aus u durch dieselbe Drehung hervorgeht wie x_3 aus x_1. Man liest aus dieser Figur ab, daß die (zur Bahnkurve des Schwerpunktes) tangentiale Kraftkomponente $k_1\cos\alpha - k_3\sin\alpha$ ist, die dazu normale $k_1\sin\alpha + k_3\cos\alpha$. Wir bilden nun diese Ausdrücke aus (9) und die entsprechenden linken Seiten aus (8). Nun ist: $c_1\cos\alpha - c_3\sin\alpha = \sin(\vartheta - \alpha)$, $c_1\sin\alpha + c_3\cos\alpha = \cos(\vartheta - \alpha)$. Da $u_1 = u\cos\alpha$,

$u_3 = -u\sin\alpha$, ist $\frac{du_1}{dt}\cos\alpha - \frac{du_3}{dt}\sin\alpha = \frac{du}{dt}$, $\frac{du_1}{dt}\sin\alpha + \frac{du_3}{dt}\cos\alpha = -u\frac{d\alpha}{dt}$. Wir setzen alle Luftkräfte proportional der Luftdichte γ/g (γ ist das spezifische Gewicht), und einem für den betreffenden Flugzeugbestandteil charakteristischen Flächeninhalt f_j. Ferner führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$A_1^{(1)} = -\gamma/g\, f_1 w_1,\ \bar{A}_1^{(1)} - A_3^{(1)} = -\gamma/g\, f_1 \bar{w}_1,\ \bar{A}_1^{(2)} = -\gamma/g\, f_2 \bar{w}_2,$$
$$A_3^{(1)} = \gamma/g\, f_1 a_1,\ \bar{A}_3^{(1)} + A_1^{(1)} = \gamma/g\, f_1 \bar{a}_1,\ \bar{A}_3^{(2)} = \gamma/g\, f_2 \bar{a}_2.$$

Wenn man noch bedenkt, daß mit der geforderten Genauigkeit $\sin\alpha = \alpha$, $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden kann, folgt auf die geschilderte Art aus (8), (9)

$$(11)\quad \begin{cases} m\frac{du}{dt} = -mg\sin(\vartheta-\alpha) + p_1 - \frac{\gamma}{g}u^2\left[f_1 w_1 + \alpha f_1 \bar{w}_1 + \left(\alpha + \frac{\dot{\vartheta} l}{u}\right) f_2 \bar{w}_2\right]. \\ mu\frac{d(\vartheta-\alpha)}{dt} = -mg\cos(\vartheta-\alpha) + p_1\alpha + u^2\frac{\gamma}{g}\left[f_1 a_1 + \alpha f_1 \bar{a}_1 + \left(\alpha + \frac{\dot{\vartheta} l}{u}\right) f_2 \bar{a}_2\right]. \end{cases}$$

Man bezeichnet die u^2 proportionalen Glieder gewöhnlich als „Luftwiderstand“ bzw. „Auftrieb“[1]), $w_1 + \alpha\bar{w}_1$ heißt Widerstands-, $a_1 + \alpha\bar{a}_1$ Auftriebskoeffizient der Tragfläche, $\alpha\bar{w}_2$, $\alpha\bar{a}_2$ haben dieselbe Bedeutung für die Dämpfungsfläche.

Wollen wir auch (10) in denselben Veränderlichen ausdrücken, so beachten wir, daß $\alpha(\bar{h}_3^{(1)} A_1^{(1)} - \bar{h}_1^{(1)} A_3^{(1)})$ das Drehmoment der Kraft $A_1^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ mit dem Angriffspunkt $\alpha h_1^{(1)}$, $\alpha h_3^{(1)}$ um den Schwerpunkt ist. Da der absolute Betrag der Kraft $\sqrt{(A_1^{(1)})^2 + (A_3^{(1)})^2} = \gamma/g\, f_1 \sqrt{w_1^2 + a_1^2}$ ist, kann ihr Drehmoment $-\alpha\bar{h}\gamma/g\, f_1 \sqrt{w_1^2 + a_1^2}$ geschrieben werden, wenn $\alpha\bar{h}$ der Hebelarm der Kraft ist und $\bar{h}$ dann das positive Vorzeichen hat, wenn die Drehung dieses Hebelarms (mit dem Richtungssinn vom Schwerpunkt weg) in die Richtung des Kraftvektors gleichsinnig mit der Drehung der x_1- in die x_3-Achse ist. Aus der dritten Gl. (8) und (10) folgt dann mit unseren neuen Bezeichnungen (wenn $\theta_2 = \theta$ gesetzt wird):

$$(12)\qquad \theta\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = u^2\frac{\gamma}{g}\left[\alpha(\bar{h} f_1 \sqrt{w_1^2 + a_1^2} - l f_2 \bar{a}_2) - \frac{d\vartheta}{dt}\frac{l^2}{u} f_2 \bar{a}_2\right].$$

Die Gl. (11), (12) sind drei simultane Differentialgleichungen in den Variabeln u, α, ϑ. Die Gl. (11), welche die Schwerpunktsbewegung

[1]) Man kann die Gl. (11) ohne Umweg erhalten, wenn man die Luftkraft in eine Komponente in der Richtung der Geschwindigkeit (Luftwiderstand) und eine senkrecht dazu (Auftrieb) zerlegt. Man setzt etwa den Auftrieb gleich $\sum_j \gamma/g\, v_j^2 a_j(\alpha_j)$, den Widerstand $\sum \gamma/g\, v_j^2 w_j(\alpha_j)$ und entwickelt die Funktionen a_j und w_j des Anstellwinkels α_j, wie die analogen Funktionen $A_1^{(j)}$ usw. nach (4), (5) und $v^{(j)}$ nach (1), (3).

bestimmen, lassen sich im allgemeinen nicht unabhängig von (12), der Gleichung für die Drehung um den Schwerpunkt, integrieren. Nach den Voraussetzungen bei ihrer Ableitung stellen (11), (12) alle Bewegungen des symmetrischen Flugzeuges in der Vertikalebene dar, die von einer translatorischen Bewegung in der Richtung der Propellerachse nicht zu stark abweichen.

3. Beständige (permanente) Bewegungen und kleine Schwingungen. Wir untersuchen zuerst Bewegungen, die streng translatorisch in der Richtung der Propellerachse vor sich gehen ($\alpha = 0$). Der Schwerpunkt soll sich mit der konstanten Geschwindigkeit U unter dem Steigwinkel $\vartheta = \vartheta^*$ geradlinig bewegen. Dann folgt aus (11)

$$(13)\quad 0 = -mg\sin\vartheta^* + p_1 - \gamma/g\, U^2 f_1 w_1,\quad 0 = -mg\cos\vartheta^* + \gamma/g\, U^2 f_1 a_1.$$

Gl. (12) ist identisch erfüllt, was im wesentlichen auf der Annahme $h_1^{(1)} = h_1^{(3)} = 0$ beruht.

Bei gegebenen ϑ^* und Gewicht $G = mg$ folgen bestimmte Werte für U und p_1:

$$(14)\qquad G = \frac{\gamma}{g}\,\frac{U^2 f_1 a_1}{\cos\vartheta^*},\qquad p_1 = G(\sin\vartheta^* + \frac{w_1}{a_1}\cos\vartheta^*).$$

Insbesondere folgt für den Horizontalflug ($\vartheta^* = 0$)

$$(15)\qquad G = \frac{\gamma}{g}\,U^2 f_1 a_1,\quad p_1 = \varepsilon G,\quad \varepsilon = \frac{w_1}{a_1}.$$

ε heißt der „Gleitwinkel". Wir betrachten nun dem geschilderten Horizontalflug benachbarte Bewegungen; d. h. wir setzen in (11), (12) $u = U + v$, wo U aus (15) zu entnehmen ist, und nehmen v/U und ϑ als kleine Größen an, deren Quadrate zu vernachlässigen sind. Wir dividieren dann die Gl. (11) durch G, berücksichtigen (15) und beachten, daß bei den wirklich vorkommenden Flugzeugen[1]) $f_2\bar{w}_2$ und $f_2\bar{a}_2$ klein gegen $f_1 a_1$ sind, ferner ε klein gegen $\bar{a}_1/a_1 = \zeta$ und $\bar{w}_1/w_1$ nahezu gleich ζ. Dann folgt aus (11):

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{U}{g}\,\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{U}\right) + 2\varepsilon\,\dfrac{v}{U} + \vartheta + (\varepsilon\zeta - 1)\alpha = 0, \\ \dfrac{U}{g}\,\dfrac{d\alpha}{dt} - \dfrac{U}{g}\,\dfrac{d\vartheta}{dt} + \zeta\alpha + 2\,\dfrac{v}{U} = 0,\quad \zeta = \dfrac{\bar{a}_1}{a_1}. \end{cases}$$

[1]) Th. v. Kármán und E. Trefftz. Über Längsstabilität und Längsschwingungen von Flugzeugen. (Jahrbuch der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, 3. Bd. 1914/15). Die letzte Beziehung folgt daraus, daß beim wirklichen Flug der Gleitwinkel $\varepsilon = w_1/a_1$ nahezu ein Minimum haben, also seine Ableitung nach α sehr nahe an Null liegen soll.

Ebenso folgt aus (12), wenn wir den Trägheitsradius $\varkappa$ durch $\theta = m\varkappa^2$ einführen:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varkappa^2}{g}\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} + H\alpha + \dfrac{l^2\Delta}{U}\dfrac{d\vartheta}{dt} = 0, \\ -H = \bar{h}\sqrt{1+\varepsilon^2} - l\Delta, \quad \Delta = \dfrac{f_2\bar{a}_2}{f_1 a_1}. \end{cases}$$

Die Gl. (16), (17) sind drei lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zur Bestimmung von v/U, ϑ, α, ein System von der Gestalt II, § 3, (4). Sie stellen kleine Schwingungen um die horizontale gleichförmig geradlinige Flugbahn dar, die daher als „beständige" Bahn (im Sinne von II, § 3, **1**) aufgefaßt werden kann. Zur Integration machen wir wie in II, § 3, (7) den Ansatz: $v/U = v_0/U e^{\lambda t}$, $\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$, $\vartheta = \vartheta_0 e^{\lambda t}$. Dann ergibt sich für λ analog zu II, § 3, (9)

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{U}{g}\lambda + 2\varepsilon, & 1, & \varepsilon\xi - 1 \\ 2, & -\lambda\dfrac{U}{g}, & \dfrac{U}{g}\lambda + \xi \\ 0, & \dfrac{1}{g}\lambda^2 + \dfrac{l^2\Delta}{\varkappa^2 U}\lambda, & \dfrac{H}{\varkappa^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir die Determinante entwickeln und die Abkürzungen

$$(19)\qquad \lambda\frac{U}{g\sqrt{2}} = x, \quad \frac{\xi}{\sqrt{2}} = a, \quad \varepsilon\sqrt{2} = b, \quad \frac{l^2\Delta}{\varkappa^2\sqrt{2}} = p, \quad \frac{U^2}{2g}\frac{H}{\varkappa^2} = q$$

einführen, erhalten wir, da ε klein gegen ξ ist, für die an Stelle von λ tretende neue Veränderliche x die Gleichung vierten Grades:

$$(20)\qquad (x^2 + ax + 1)(p + x)x + q(x^2 + bx + 1) = 0.$$

Hat (20) vier verschiedene Wurzeln, so erhält man nach II, § 3, (10), (12), (13) vier partikuläre Lösungen von (16), (17), durch deren Übereinanderlagerung eine Lösung mit vier willkürlichen Konstanten entsteht. Da die Längsbewegung des Flugzeuges durch die Koordinaten s_x, s_z, ϑ beschrieben wird, hat sie drei Freiheitsgrade; die Bewegung hängt von sechs willkürlichen Konstanten ab. Die zwei fehlenden sind die Lagekoordinaten des Schwerpunktes zu Beginn der Bewegung. Ihre Werte für beliebige t folgen dann aus $\dot{s}_x = v\cos(\vartheta - \alpha)$, $\dot{s}_z = v\sin(\vartheta - \alpha)$, die sich nach Einführung der Lösungen von (16) und (17) durch Quadratur integrieren lassen.

Wir wollen die Lösung nur für einen speziellen Fall angeben. Es sei durch eine Befestigungsvorrichtung der Schwerpunkt festgehalten und das Flugzeug durch einen horizontalen Luftstrom der Geschwindigkeit U angeblasen. Dann ist (s. Fig. 3) $\vartheta = \alpha$; die durch (16) gegebene Schwerpunktsbewegung wird durch äußere Kräfte aufgehoben

und es bleibt nur die Drehung um den Schwerpunkt nach (17) übrig. (17) lautet mit den Bezeichnungen (19):

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + p\frac{g\sqrt{2}}{U}\frac{d\vartheta}{dt} + q\frac{2g^2}{U^2}\vartheta = 0. \tag{21}$$

Die Lösung stellt nach II, § 3, (22), (23), (24) eine gedämpfte Schwingung dar, wenn $4q > p^2$. Die Schwingungsfrequenz ist $\sigma = \frac{g}{U\sqrt{2}}\sqrt{4q - p^2}$, das logarithmische Dekrement $\varrho = -\frac{g}{U\sqrt{2}}p$. Wenn das Flugzeug anfangs in Ruhe ist ($\dot{\vartheta} = 0$), so wirkt ein Drehmoment, das $-q\vartheta$ proportional ist. Es treibt in die Ruhelage zurück, wenn $q > 0$ ist. Man nennt in diesem Falle das Flugzeug „statisch stabil". Wäre das Drehmoment während der ganzen Schwingung durch diesen Ausdruck gegeben (also $p = 0$), so hätten wir eine ungedämpfte Schwingung der Frequenz $\sigma_0 = \frac{\sqrt{2}g}{U}\sqrt{q}$ vor uns. Man nennt q das „Stabilisierungsmoment"[1]), p das „Dämpfungsmoment".

4. Längsstabilität des Horizontalfluges. Wenn wir die in **3** geschilderte beständige Horizontalbewegung auf ihre Stabilität im Sinne von II, § 2, **1** untersuchen wollen, so haben wir nach II, § 4, **1** uns zu fragen, ob Gl. (18) bzw. (20) lauter Wurzeln mit negativem Realteil hat. Die Bedingungen dafür, also auch hinreichende Bedingungen für die Stabilität, sind die Hurwitzschen Kriterien [1. Bd., III, § 4, (3)]. Um sie anzuwenden, setzen wir (20) in die Form $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, d. h. wir setzen: $a_0 = 1$, $a_1 = p + a$, $a_2 = pa + q + 1$, $a_3 = p + qb$, $a_4 = q$. Wenn die Gleichung reelle Koeffizienten hat, müssen die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 entweder reell oder paarweise konjugiert komplex sein. Bildet man das Gleichungspolynom $a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, so sieht man im Falle negativer Realteile dann durch Ausrechnung sofort, daß (wenn $a_0 > 0$) alle Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 positiv sind. Da also jedenfalls notwendig ist, daß alle $a_0, \ldots, a_4$ positiv sind, kann man die (in unserem Falle) vier Hurwitzschen Kriterien $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, $D_4 > 0$ auf eine geringere Anzahl reduzieren. Da $D_1 = a_1$, $D_2 = a_1a_2 - a_0a_3$, $D_3 = a_3D_2 - a_1^2a_4$, $D_4 = a_4D_3$ [wie aus 1. Bd., III, § 4, (3) folgt, wenn man $a_5 = a_6 = \cdots = 0$ setzt], so folgt aus der positiven Natur aller Koeffizienten und $D_3 > 0$ schon die positive Natur aller $D_1, \ldots, D_4$. Man kann also als Stabilitätskriterien ansehen:

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0 \tag{22}$$

[1]) Kármán und Trefftz, a. a. O.

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (20):

$$(23)\quad \begin{cases} p+a>0, \quad pa+q+1>0, \quad p+qb>0, \quad q>0, \\ (p+qb)[(p+a)(pa+q+1)-(p+qb)]-(p+a)^2 q>0. \end{cases}$$

Da a, b und p aus physikalischen Gründen positiv sind und übrigens a und b bei den üblichen Flugzeugen in ihren Werten nicht sehr schwanken, so hängt die Längsstabilität im wesentlichen von den „Stabilitätsparametern“ p und q ab.

Zunächst folgt aus (23), daß q positiv sein muß, d. h. nach 3: das Flugzeug muß „statisch stabil“ sein. Dann sind die ersten vier Bedingungen (23) erfüllt, die fünfte aber nur, wenn p genügend groß ist. Denn für $p=0$ wird sie: $qb[a(q+1)-qb]-a^2q>0$, ist also nur für $q>a/b$ erfüllt. Wenn wir im Falle des Erfülltseins aller Bedingungen (23) von „dynamischer Stabilität“ sprechen, können wir zusammenfassen: für die dynamische Stabilität ist die statische ($q>0$) stets notwendig; hinreichend aber nur dann, wenn das Dämpfungsmoment p genügend groß ist. Bei verschwindendem p muß das „Stabilisierungsmoment“ q über einer gewissen Grenze liegen, das Flugzeug muß statisch „stark“ stabil sein.

5. Phygoidbewegung. Im Grenzfall unendlich großer statischer Stabilität ($q=\infty$) ist nach (19), (17) der Koeffizient von α in (12) unendlich; man kann durch ihn dividieren und folgern, daß (12) bei beliebigem ϑ für $\alpha=0$ erfüllt ist. Dann erfolgt die Bewegung des Schwerpunktes immer in der Richtung der Propellerachse (x_1), und die Bewegung des ganzen Flugzeuges ist durch die des Schwerpunktes allein bestimmt. Diese gehorcht dann den Gl. (11), in denen $\alpha=0$ zu setzen ist. Nehmen wir noch an, daß Propellerkraft und Luftwiderstand einander das Gleichgewicht halten, $p_1=\gamma/g\,u^2 f_1 w_1$, so folgt aus (11), wenn wir den Luftwiderstand und Auftrieb der Dämpfungsflächen vernachlässigen, also $\bar{w}_2=\bar{a}_2=0$ setzen:

$$(24)\qquad \frac{du}{dt}=-g\sin\vartheta, \qquad u\frac{d\vartheta}{dt}=-g\cos\vartheta+u^2\frac{\gamma}{mg}f_1 a_1.$$

Wir haben zwei simultane Differentialgleichungen erster Ordnung vor uns. Die durch sie dargestellte Bewegung (die im allgemeinen keiner „beständigen“ benachbart ist) hat Lanchester als Phygoidbewegung bezeichnet.

Wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten des Flugzeugschwerpunktes mit x, z bezeichnen, ist $\dot{x}=u\cos\vartheta$, $\dot{z}=u\sin\vartheta$ und die erste Gl. (24) lautet nach Multiplikation mit u: $u\dot{u}=-g\dot{z}$, woraus durch Integration $u^2=-2gz+\text{Const.}$ folgt. Wählen wir für $z=0$

die Horizontale, in der $u = 0$ ist, so ist Const. $= 0$ zu setzen. Dann läßt sich u durch z ausdrücken und aus der zweiten Gl. (24) folgt:

$$u\frac{d\vartheta}{dt} = u\frac{d\vartheta}{dz}\dot{z} = u^2\frac{d\vartheta}{dz}\sin\vartheta = -2gz\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dz}$$

$$= 2gz\frac{d\cos\vartheta}{dz} = -g\cos\vartheta - 2gzf_1a_1\gamma/mg,$$

also

$$\frac{d\cos\vartheta}{dz} = -\frac{1}{2z}\cos\vartheta - k, \quad k = \frac{\gamma}{mg}f_1a_1. \tag{25}$$

Da also $\cos\vartheta$ als Funktion von z einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, findet man ihr allgemeines Integral nach 1. Bd., VI, § 2, 2. Es lautet

$$\cos\vartheta = -\frac{2}{3}kz + \frac{C}{\sqrt{-z}}. \tag{26}$$

Dabei ist C eine willkürliche Konstante, durch deren Wahl der Neigungswinkel ϑ der Flugbahn gegen die Horizontale für eine gewisse Höhe z vorgeschrieben wird. Damit ist die allgemeine Gleichung der Flugbahn in endlicher Form gefunden.

Lehrbücher.

F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, vier Hefte. Leipzig 1897 bis 1910.

R. Grammel, Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Braunschweig 1920.

A. Gray, A. treatise on gyrostatics and rotational motion. London 1918.

Die Theorie der Flugzeugbewegung behandelt ausführlich der zweite (von Hopf herrührende) Teil des Lehrbuches:

R. Fuchs und L. Hopf, Aerodynamik. Berlin 1922.

Viertes Kapitel.

Methoden der Störungstheorie.

§ 1. Grundbegriffe der Störungsrechnung.

1. Allgemeine mechanische Systeme. Wenn die Integration der Bewegungsgleichungen I, § 2, (52) nach der in I, § 4, (3) auseinandergesetzten Jacobischen Integrationsmethode praktisch undurchführbar ist, d. h. wenn es nicht gelingt, „angepaßte“ kanonische Variable einzuführen, so ist es in vielen Fällen möglich, H so in zwei Summanden

zu zerlegen ($H = H_0 + \lambda H_1$), daß λ eine Konstante bedeutet, die klein gegen 1 ist und für das System mit der Hamiltonschen Funktion H_0 die Jacobische Methode sich rechnerisch durchführen läßt. Man kann dann durch eine Transformation der Gestalt I, § 4, (8) (mit $T = t$) der Funktion H_0 angepaßte kanonische Veränderliche t, $Q_1, \ldots, Q_n$. $P_1, \ldots, P_n$ einführen, so daß H_0 nur von den P_j, hingegen H_1 natürlich auch von allen übrigen abhängt.

$$(1) \qquad \begin{cases} H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = H_0(P_1, \ldots, P_n) \\ \qquad + \lambda H_1(t, Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n). \end{cases}$$

Wie im 1. Bd., V, § 5, **10** für die Differentialgleichungen der Lösungen allgemeiner Variationsprobleme gezeigt ist, lassen sich dann die Bewegungsgleichungen I, § 2, (52) durch ein Näherungsverfahren integrieren.

Wegen der Kleinheit von λ kann man die Bewegung des betrachteten mechanischen Systems als durch eine „kleine Störung“ aus der des Systems mit der Hamiltonschen Funktion H_0, des „ungestörten“ Systems hervorgegangen denken. Man nennt das Zusatzglied zu H_0, das die Störung hervorruft, also λH_1, die „Störungsfunktion“.

Durch die Berührungstransformation, die Gl. (1) zur Folge hat, gehen die Bewegungsgleichungen wieder in ein kanonisches Gleichungssystem in den Veränderlichen t, Q_j, P_j über, also in die Gestalt von I, § 4, (10) (mit $T = t$), wobei $\bar{H}$ sich aus dem H der Gl. (1) nach I, § 4, (11) berechnen läßt. Wenn also insbesondere die Transformationsgleichungen die Zeit t nicht enthalten, so ist nach I, § 4, (15) das $H_0 + \lambda H_1$ der Gl. (1) selbst das gesuchte $\bar{H}$; die Gleichungen I. § 4, (10) lauten also:

$$(2) \qquad \frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial P_j} + \lambda \frac{\partial H_1}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial Q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei kann H_1 auch die Zeit explizite enthalten. Wenn die Transformationsgleichungen hingegen von der Gestalt von I, § 4, (17) sind, hängt $\bar{H}$ durch I, § 4, (18) mit $H = H_0 + \lambda H_1$ zusammen und die Bewegungsgleichungen nehmen die Form an:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dQ_j}{dt} = \dfrac{\partial H_0}{\partial P_j} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial q_i^*}{\partial P_j} - b_i \frac{\partial p_i^*}{\partial P_j} \right) + \lambda \frac{\partial H_1}{\partial P_j} \\ \dfrac{dP_j}{dt} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial q_i^*}{\partial Q_j} - b_i \frac{\partial p_i^*}{\partial Q_j} \right) - \lambda \frac{\partial H_1}{\partial Q_j} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn die Störungsfunktion in den ursprünglichen Koordinaten die Zeit explizite nur in den Kombinationen $q_i - b_i t$, $p_i - a_i t$ enthält, so kommt nach den Gleichungen I, § 4, (17) in dem durch die P_j, Q_j ausgedrückten H_1 der Gl. (3) die Zeit nicht mehr explizite vor.

Im folgenden werden wir uns meist auf den Fall beschränken, daß die Störungsfunktion schon in den ursprünglichen Variablen von der Zeit unabhängig ist, wo also die Bewegungsgleichungen durch eine die Zeit nicht enthaltende Transformation in die Gestalt (2) übergehen, wo dann auch H_1 nur von den P_j, Q_j abhängt.

Der Ansatz der Störungsrechnung besteht nun darin, daß man die Lösungen der Gl. (2) als Potenzreihen in λ zu bestimmen sucht. Für $\lambda = 0$ gehen die Gl. (2) in Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung I, § 4, (26) über, wo wir nur an Stelle von E jetzt $H_0 = E_0(P_1, \ldots, P_n)$, die Energie der ungestörten Bewegung, setzen, was für diese Bewegung nach I, § 4, (27) konstante Werte der P_j und mit der Zeit linear wachsende der Q_j ergibt. Daher setzen wir für die gestörte Bewegung die P_j und Q_j folgendermaßen an:

$$(4)\qquad \begin{cases} P_j = P_j^{(0)} + \lambda P_j^{(1)} + \lambda^2 P_j^{(2)} + \cdots \\ Q_j = Q_j^{(0)} + \dfrac{\partial E_0}{\partial P_j^{(0)}} t + \lambda Q_j^{(1)} + \lambda^2 Q_j^{(2)} + \cdots \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei sind $P_j^{(0)}$, $Q_j^{(0)}$ die in I, § 4, (27) mit a_j, b_j bezeichneten $2n$ Integrationskonstanten in den Bewegungsgleichungen der ungestörten Bewegung, und die $P_j^{(1)}$, $P_j^{(2)}$, ..., $Q_j^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$ sind durch Einsetzen der Ausdrücke (4) in die Gl. (2) so als Funktionen der Zeit zu bestimmen, daß die Gl. (2) der gestörten Bewegung erfüllt sind. Diese Methode, die analog der im 1. Bd., VI, § 2, **3** angewendeten ist, wird als Lagranges Methode der Variation der Konstanten bezeichnet. Setzen wir (4) in (2) ein, entwickeln nach Potenzen von λ und vergleichen die Koeffizienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten, so erhalten wir eine Reihe von Differentialgleichungen für die Koeffizienten der Entwicklungen in (4). Man nennt die mit dem Gliede in λ^n abgebrochenen Lösungen (4) die n-te Näherungslösung. Mit Hilfe dieses Begriffes können wir die Aufstellung der genannten Differentialgleichungen für die $Q_j^{(1)}, \ldots$ auch etwas anschaulicher beschreiben, wenn wir durch Einschließung in Klammern und Anhängung des Index n das bezeichnen, was aus einer Funktion der P_j, Q_j durch Einsetzen der n-ten Näherung wird. Wir setzen zunächst in die rechte Seite der zweiten Gleichungsgruppe (2) die nullte Näherung:

$$(5)\qquad P_j = P_j^0, \qquad Q_j = Q_j^0 + \frac{\partial E_0}{\partial P_j^0} t.$$

Dann folgt daraus durch Gleichsetzung des Koeffizienten von λ auf beiden Seiten:

$$(6)\qquad \frac{dP_j^{(1)}}{dt} = -\left(\frac{\partial H_1}{\partial Q_j}\right)_0, \qquad P_j^{(1)} = -\int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial Q_j}\right)_0 dt \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Dabei sind die Integrationskonstanten so bestimmt, daß die Bewegung für $t = 0$ in die ungestörte übergeht. Unter dem Integral steht eine bekannte Funktion von t. Darauf setzt man in die rechten Seiten der ersten Gleichungsgruppe (2) im ersten Gliede die aus (6) berechneten ersten Näherungen $P_j^{(0)} + \lambda P_j^{(1)}$ für die P_j ein, hingegen im zweiten Gliede die nullten Näherungen (5). Man erhält dann wieder durch Gleichsetzen der Koeffizienten von λ auf beiden Seiten:

$$\frac{dQ_j^{(1)}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial P_j \partial P_k}\right)_0 P_k^{(1)} + \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_j}\right)_0, \tag{7}$$

wobei die folgende Entwicklung eingesetzt ist:

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial P_j}\right)_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial P_j \partial P_k}\right)_0 \lambda P_k^{(1)} + \cdots \tag{8}$$

Da alle Ausdrücke, in denen die nullte Näherung eingesetzt ist, bekannte Funktionen von t sind, folgt aus (7) und (6):

$$Q_j^{(1)} = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial P_j \partial P_k}\right)_0 \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial Q_k}\right)_0 dt + \int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_j}\right)_0 dt. \tag{9}$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen (2) lauten also in erster Annäherung:

$$(Q_j)_1 = Q_j^{(0)} + \frac{\partial E_0}{\partial P_j^{(0)}} t + \lambda Q_j^{(1)}, \quad (P_j)_1 = P_j^{(0)} + \lambda P_j^{(1)}, \tag{10}$$

wobei für $Q_j^{(1)}$, $P_j^{(1)}$ ihre Ausdrücke aus (9), (6) einzusetzen sind. Wir ordnen das weitere Verfahren am übersichtlichsten an, wenn wir analog zu der im 1. Bd., VI, § 1, 2 angewendeten „Methode der Näherungsfolgen“ vorgehen. Wir setzen zunächst die erste Näherung (10) in die rechten Seiten der zweiten Gleichungsgruppe (2) ein. Durch Quadratur erhalten wir die zweite Näherung[1]):

$$(P_j)_2 = P_j^{(0)} - \lambda \int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial Q_j}\right)_1 dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Die Integrationskonstanten sind so bestimmt, daß für $t = 0$ der Zustand des Systems mit dem der ungestörten Bewegung (5) übereinstimmt, die also entsteht, wenn im Zeitpunkt $t = 0$ die Störungskräfte plötzlich verschwinden. Man nennt sie die zur Zeit $t = 0$ „oskulierende“ ungestörte Bewegung. Das geschilderte Näherungsverfahren kann man

[1]) Sie stimmt offenbar mit dem Ausdruck überein, den wir durch Entwicklung nach Potenzen von λ und Gleichsetzen der Koeffizienten von λ^2 auf beiden Seiten von (2) erhalten, wenn rechts die erste Näherung eingeführt wird.

beliebig weit treiben. Setzen wir die Ausdrücke (11) als zweite Näherungen in die erste Gleichungsgruppe (2) in den ersten Gliedern rechts ein, in den zweiten Gliedern hingegen die ersten Näherungen (10), so erhält man durch Integration

$$(12)\quad (Q_j)_2 = Q_j^{(0)} + \int_0^t \left(\frac{\partial H_0}{\partial P_j}\right)_2 dt + \lambda \int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_j}\right)_1 dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ebenso ergibt sich aus der $(n-1)$-ten Näherung die n-te nach den folgenden rekurrenten Formeln:

$$(13)\quad \begin{cases} (P_j)_n = P_j^{(0)} - \lambda \int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial Q_j}\right)_{n-1} dt, \\ (Q_j)_n = Q_j^{(0)} + \int_0^t \left(\frac{\partial H_0}{\partial P_j}\right)_n dt + \lambda \int_0^t \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_j}\right)_{n-1} dt. \end{cases}$$

2. Mehrfach periodische Systeme. Wir nehmen nun an, daß unser ungestörtes System ein mehrfach periodisches im Sinne von I, § 6, **2** ist und daß die in **1** verwendeten kanonischen Veränderlichen Q_j, P_j die Winkel- und Wirkungsvariablen sind, die wir wie in I, § 6, **2** mit w_j, J_j bezeichneten. Die Hamiltonsche Funktion des gestörten Systems lautet dann analog zu (1), wenn wir sie als unabhängig von der Zeit annehmen:

$$(14)\quad \begin{cases} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = E_0^*(J_1, \ldots, J_n) \\ \qquad + \lambda \Phi(w_1, \ldots, w_n, J_1, \ldots, J_n). \end{cases}$$

Dabei ist E_0^* gemäß I, § 5, (38) die Energie des ungestörten Systems als Funktion der Wirkungsvariablen und Φ die Störungsfunktion. Man erhält Φ offenbar durch Einsetzen der Entwicklungen I, § 6, (7) für die q_i, p_i in $H_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. Daher ist Φ ebenso wie die q_i und p_i eine periodische Funktion der w_j mit der Periode 2π, die man unter sehr allgemeinen Bedingungen in eine Fouriersche Reihe entwickeln kann. Unter Annahme der Möglichkeit dieser Entwicklung hat Φ ebenso wie die q_i die Gestalt:

$$(15)\quad \begin{cases} \Phi = \bar{\Phi}(J_1, \ldots, J_n) \\ \quad + \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} f_{k_1, k_2 \ldots k_n}(J_1, \ldots, J_n) \cos[k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n + \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(J_1, \ldots, J_n)]. \end{cases}$$

Die ungestörte Bewegung ist nach I, § 5, (40) durch konstante J_j und mit der Zeit linear anwachsende w_j gekennzeichnet. Für die gestörte Bewegung sind die J_j und w_j Funktionen der Zeit, die (2) genügen, d. h. in unserer Bezeichnung

$$(16)\quad \frac{dw_j}{dt} = \nu_j + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial J_j}, \quad \frac{dJ_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial w_j}, \quad \nu_j = \frac{\partial E_0^*}{\partial J_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Die nullte Näherungslösung $\lambda = 0$ lautet analog zu (5)

$$(17) \qquad (w_j)_0 = w_j^{(0)} + \nu_j^{(0)} t, \quad (J_j)_0 = J_j^0, \quad \nu_j^{(0)} = \nu_j(J_1^0, \ldots, J_n^0).$$

Sie stellt die ungestörte Bewegung dar, welche die gestörte Bewegung zur Zeit $t = 0$, wo ihr Zustand durch w_j^0, J_j^0 gegeben ist, oskuliert.

Die erste Näherung lautet, analog zu (10), (6), (9)

$$(18) \qquad (w_j)_1 = w_j^{(0)} + \nu_j^{(0)} t + \lambda w_j^{(1)}, \quad (J_j)_1 = J_j^{(0)} + \lambda J_j^{(1)}$$

$$(19) \quad \begin{cases} J_j^{(1)} = -\int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_j}\right)_0 dt, \\ w_j^{(1)} = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \nu_j}{\partial J_k}\right)_0 \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_k}\right)_0 dt + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial J_j}\right)_0 dt. \end{cases}$$

Setzen wir den Wert von Φ aus (15) ein, führen die Differentiationen aus und nehmen für die w_j, J_j die Ausdrücke (17), so erhalten wir durch Integration nach t:

$$(20) \quad \begin{cases} J_j^{(1)} = -\sum_{k_1, \ldots, k_n} \frac{k_j}{k_1 \nu_1^{(0)} + k_2 \nu_2^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}} f_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)}) \\ \quad \{\cos[(k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}) t + \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^0, \ldots, J_n^0)] \\ \quad\quad - \cos[\varphi_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^0, \ldots, J_n^0)]\}. \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} w_j^{(1)} = \left[\frac{\partial \bar{\Phi}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)})}{\partial J_j^{(0)}} + \sum_{k_1, \ldots, k_n} a_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)}) \sum_{h=1}^n k_h \frac{\partial \nu_j^{(0)}}{\partial J_h^{(0)}}\right] t \\ \quad + \sum_{k_1, \ldots, k_n} \{b_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)}) \cos[(k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}) t] \\ + c_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)}) \sin[(k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}) t] + b_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)})\}. \end{cases}$$

Dabei ist die explizite Gestalt der Funktionen a, b, c, die sich aus der Rechnung leicht ergibt, der Kürze halber nicht ausgeschrieben. Wenn wir alle Ausdrücke der Gestalt

$$b_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)}) \cos[(k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}) t]$$
$$+ c_{k_1, \ldots, k_n}(J_1^{(0)}, \ldots, J_n^{(0)}) \sin[(k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}) t]$$

kurz als „periodische Glieder“ bezeichnen und durch „period. Gl.“ abkürzen, können wir die ersten Näherungslösungen nach (18), (20), (21) folgendermaßen schreiben:

$$(22) \quad \begin{cases} (J_j)_1 = J_j^{(0)} + \lambda \psi_j^{(0)} + \lambda \,.\, \text{period. Gl.}, \\ (w_j)_1 = w_j^{(0)} + \lambda \omega_j^{(0)} + [\nu_j^{(0)} + \lambda \nu_j^{(1)}(J_1^0, \ldots, J_n^0)] t + \lambda \,.\, \text{period. Gl.} \end{cases}$$

Dabei ergibt sich die Bedeutung von ψ_j, ω_j, $\nu_j^{(1)}$ aus den Gl. (20), (21). Ist es möglich, daß unter den periodischen Gliedern solche sind, welche die Zeit t nicht enthalten, die also in Wirklichkeit konstant sind? Dazu müßten Beziehungen $k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)} = 0$ mit ganzzahligen $k_1, \ldots, k_n$ bestehen. Nun können offenbar nicht alle k_j verschwinden, weil in der Entwicklung (15) der Störungsfunktion Φ das von den w_j unabhängige Glied $\bar{\Phi}$ schon aus der Summe herausgehoben ist, die also nur mehr Glieder enthält, in denen nicht alle k_j verschwinden. Eine ganzzahlige, linear homogene Beziehung zwischen den $\nu_j^{(0)}$ mit nicht sämtlich verschwindenden k_j kann aber nach I, § 6, **3** nur bestehen, wenn das ungestörte System „entartet" ist. Wir wollen nun hier aber voraussetzen, daß das ungestörte System wirklich genau n-fach periodisch, also nicht entartet ist, dann enthalten alle periodischen Glieder auch wirklich die Zeit. Nach I, § 6, **5** haben diese Glieder dann wohl keine genaue, aber doch eine angenäherte Periode. Man kann leicht zeigen, daß der zeitliche Mittelwert dieser Glieder, erstreckt über eine angenäherte Periode des ungestörten Systems, mit um so größerer Annäherung verschwindet, je größere Annäherung an die ursprüngliche Lage nach Verlauf dieser „Periode" verlangt wird. Wenn das System „physikalisch nicht entartet" ist, wächst nach I, § 6, **5** mit diesem Genauigkeitsanspruch auch die „Periode". Wir betrachten ein derartiges System von zwei Freiheitsgraden. Ein periodisches Glied habe dann die Gestalt: $x = A \cos(n_1 \nu_1^{(0)} + n_2 \nu_2^{(0)}) t$, wo n_1, n_2 ganze Zahlen sind. Wir berechnen wie in I, § 6, **5** die angenäherte Periode. Sie lautet in den dortigen Bezeichnungen

$$k_1 \tau_1^{(0)} = \frac{2\pi k_1}{\nu_1^{(0)}} = k_2 \tau_2^{(0)} + \eta = \frac{2\pi k_2}{\nu_2^{(0)}} + \eta.$$

Bilden wir den gesuchten Mittelwert $\bar{x}$ von x durch Integration von 0 bis $k_1 \tau_1^{(0)}$ und Division durch $k_1 \tau_1^{(0)}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1 \tau_1^{(0)} (n_1 \nu_1^{(0)} + n_2 \nu_2^{(0)})\, \bar{x} &= A \sin[(n_1 \nu_1^{(0)} + n_2 \nu_2^{(0)})\, k_1 \tau_1^{(0)}] \\ &= A \sin[2\pi (n_1 k_1 + n_2 k_2) + n_2 \nu_2^{(0)} \eta]. \end{aligned}$$

Da $\eta \nu_2^{(0)} = 2\pi\varepsilon$, folgt daraus:

$$\begin{aligned} [2\pi (k_1 n_1 + k_2 n_2) + 2\pi\varepsilon n_2]\, \bar{x} &= A \sin[2\pi (n_1 k_1 + n_2 k_2) + 2\pi\varepsilon n_2] \\ &= A \sin(2\pi\varepsilon n_2). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß mit abnehmendem ε (d. h. mit zunehmendem Genauigkeitsanspruch für die angenäherte Periode) $\bar{x}$ gegen Null geht[1]).

[1]) Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn für das betrachtete periodische Glied $n_1 k_1 + n_2 k_2$ schon für kleine n_1, n_2 sehr klein wird; für große n_1, n_2 würde es den Beweis nicht stören, weil dann die Fourierkoeffizienten A klein werden.

Daraus folgt nach (22), daß bei der gestörten Bewegung $(J_j)_1$ und $(w_j)_1$ im Zeitmittel über eine angenäherte Periode des ungestörten Systems denselben zeitlichen Verlauf haben, wie bei der ungestörten Bewegung. Nur haben die Konstanten $J_j^{(0)}$, $w_j^{(0)}$, $\nu_j^{(0)}$ etwas andere Werte, die sich von den ungestörten um Größen von der Ordnung λ unterscheiden. Man drückt das auch so aus: Die J_j und w_j erleiden in erster Näherung nur „periodische Störungen".

Gehen wir zur zweiten Näherung über, so erhalten wir aus (13), wenn wir $n = 2$, $H_1 = \Phi$, $Q_j = w_j$, $P_j = J_j$ setzen:

$$(23) \qquad (J_j)_2 = J_j^{(0)} - \lambda \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_j}\right)_1 dt.$$

Nach (15) enthält $\partial \Phi / \partial w_j$ nur in den w_j periodische Glieder. Setzen wir nach (22) für w_j die $(w_j)_1$ und entwickeln nach Potenzen von λ, so enthält der Integrand in (23) außer Konstanten und period. Gl. auch Glieder der Gestalt λt. period. Gl., wobei jede Konstante mit dem Faktor λ behaftet ist. Da sich für das Integral über $t \cos t$ leicht der Ausdruck $t \sin t + \cos t$ ergibt, erhält man durch Ausführung der Integration in (23) für $(J_j)_2$ einen Ausdruck der Gestalt:

$$(24) \quad \begin{cases} (J_j)_2 = J_j^{(0)} + \lambda [\psi_j (J_1^0, \ldots, J_n^0) + \text{period. Gl.}] \\ + \lambda^2 [\psi_j^* (J_1^0, \ldots, J_n^0) + t \chi_j (J_1^0, \ldots, J_n^0) + \text{period. Gl.} + t \text{. period. Gl.}]. \end{cases}$$

In zweiter Näherung unterscheiden sich also die J_j von Konstanten nicht mehr bloß um Größen, die im Zeitmittel über eine angenäherte Periode der ungestörten Bewegung verschwinden, sondern auch um Glieder, die mit der Zeit immer mehr anwachsen. Doch sind diese „sekularen" Glieder alle der ersten Potenz von t proportional, aber mit λ^2 multipliziert. Setzen wir das Näherungsverfahren fort, so erhalten wir analog zu (24) als n-te Näherung einen Ausdruck, in dem der Koeffizient von λ^n eine Funktion der Zeit ist, die außer konstanten und periodischen Gliedern auch solche enthält, in denen die Potenzen von t bis einschließlich t^{n-1} mit Konstanten oder mit periodischen Gliedern multipliziert sind. So entstehen „rein sekulare" und „gemischt sekulare" Glieder. Da man die λ als sehr klein voraussetzt, spricht man erst dann von einer „sekularen Störung" (d. h. einer Abweichung von der ungestörten Bewegung, die sich im Mittel über eine „Periode" derselben nicht aufhebt), wenn in der Entwicklung der J_j ein Glied auftritt, in dem λ^n mit mindestens der n-ten Potenz von t multipliziert ist. In diesem Sinne kann man zusammenfassend sagen:

Bei Störung eines n-fach periodischen, nicht entarteten Systems erleiden die Bahnkonstanten J_j keine sekularen

Störungen. Die Winkelvariablen w_j erleiden im allgemeinen insofern sekulare Störungen, als nach (22) an Stelle der Frequenz $\nu_j^{(0)}$ durch die Störung $\nu_j^{(0)} + \lambda \nu_j^{(1)}$ tritt.

3. Entartete Systeme. Ganz anders wirkt eine Störung auf die Bahnkurven eines entarteten Systems. Wir nehmen an, unser ungestörtes System von n Freiheitsgraden sei im Sinne von I, § 6, **3** ein m-fach entartetes, d. h. es sei genau μ-fach periodisch, wobei $\mu = n - m$. Wir führen die am Schlusse von I, § 6, **3** definierten Zustandsvariablen ein, die uneigentlichen Winkelvariablen $v_1\, v_2, \ldots, v_m$, die eigentlichen $w_1, w_2, \ldots, w_\mu$, die entsprechenden Wirkungsvariablen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bzw. $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$. Dann ist die Bewegung des ungestörten Systems nach I, § 6, (15) durch

$$(25)\qquad \begin{cases} u_j = u_j^{(0)} \quad v_j = v_j^{(0)} & (j = 1, 2, \ldots, m), \\ J_j = J_j^{(0)}, \quad w_j = \nu_j^{(0)} t + w_j^{(0)} & (j = 1, 2, \ldots, \mu) \end{cases}$$

gegeben, wobei $J_j^{(0)}$, $v_j^{(0)}$, $u_j^{(0)}$, $w_j^{(0)}$ Integrationskonstante sind und

$$(26)\qquad \nu_j^{(0)}(J_1^0, \ldots, J_\mu^{(0)}) = \frac{\partial E_0(J_1^{(0)}, \ldots, J_\mu^{(0)})}{\partial J_j^{(0)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Wenn alle Bahnen des ungestörten Systems nur μ-fach periodisch sind, so sind die u_j in E_0 überhaupt nicht enthalten. Wenn hingegen nur die gerade als Ausgangsbahn der Störung betrachtete Bahn in dem vorausgesetzten Maße entartet ist, so hängt E_0 und infolgedessen nach (26) auch $\nu_j^{(0)}$ von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ab, und es ist nur für $u_j = u_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

$$(27)\qquad \begin{cases} \nu_j^{(0)} = \nu_j(J_1^0, \ldots, J_\mu^{(0)}, u_1^{(0)}, \ldots, u_m^{(0)}) = \left(\dfrac{\partial E_0}{\partial u_j}\right)_0 = 0 \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Drücken wir die Störungsfunktion Φ, Gl. (15), in dieser Bezeichnung aus, so kann die Summe auf der rechten Seite sehr wohl Glieder enthalten, in denen die Koeffizienten k_j aller eigentlichen Winkelvariablen w_j verschwinden, also Glieder, die ebenso wie $\bar{\Phi}$ während der ungestörten Bewegung konstant bleiben.

Wir ziehen daher diese Glieder auch vor das Summenzeichen und schreiben:

$$(28)\qquad \begin{cases} \Phi = R(J_1, \ldots, J_\mu, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m) \\ + \sum\limits_{k_1, \ldots, k_\mu} r_{k_1, \ldots, k_\mu}(J_1, \cdots, J_\mu, u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m) \cos[k_1 w_1 + \cdots \\ \qquad + k_\mu w_\mu + \varrho(J_j, u_j, v_j)]. \end{cases}$$

In der Summe ist kein Glied mehr enthalten, in dem alle $k_1, \ldots, k_\mu$ verschwinden. Bezeichnen wir sie kurz mit P, setzen also

$$(29)\quad \Phi = R(J_1, \ldots, u_1, \ldots, v_1, \ldots) + P(J_1, \ldots, w_1, \ldots, u_1, \ldots, v_1, \ldots),$$

so zerfallen die Differentialgleichungen (16) der gestörten Bewegung in zwei Gruppen:

$$(30)\quad \frac{dw_j}{dt} = \nu_j + \lambda \frac{\partial R}{\partial J_j} + \lambda \frac{\partial P}{\partial J_j}, \quad \frac{dJ_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial P}{\partial w_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

$$(31)\quad \frac{dv_j}{dt} = \lambda \frac{\partial R}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial P}{\partial u_j}, \quad \frac{du_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial R}{\partial v_j} - \lambda \frac{\partial P}{\partial v_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Machen wir für w_j, J_j, v_j die zu (4) analogen Ansätze, wobei als ungestörte Bewegung ($\lambda = 0$) die Gl. (25) zugrunde gelegt werden, so ergibt sich aus (30) genau dieselbe Gestalt (22) der ersten Näherungslösung für J_j, w_j wie aus den Gl. (16). Denn solange für u_j, v_j konstante Werte (die nullten Näherungen) eingesetzt werden, sind (30) und (16) von derselben Form. Die Bahnkonstanten J_j ändern sich also in erster Näherung wieder nur um periodische Glieder, worunter jetzt Glieder der Gestalt $a \cos[(k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_\mu \nu_\mu^{(0)})t + \delta]$ zu verstehen sind, wo a und δ während der Bewegung konstant bleiben. Der Mittelwert solcher Glieder über eine angenäherte Periode der ungestörten Bewegung verschwindet wieder.

Wenn wir hingegen auf der rechten Seite von (31) die nullte Näherung (25) einsetzen, so werden die R enthaltenden Glieder konstant, die P enthaltenden periodisch, und durch Integration folgt für die erste Näherung:

$$(32)\quad \begin{cases} v_j = v_j^{(0)} + \lambda b_j^{(0)} + \lambda \left(\dfrac{\partial R}{\partial u_j}\right)_0 t + \lambda \text{ period. Gl.}, \\ u_j = u_j^{(0)} + \lambda a_j^{(0)} + \lambda \left(\dfrac{\partial R}{\partial v_j}\right)_0 t + \lambda \text{ period. Gl.} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Die bei der ungestörten Bewegung konstanten Größen u_j, v_j erleiden also nicht nur periodische, sondern auch sekulare Störungen. Diese rühren auch nur von den ersten Gliedern rechts in (31) her. Man nennt daher R den „sekularen Teil der Störungsfunktion“.

Wenn wir die ersten Näherungen für w_j, J_j, u_j, v_j in die rechten Seiten von (30), (31) einsetzen und für dieses Gleichungssystem nach genau denselben Methoden wie in 2 für die Gl. (16) die zweite und die folgenden Näherungen aufsuchen, ergibt sich genau so wie dort, daß in den Entwicklungen für die J_j, u_j, v_j, wenn wir nur die Glieder beachten, die von den Ableitungen der Funktion P herrühren, nur

periodische Glieder auftreten oder solche, die wohl t^{n-1} proportional sind, aber dann mindestens mit λ^n multipliziert auftreten; d. h. also, daß die von P herrührenden Glieder nichts zu den sekularen Störungen von J_j, u_j, v_j beitragen. Ebensowenig tragen diejenigen von R herrührenden Ausdrücke etwas bei, in denen für die J_j, u_j, v_j nichtsekulare Glieder eingesetzt sind; dabei sind die zeitlich konstanten Glieder immer zu den sekularen zu rechnen. Nennen wir die Zusammenfassung aller sekularen Störungsglieder DJ_j bzw. Dv_j, Du_j, so erhält man diese nach dem eben Gesagten auch noch dann, wenn im System (30), (31) alle Glieder mit P vollständig unterdrückt und in R an Stelle von J_j, u_j, v_j jetzt DJ_j, Du_j, Dv_j gesetzt werden. Die sekularen Störungen sind also die Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{dDJ_j}{dt} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \dfrac{dDv_j}{dt} = \lambda \dfrac{\partial R}{\partial Du_j}, \quad \dfrac{dDu_j}{dt} = -\lambda \dfrac{\partial R}{\partial Dv_j} \quad (j = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

Suchen wir die Lösungen dieses Gleichungssystems, die sich für $t = 0$ auf $J_j^{(0)}$, $v_j^{(0)}$, $u_j^{(0)}$ reduzieren, so erhalten wir aus den ersten μ-Gleichungen sofort $DJ_j = J_j^{(0)}$, d. h. die J_j bleiben bei der sekularen Störung konstant. Man kann dann diese Werte in die übrigen Gleichungen einsetzen und erhält ein System von $2m$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung in den $2m$ Veränderlichen $Du_1, \ldots, Du_m, Dv_1, \ldots, Dv_m$ zur Berechnung der sekularen Störungen. Setzen wir rechts überall die nullte Näherung ein, so erhält man durch Integration die erste Näherungslösung:

$$(34)\quad \begin{cases} DJ_k = J_k^{(0)} \ (k = 1, 2, \ldots, \mu), \quad Dv_j = v_j^{(0)} + \lambda \left(\dfrac{\partial R}{\partial Du_j}\right)_0 t, \\ Du_j = u_j^{(0)} - \lambda \left(\dfrac{\partial R}{\partial Dv_j}\right)_0 t \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

was genau mit (32) übereinstimmt, wenn man in ihnen die periodischen Glieder und die Konstanten $a_j^{(0)}$, $b_j^{(0)}$ wegläßt.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Wirkungsvariabeln J_j, die zu den eigentlichen Wirkungsvariablen w_j gehören, auch bei entarteten Systemen keine sekularen Störungen erleiden. Hingegen erfahren die uneigentlichen Winkelvariablen v_j und die zu ihnen gehörenden Wirkungsvariablen sekulare Störungen Dv_j, Du_j, die in erster Näherung durch (34) gegeben sind, im allgemeinen aber den Differentialgleichungen (33) genügen.

4. Die Differentialgleichungen der sekularen Störungen. Wenn wir jetzt der Kürze halber die sekularen Störungen selbst mit u_j, v_j (statt Du_j, Dv_j) bezeichnen, so genügen sie nach (33) den Differentialgleichungen

$$(35) \qquad \frac{dv_j}{dt} = \lambda \frac{\partial R}{du_j}, \quad \frac{du_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial R}{\partial v_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Das ist im Sinne von I, § 2, (52) ein kanonisches System von $2m$ Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Hamiltonschen Funktion $H = \lambda R$. Die Integration kann nach I, § 4, **3** durch Einführung angepaßter kanonischer Veränderlicher geschehen. Wir nehmen der Einfachheit halber hier an, die v_j, u_j seien selbst angepaßte kanonische Veränderliche, d. h. R hänge nur von den $u_1, \ldots, u_m$ ab. Dann folgt aus (35):

$$(36) \quad u_j = u_j^{(0)}, \quad v_j = \sigma_j t + v_j^{(0)}, \quad \sigma_j = \lambda \left(\frac{\partial R}{\partial u_j}\right)_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Da die v_j Winkelvariable sind, d. h. die Lagekoordinaten q_i des Systems periodische Funktionen der v_j mit der Periode 2π sind, so sind die σ_j Schwingungsfrequenzen des gestörten Systems, ebenso wie nach (25), (26) die ν_j Schwingungsfrequenzen des ungestörten. Zu diesen μ Frequenzen treten noch die m-Größen σ_j, so daß durch die Störung das System wieder in ein genau $\mu + m = n$-fach periodisches übergeht, die Entartung also im allgemeinen verschwindet. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn zwischen den σ_j ganzzahlige homogene Relationen bestehen, also z. B. einige unter ihnen verschwinden. Dann ist auch das gestörte System entartet. Die σ_j sind im Verhältnis zu den ν_j klein von der Ordnung λ.

Neben den schnellen Änderungen der w_j (den periodischen) entstehen durch die Störung die langsamen (sekularen) Änderungen der v_j. Berechnen wir die Lagekoordinaten des Systems bei der sekularen Störung, so haben wir in I, § 6, (7) für $w_1, \ldots, w_\mu$, $J_1, \ldots, J_\mu$ ihre Werte aus (22) mit Unterdrückung der periodischen Glieder, für $w_{\mu+1}, \ldots, w_n$, $J_{\mu+1}, \ldots, J_n$ aber die Größen $v_1, \ldots, v_m$, $u_1, \ldots, u_m$ und dafür wieder ihre Werte aus (36) einzusetzen. Dann sind in der Formel für die x_i alle Koeffizienten A und alle Phasenwinkel δ konstant und an Stelle der für das ungestörte entartete, nur μ-fach periodische System geltenden Formel I, § 6, (16) tritt für das durch die Störung nun $m + \mu = n$-fach periodische System:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{c} x_i = A^{(i)} + \sum\limits_{k_1, \ldots, k_\mu, l_1, \ldots, l_m} A^{(i)}_{k_1, \ldots, k_\mu, l_1, \ldots, l_m} \\ \cos[(k_1 \nu_1 + \cdots + k_\mu \nu_\mu + l_1 \sigma_1 + \cdots + l_m \sigma_m) t + \delta_{k_1 \ldots l_m}] \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Bei dieser Darstellung der Bewegung des Systems sind die periodischen Störungen vernachlässigt und $\nu_j = \nu_j^{(0)} + \lambda \nu_j^{(1)}$ gesetzt.

Wenn man annimmt, daß die u_j alle klein sind, so kommt man zu der sogenannten elementaren Theorie der sekularen Störungen. Man wendet zunächst auf die kanonischen Veränderlichen u_j, v_j die Berührungstransformation

$$\xi_j = \sqrt{2u_j}\cos v_j, \quad \eta_j = \sqrt{2u_j}\sin v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

an. Nach Bd. 1, V, § 5, **7** gehen die Gl. (35) dann wieder in kanonische Gleichungen über. Es sei R^* der Ausdruck von R in den neuen Zustandsgrößen ξ_j, η_j. Es gilt also:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \lambda \frac{\partial R^*}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial R^*}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{39}$$

Da aus (38) $2u_j = \xi_j^2 + \eta_j^2$ folgt, kommen in der Entwicklung von R^* nach Potenzen der kleinen Größen ξ_j, η_j nur Glieder von geradem Grade vor. In erster Annäherung setzen wir daher

$$\lambda R^* = r_0 + \tfrac{1}{2} \sum r_{ik}\xi_i\xi_k + s_{ik}(\xi_i\eta_k + \xi_k\eta_i) + t_{ik}\eta_i\eta_k, \tag{40}$$

also nach (39):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} &= \sum_{k=1}^{m} (s_{jk}\xi_k + t_{jk}\eta_k), \\ \frac{d\eta_j}{dt} &= -\sum_{k=1}^{m} (r_{jk}\xi_k + s_{jk}\eta_k) \end{aligned}\right. \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{41}$$

Wir erhalten also ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die sekularen Störungen lassen sich dann im Sinne von II, § 3, **1** als kleine Schwingungen um die ungestörte Bewegung auffassen. Die dort eingeführte Gleichung II, § 3, (9) zur Bestimmung der Schwingungsfrequenz heißt deshalb die „Sekulargleichung“[1]). Man sieht: „sekulare Störungen“ bedeutet nicht „große Störungen“, sondern Störungen, die sich nicht im Mittel über eine Periode des ungestörten Systems aufheben, sondern eine viel größere Periode (kleine Frequenz) haben müssen, wenn sie überhaupt periodisch sind.

Die Gl. (40) ergab sich nur unter der Annahme, daß die u_j, v_j der Hamiltonschen Funktion R „angepaßte“ kanonische Veränderliche sind, also R nur von den $u_1, \ldots, u_m$ abhängt. Doch läßt sich auch, wenn die v_j in R vorkommen, immer die Transformation (38) ausführen, aus der die Gl. (39) folgen. Wenn R eine derartige Gestalt hat, daß für R^* eine Näherungsformel der Form (40) gilt, läßt sich die Theorie der kleinen Schwingungen anwenden.

---

[1]) Siehe 1. Bd., II, § 2, **3**.

§ 2. Störungen elastischer Schwingungen.

1. Die störende Kraft ist in der Elongation quadratisch. Wir betrachten nun als einfaches Beispiel einen Massenpunkt, der in der Ebene um den Ursprung schwingt. Seine rechtwinkligen Koordinaten seien q_1, q_2, seine Masse 1. Als ungestörte Bewegung betrachten wir rein elastische Schwingungen, deren Hamiltonsche Funktion nach I, § 5, (19)

$$H_0 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \tfrac{1}{2}(\nu_1^2 q_1^2 + \nu_2^2 q_2^2) \tag{1}$$

lautet. Für dieses System lassen sich nach I, § 5, 4 angepaßte Winkel- und Wirkungsvariable einführen. Aus der Berührungstransformation I, § 6, (22)

$$q_j = \sqrt{\frac{2J_j}{\nu_j}} \sin w_j, \quad p_j = \sqrt{2 J_j \nu_j} \cos w_j \qquad (j = 1, 2) \tag{2}$$

folgt nämlich

$$H_0 = \nu_1 J_1 + \nu_2 J_2. \tag{3}$$

Den Fall, daß die Kraft nicht genau dem Hookeschen Proportionalitätsgesetz genügt, sondern auch ein dem Quadrat der Elongation proportionales Glied $-\lambda(a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2)$ enthält, können wir, wenn λ klein ist, nach den in § 1 behandelten Methoden der Störungsrechnung behandeln. Die Hamiltonsche Funktion H des Gesamtsystems ist dann nämlich

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{3}(a_1 q_1^3 + a_2 q_2^3). \tag{4}$$

Führen wir in (4) die w_j und J_j nach (2) ein, so erhalten wir die § 1, (14) entsprechende Formel, wobei

$$\Phi = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{2} \cdot a_j \left(\frac{2J_j}{\nu_j}\right)^{3/2} (3 \sin w_j - \sin 3 w_j) \tag{5}$$

aus (4) und (2) mit Hilfe der Formel $4(\sin w)^3 = 3 \sin w - \sin 3w$ hervorgeht. Die Differentialgleichungen für die gestörte Bewegung lauten dann nach § 1, (16):

$$\begin{cases} \dfrac{dw_j}{dt} = \nu_j + \lambda \dfrac{\sqrt{2}}{4} a_j \sqrt{\dfrac{J_j}{\nu_j^3}} (3 \sin w_j - \sin 3 w_j), \\ \dfrac{dJ_j}{dt} = -\lambda \dfrac{a_j}{4} \sqrt{\left(\dfrac{2J_j}{\nu_j}\right)^3} (\cos w_j - \cos 3 w_j) \end{cases} \qquad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Dabei sind die $\nu_j = \nu_j^{(0)}$, weil nach (3) die Ableitungen von $H_0 = E_0^*$ nach den J_j von den J_j unabhängig sind. Wir haben dann auf der rechten Seite überall die nullte Näherung: $w_j = w_j^{(0)} + \nu_j t$, $J_j = J_j^{(0)}$

einzusetzen und erhalten durch Integration entsprechend § 1, (22) die erste Näherungslösung:

$$(7)\quad \begin{cases} J_j = J_j^{(0)} + \lambda\,\psi_j^{(0)} - \lambda\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,a_j\sqrt{\dfrac{J_j^{(0)\,3}}{\nu_j^5}}\,[\sin(\nu_j t + w_j^{(0)}) \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{3}\sin(3\,\nu_j t + 3\,w_j^{(0)})], \\ w_j = w_j^{(0)} + \lambda\,\omega_j^{(0)} \qquad\qquad (j = 1, 2). \\ \qquad + \nu_j t - \lambda\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,a_j\sqrt{\dfrac{J_j^{(0)}}{\nu_j^5}}\,[3\cos(\nu_j t + w_j^{(0)}) \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{3}\cos(3\,\nu_j t + 3\,w_j^{(0)})] \end{cases}$$

Dabei sind die Integrationskonstanten $\psi_j^{(0)}$, $\omega_j^{(0)}$ so bestimmt, daß für $t = 0$ sich $J_j = J_j^{(0)}$, $w_j = w_j^{(0)}$ ergibt. Gegenüber der allgemeinen Gestalt von § 1, (22) sind hier die $\nu_j^{(1)} = 0$, d. h. die Frequenzen der Schwingung erleiden durch die Störung in erster Näherung keine Veränderung. Das rührt nach § 1, (21) daher, daß in unserem Falle nach (5) der „sekulare" Teil der Störungsfunktion $\overline{\Phi} = 0$ ist und die ν_j nicht von den J_j abhängen. Die J_j und w_j der gestörten Bewegung unterscheiden sich von denen der rein elastischen Schwingung nur um „periodische" Glieder, abgesehen davon, daß die Bahnkonstanten selbst um die kleinen Größen $\lambda\,\psi_j^{(0)}$ bzw. $\lambda\,\omega_j^{(0)}$ verändert sind. Die Bahnkurve erfüllt wieder ein Rechteck der q_1, q_2-Ebene überall dicht, wenn wir die ungestörte Bewegung als nicht entartet, genau zweifach periodisch, voraussetzen. Vermöge (2) können wir aus (7) auch Annäherungsformeln für die rechtwinkligen Koordinaten q_1, q_2 selbst erhalten. Wenn wir die durch Einsetzung der Ausdrücke (7) in (2) erhaltenen Formeln für die q_j um die Stellen $J_j = J_j^{(0)} + \lambda\,\psi_j^{(0)}$, $w_j = w_j^{(0)} + \nu_j t + \lambda\,\omega_j^{(0)}$ entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung beibehalten, kommen wir nach einfachen trigonometrischen Umformungen zu folgendem Ergebnis:

$$(8)\quad \begin{cases} q_j = \sqrt{\dfrac{2\,(J_j^{(0)} + \lambda\,\psi_j^{(0)})}{\nu_j}}\,\sin(w_j^{(0)} + \lambda\,\omega_j^{(0)} + \nu_j t) \\ \qquad - \lambda\,\dfrac{a_j J_j^{(0)}}{\nu_j^3}\,[1 + \tfrac{1}{3}\cos(2\,\nu_j t + 2\,w_j^{(0)})] \end{cases} \qquad (j = 1, 2).$$

Die gestörte Bewegung findet also nicht mehr um den Koordinatenursprung als Zentrum statt, sondern das Rechteck, das durch die Bahnkurve ausgefüllt wird, liegt nun symmetrisch um den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $q_j = -\dfrac{\lambda\,a_j\,J_j^{(0)}}{\nu_j^3}$. Diese Verschiebung hängt von $J_j^{(0)}$, also von der Amplitude der elastischen, zur Zeit $t = 0$ oskulierenden Schwingung ab. Die Störungsfunktion ist hier so gewählt,

daß auch im Falle einer Entartung des ungestörten Systems, also einfach periodischer elastischer Schwingung (z. B. $\nu_1 = \nu_2$) die Entwicklungen (7) keine sekularen Glieder ergeben würden.

2. Die störende Kraft ist kubisch. Wenn wir an Stelle von (4) für die Hamiltonsche Funktion der gestörten Bewegung den Ansatz

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{4}(b_1 q_1^4 + b_2 q_2^4) \tag{9}$$

machen, ergibt sich aus (2) mit Hilfe von $8(\sin w)^4 = \cos 4w - 4\cos 2w + 3$ für die Störungsfunktion anstatt (5):

$$\Phi = \frac{3}{8}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(\frac{J_j}{\nu_j}\right)^2 + \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(\frac{J_j}{\nu_j}\right)^2(\cos 4w_j - 4\cos 2w_j). \tag{10}$$

Dabei ist das erste Glied rechts der in § 1, (19) mit $\bar{\Phi}$ bezeichnete sekulare Teil der Störungsfunktion. An Stelle von (6) tritt dann:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_j}{dt} = \nu_j + \lambda\dfrac{3\,b_j J_j}{4\,\nu_j^2} + \lambda\dfrac{b_j J_j}{4\,\nu_j^2}(\cos 4w_j - 4\cos 2w_j), \\ \dfrac{dJ_j}{dt} = \lambda\dfrac{b_j J_j^2}{\nu_j^2}\left(\dfrac{1}{2}\sin 4w_j - \sin 2w_j\right) \end{cases} \qquad (j = 1, 2). \tag{11}$$

Die erste Näherungslösung lautet dann analog zu (7):

$$\begin{cases} J_j = J_j^{(0)} + \lambda\,\psi_j^{(0)} - \lambda\dfrac{b_j}{2}\dfrac{J_j^{(0)\,2}}{\nu_j^3}\left[\tfrac{1}{4}\cos(4\nu_j t + 4w_j^{(0)}) - \cos(2\nu_j t + 2w_j^{(0)})\right], \\ w_j = w_j^0 + \lambda\,\omega_j^{(0)} + \left(\nu_j + \lambda\dfrac{3\,b_j J_j^{(0)}}{4\,\nu_j^2}\right)t \\ \quad + \lambda\dfrac{b_j J_j^{(0)}}{4\,\nu_j^3}\left[\tfrac{1}{4}\sin(4\nu_j t + 4w_j^{(0)}) - 2\sin(2\nu_j t + 2w_j^{(0)})\right] \end{cases} \qquad (j = 1, 2). \tag{12}$$

Wegen des sekularen Teiles von Φ erleidet hier w_j eine sekulare Störung, d. h. die Schwingungsfrequenz ν_j eine λ proportionale Änderung. Berechnen wir wieder die rechtwinkligen Koordinaten, so erhalten wir durch Einsetzen von (12) in (2), wenn wir höhere Potenzen von λ vernachlässigen, hingegen die von λt beibehalten, ganz analog zu (8) nach leichten trigonometrischen Umformungen die Näherung:

$$\begin{cases} q_j = \sqrt{\dfrac{2(J_j^{(0)} + \lambda\,\psi_j^{(0)})}{\nu_j}}\sin\left[w_j^{(0)} + \lambda\,\omega_j^{(0)} + \left(\nu_j + \lambda\dfrac{3\,b_j J_j^{(0)}}{4\,\nu_j^2}\right)t\right] \\ \quad + \lambda\dfrac{b_j J_j^{(0)}}{16\,\nu_j^3}\sqrt{\dfrac{2J_j^{(0)}}{\nu_j}}\cdot[\sin(3\nu_j t + 3w_j^{(0)} - \lambda\nu_j^{(1)}t) \\ \quad - 2\sin(3\nu_j t + 3w_j^{(0)} + \lambda\nu_j^{(1)}t) - 3\sin(\nu_j t + w_j^{(0)} - \lambda\nu_j^{(1)}t)] \end{cases} \qquad j = (1, 2). \tag{13}$$

Dabei ist $\lambda \nu_j^{(1)}$ die infolge der Störung nach (12) eingetretene Frequenzänderung, also $\lambda\, 3\, b_j J_j^{(0)}/4\, \nu_j^2$. Auch die Entwicklungen (12) zeigen im Falle der Entartung ($\nu_1 = \nu_2$) des ungestörten Systems keine Änderung ihres Verhaltens. Das rührt daher, daß die Störungsfunktion (9) sich aus Summanden zusammensetzt, von denen jeder nur die Koordinaten eines einzigen Freiheitsgrades enthält. Die Bewegungsgleichungen der einzelnen Freiheitsgrade lassen sich daher vollkommen trennen, wie es in den Gl. (11) tatsächlich geschehen ist. Um einen Einfluß der Entartung zu finden, müssen wir störende Kräfte annehmen, durch die eine gegenseitige Beeinflussung der Freiheitsgrade, eine Koppelung stattfindet.

3. Die störende Kraft enthält Koppelungsglieder. Wir machen, um einen einfachen Fall zu betrachten, für H den Ansatz:

$$H = H_0 + \frac{b}{2} q_1^2 q_2^2. \tag{14}$$

Hier wie in **1** und **2** sind q_1, q_2 solche rechtwinklige Koordinaten, in denen die Energie H_0 der elastischen Schwingungen sich in der Form (1), d. h. als Summe von Quadraten darstellen läßt. In **1** und **2** war nun angenommen, daß sich in diesen Hauptkoordinaten (s. II, § 3, **3**) auch die Energie der gestörten Bewegung als Summe von Gliedern darstellen ließ, von denen jede nur eine Koordinate enthielt. Diese Annahme über die Gestalt der Störungsfunktion ist mit (14) fallen gelassen. Aus (2) und (14) folgt mit Hilfe leichter trigonometrischer Umformungen:

$$\begin{cases} \Phi = \dfrac{b J_1 J_2}{2 \nu_1 \nu_2} + \dfrac{b J_1 J_2}{4 \nu_1 \nu_2} [\cos 2 (w_1 - w_2) \\ \quad + \cos 2 (w_1 + w_2) - 2 \cos 2 w_1 - 2 \cos 2 w_2]. \end{cases} \tag{15}$$

Dabei stellt das erste Glied rechts wieder den sekularen Teil $\bar{\Phi}$ dar. Die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung lauten dann nach § 1, (16):

$$\begin{cases} \dfrac{d w_1}{d t} = \nu_1 + \lambda \dfrac{b J_2}{2 \nu_1 \nu_2} + \lambda \dfrac{b J_2}{4 \nu_1 \nu_2} [\cos 2 (w_1 - w_2) \\ \quad + \cos 2 (w_1 + w_2) - 2 \cos 2 w_1 - 2 \cos 2 w_2] \\ \dfrac{d w_2}{d t} = \nu_2 + \lambda \dfrac{b J_1}{2 \nu_1 \nu_2} + \lambda \dfrac{b J_1}{4 \nu_1 \nu_2} [\cos 2 (w_1 - w_2) \\ \quad + \cos 2 (w_1 + w_2) - 2 \cos 2 w_1 - 2 \cos 2 w_2]. \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d J_1}{d t} = \lambda \dfrac{b J_1 J_2}{2 \nu_1 \nu_2} [\sin 2 (w_1 - w_2) + \sin 2 (w_1 + w_2) - 2 \sin 2 w_1] \\ \dfrac{d J_2}{d t} = \lambda \dfrac{b J_1 J_2}{2 \nu_1 \nu_2} [-\sin 2 (w_1 - w_2) + \sin 2 (w_1 + w_2) - 2 \sin 2 w_2]. \end{cases} \tag{17}$$

Setzen wir rechts die nullte Näherung ein, so erhalten wir durch Integration die erste Näherung, wobei wir der Kürze halber nur den Wert für J_1 hinschreiben:

$$(18)\quad \begin{cases} J_1 = J_1^{(0)} + \lambda\,\psi_1^{(0)} - \lambda\,\dfrac{b\,J_1\,J_2}{4\,\nu_1\,\nu_2}\Big\{\dfrac{\cos[2\,(\nu_1-\nu_2)\,t + 2\,w_1^{(0)} - 2\,w_2^{(0)}]}{\nu_1-\nu_2} \\ + \dfrac{\cos[2\,(\nu_1+\nu_2)\,t + 2\,w_1^{(0)} + 2\,w_2^{(0)}]}{\nu_1+\nu_2} - \dfrac{2\cos(2\,\nu_1\,t + 2\,w_1^{(0)})}{\nu_1}\Big\}. \end{cases}$$

Wie im Falle von **2** erleiden die J_1, J_2 nur periodische Störungen, hingegen die w_1, w_2 sekulare, die sich in Änderungen $\lambda\,\nu_1^{(1)}$, $\lambda\,\nu_2^{(1)}$ der Frequenzen ν_1, ν_2 äußern. Diese von $\bar{\Phi}$ herrührenden Glieder sind nach (16) oder § 1, (25):

$$(19)\qquad \nu_1^{(1)} = \left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial J_1}\right)_0 = \frac{b\,J_2^{(0)}}{2\,\nu_1\,\nu_2},\quad \nu_2^{(1)} = \left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial J_2}\right)_0 = \frac{b\,J_1^{(0)}}{2\,\nu_1\,\nu_2}.$$

Wir wollen nun annehmen, das ungestörte System sei entartet, d. h. es führe eine einfach periodische elastische Schwingung aus. Wenn wir insbesondere $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ annehmen, so ist die nach (2) durch

$$(20)\quad q_1 = \sqrt{\frac{2\,J_1}{\nu}}\sin(\nu\,t + w_1^{(0)}),\quad q_2 = \sqrt{\frac{2\,J_2}{\nu}}\sin(\nu\,t + w_2^{(0)})$$

dargestellte ungestörte Bahnkurve eine Ellipse. Wenn wir den Einfluß der Störung auf diese Bahn nach (18) berechnen wollten, so würde diese Formel wegen des verschwindenden Nenners $\nu_1 - \nu_2$ versagen. Wenn wir sogleich in (17) rechts $w_1 - w_2 = (\nu_1 - \nu_2)\,t + w_1^{(0)} - w_2^{(0)} = w_1^{0)} - w_2^{(0)}$ setzten, würde das erste Glied von der Zeit unabhängig und daher bei der Integration für J_1 ein in t lineares, also sekulares Glied ergeben. Zur Berechnung der gestörten Bewegung eines einfach periodischen, also entarteten Systems muß daher die in § 1, **3** und **4** entwickelte Theorie der sekularen Störungen verwendet werden.

4. Störungen einfach periodischer Bahnen. Wir nehmen jetzt an, die ungestörte Bewegung sei entartet, also einfach periodisch mit der Periode $2\,\pi/\nu$ und durch (20) dargestellt. Dann kann man nach der allgemeinen Regel von I, § 6, **3** neue Veränderliche einführen, in denen der einfach periodische Charakter durch die Hervorhebung der „eigentlichen" Winkelvariablen zutage tritt. Da die I, § 6, (10) entsprechende Beziehung zwischen den Frequenzen in unserem Falle $\nu_1 - \nu_2 = 0$ lautet, haben wir für die neuen Winkelvariablen, die wir v, w nennen wollen, nach I, § 6, (12) den folgenden Ansatz:

$$(21)\qquad v = w_1 - w_2,\quad w = w_1.$$

Da die entsprechenden Wirkungsvariablen u, J nach I, § 6, (13) die Identität $J w + u v = J_1 w_1 + J_2 w_2$ erfüllen müssen, folgt aus (21):

(22) $J_1 = J + u, \quad J_2 = -u$ oder $J = J_1 + J_2, \quad u = -J_2.$

Da aus (3) dann $H_0 = v J$ folgt, also u in H_0 nicht vorkommt, ist v eine uneigentliche Winkelvariable und w die einzige eigentliche. Die Bewegungsgleichungen in diesen Veränderlichen lauten nach § 1, (25):

(23) $J = J^{(0)}, \quad u = u^{(0)}, \quad v = v^{(0)}, \quad w = v t + w^{(0)}.$

Nach (2), (21) ist $v = (\nu_1 - \nu_2) t + w_1^{(0)} - w_2^{(0)} = w_1^{(0)} - w_2^{(0)}$, die konstante Phasendifferenz zwischen den zwei zueinander senkrechten Partialschwingungen (20), aus denen sich unsere periodische Schwingung zusammensetzt. Die drei Größen u, v, J sind die Bahnkonstanten der Bahnellipse des Massenteilchens. Führt man nämlich in (2) die neuen Veränderlichen v, u, w, J ein, so erhält man:

(24) $q_1 \sqrt{\frac{v}{2(J+u)}} = \sin w, \quad q_2 \sqrt{\frac{v}{-2u}} = \sin(w - v).$

Berechnen wir aus der ersten Gleichung $\sin w$ und $\cos w$ als Funktionen von q_1 und drücken mit Hilfe dieser Formeln die entwickelte rechte Seite der zweiten durch q_1 aus, so erhalten wir durch Quadrieren die Gleichung der Bahnellipse:

(25) $$\frac{q_1^2}{J+u} - \frac{2 q_1 q_2 \cos v}{\sqrt{-u(J+u)}} - \frac{q_2^2}{u} = \frac{2 \sin^2 v}{v}.$$

Wenn nun eine störende Kraft einwirkt, so werden die periodischen Störungen, die sich im Laufe einer Periode $2\pi/v$ des ungestörten Systems im Mittel aufheben, nur bewirken, daß die Gestalt der Bahnkurve nicht ganz genau elliptisch ist, daß sich diese Abweichungen im Laufe der Zeit aber nicht addieren, sondern in jeder Schwingungsperiode $2\pi/v$ immer wieder eine nahezu elliptische Bahn beschrieben wird. Hingegen haben die sekularen Störungen die Wirkung, daß die Bahnkonstanten u, v der Ellipse sich im Laufe vieler Schwingungsperioden langsam ändern. Man kann diese Störungen als langsame Bewegungen und Deformationen der Bahnkurve auffassen, die aber dabei ihre elliptische Gestalt immer nahezu beibehält. Nach der in § 1, 3 entwickelten Theorie bleibt J auch während aller sekularen Störungen konstant, d. h. nach (2) und (22): die Quadratsumme der Amplituden der Partialschwingungen erleidet nur Änderungen, die sich während jeder Periode $2\pi/v$ ausgleichen. Hingegen erfahren u und v sekulare Änderungen, die nach § 1, (35) den Differentialgleichungen

(26) $$\frac{dv}{dt} = \lambda \frac{\partial R}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\lambda \frac{\partial R}{\partial v}$$

genügen, wenn R der sekulare (von w unabhängige) Teil der Störungsfunktion Φ ist. Im Falle von **1** hat die Störungsfunktion (5) überhaupt kein sekulares Glied. Es ist daher $R = 0$ und die Bahnellipse bleibt nach allen ihren Bestimmungsstücken (Lage, Größe, Achsenverhältnis) erhalten. Wenn wir hingegen störende Kräfte nach **2** oder **3** annehmen, so erhalten wir R, wenn wir in (10) bzw. (15) die neuen Veränderlichen u, v, J, w nach (21), (22) einführen und alle w enthaltenden Glieder fortlassen. Er ist dann wegen $\nu_1 = \nu_2 = \nu$:

$$(27)\quad R = \frac{3}{8\nu^2}[b_1(J+u)^2 + b_2 u^2] \quad \text{bzw.} \quad R = -\frac{b(J+u).u}{4\nu^2}(2+\cos 2v).$$

Im ersten Falle ist R nur von u abhängig, das Gleichungssystem (26) ist unmittelbar integrierbar und die Lösung lautet nach § 1, (42)

$$(28)\quad \begin{cases} u = u^{(0)}, \quad v = \sigma t + v^{(0)}, \\ \sigma = \lambda\left(\dfrac{\partial R}{\partial u}\right)_0 = \dfrac{3}{4\nu^2}[b_1(J+u^{(0)}) + b_2 u^{(0)}]. \end{cases}$$

Die Bahnellipse hat also eine Gestalt, die aus Gl. (25) mit $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$, $J = J^{(0)}$ nur durch Änderung des v hervorgeht. Wenn φ der Winkel ist, den die im ersten Quadranten liegende große Halbachse (also auch die Apsidenlinie) der Ellipse mit der q_1-Achse einschließt, so erhält man durch Transformation der Gl. (25) auf die Hauptachsen ($q_1 = q_1' \cos\varphi - q_2' \sin\varphi$, $q_2 = q_1' \sin\varphi + q_2' \cos\varphi$) und Nullsetzen des Koeffizienten von $q_1' q_2'$

$$(29)\quad \operatorname{tang} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{-u(J+u)}}{J+2u}\cos v,$$

woraus nach (28) sich das Gesetz für die Lageänderung der Ellipse (Drehung der Apsidenlinie) ergibt. Wenn man die Längen der Achsen durch u, v, J ausdrückt, erhält man ebenso das Gesetz ihrer Änderung. Ist R durch die zweite der Gl. (27) gegeben, so enthält es auch v und die Gl. (26) lassen sich nicht mehr in geschlossener Form integrieren. Man muß entweder eine neue kanonische Transformation ausführen, durch welche die eine Variable aus R entfernt wird, oder man muß sich mit der Näherungslösung § 1, (34) begnügen, welche nur die in λ linearen Glieder ergibt.

Wenn man aber die Anfangsbedingungen so wählt, daß u klein gegen J ist, so kann man das in **4** auseinandergesetzte Verfahren anwenden, das für kleine u/J die exakten Formeln für die sekularen Störungen (d. h. ohne Potenzen von λ zu vernachlässigen) liefert. Die Annahme bedeutet offenbar, daß die ungestörte Bewegung eine sehr flache Ellipse ist, deren große Achse einen sehr kleinen Winkel mit der q_1-Achse einschließt. Wir führen nach § 1, (38) die neuen Ver-

änderlichen ξ, η ein: $\xi = \sqrt{-2u}\cdot\cos v$, $\eta = \sqrt{-2u}\sin v$ (wobei wir unter der Wurzel $-u$ gesetzt haben, um reelle ξ, η zu erhalten). Durch Einsetzen in die zweite Gl. (27) erhalten wir dann unter Anwendung der Formel $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$ den § 1, (40) entsprechenden Ausdruck:

$$R^* = \frac{bJ}{8\nu^2}(3\xi^2 + \eta^2), \tag{30}$$

wobei alle höheren Potenzen von ξ, η vernachlässigt sind. Die Differentialgleichungen lauten dann nach § 1, (41):

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda\frac{bJ}{4\nu^2}\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\lambda\frac{3bJ}{4\nu^2}\xi. \tag{31}$$

Machen wir nach II, § 3, (7) den Ansatz $\xi = A_1 e^{\mu t}$, $\eta = A_2 e^{\mu t}$, so ergeben sich für A_1, A_2 zwei lineare homogene Gleichungen mit der Determinante $\mu^2 + \lambda^2 3\left(\frac{bJ}{4\nu^2}\right)^2$, deren Nullsetzen die Bestimmungsgleichung für μ, die „Sekulargleichung" ergibt. Da μ rein imaginär ausfällt, setzen wir

$$\mu = i\sigma, \quad \sigma = \lambda\sqrt{3}\,\frac{bJ}{4\nu^2}. \tag{32}$$

Es werden also ξ und η von der Gestalt $a\cos(\sigma t + \delta)$, bleiben also, wenn sie anfangs klein waren, immer klein. Die Bahnellipse bleibt immer flach und die Apsidenlinie führt kleine langsame Schwingungen der Periode $\frac{2\pi}{\sigma}$, die lang gegen $\frac{2\pi}{\nu}$ ist, um die q_1-Achse aus.

5. Die Störungsfunktion enthält die Zeit[1]**).** Wir betrachten hier nur den Fall, daß t in Φ in der Verbindung $w_j - \varepsilon t$ enthalten ist, wo ε eine beliebige reelle Konstante ist. Dann ist nach (2) die Hamiltonsche Funktion H des gestörten Systems von der Form

$$H = \nu_1 J_1 + \nu_2 J_2 + \lambda f(w_1 - \varepsilon t, w_2 - \varepsilon t), \tag{33}$$

wo f eine beliebige Funktion ihrer beiden Veränderlichen und der J_j ist.

Führen wir neue Veränderliche w_j', J_j' durch

$$w_j - \varepsilon t = w_j', \quad J_j = J_j' \quad (j = 1, 2) \tag{34}$$

ein, so ist (34) nach I, § 4, (16), (18) nur dann eine Berührungstransformation, wenn auch H entsprechend transformiert wird. In den zitierten Formeln ist, um auf unseren Fall zu kommen, an Stelle von $q_i, p_i, b_i, a_i, q_i^*, p_i^*$ jetzt $w_j, J_j, \varepsilon, 0, w_i', J_i'$ zu setzen. Dann folgt für die neue Hamiltonsche Funktion $\bar{H}$

$$\bar{H} = H - \varepsilon J_1' - \varepsilon J_2' = (\nu_1 - \varepsilon)J_1' + (\nu_2 - \varepsilon)J_2' + \lambda f(w_1', w_2'). \tag{35}$$

[1]) P. Epstein, Die Störungsrechnung im Dienst der Quantentheorie. Zeitschr. f. Phys. 8, 211, 305; 9, 92, 1922.

Dieses $\bar{H}$ ergibt sich übrigens auch sofort aus der allgemeinen Bedingung I, § 4, (9) für eine Berührungstransformation, die wegen der Linearität von (34) in unserer Bezeichnung $\sum J_j w_j - Ht = \sum J'_j w'_j - \bar{H}t$ lautet. Aus (35) ergeben sich die Bewegungsgleichungen des gestörten Systems, die jetzt nicht die Gestalt (2), sondern (3) haben, also

$$(36) \qquad \frac{dw'_j}{dt} = \nu_j - \varepsilon + \lambda \frac{\partial f}{\partial J'_j}, \quad \frac{dJ'_j}{dt} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial w'_j} \qquad (j = 1, 2).$$

Diese Gleichungen werden beim Dispersionsproblem[1]) angewendet.

§ 3. Der Energieausdruck für gestörte Systeme.

1. Angepaßte kanonische Veränderliche. Die bisher verwendeten Winkel- und Wirkungsvariablen w_j, J_j waren dem „ungestörten System angepaßt" in dem Sinne, daß dessen Hamiltonsche Funktion H_0 sich durch die J_j allein ausdrücken ließ. Anstatt nun die Differentialgleichungen § 1, (16) durch das in § 1 auseinandergesetzte Näherungsverfahren zu integrieren, könnte man auch von den w_j, J_j durch eine Berührungstransformation zu neuen kanonischen Veränderlichen w'_j, J'_j übergehen, die dem gestörten System angepaßt sind, in denen also $H_0 + \lambda \Phi$ eine Funktion der J'_j allein wird. Wegen der Kleinheit von λ kann die gesuchte Transformation nicht viel von der Identität abweichen und wir suchen sie wieder durch ein Näherungsverfahren zu finden. Nach I, § 4, (13) ist eine kanonische Transformation (wenn wir statt q_i, p_i, Q_i, P_i jetzt w_j, J_j, w'_i, J'_j setzen) durch eine charakteristische Funktion $F(w_1, \ldots, w_n, J'_1, \ldots, J'_n)$ bestimmt und lautet:

$$(1) \qquad J_j = \frac{\partial F}{\partial w_j}, \quad w'_j = \frac{\partial F}{\partial J'_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir machen für F den Ansatz

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(w_1, \ldots, w_n, J'_1, \ldots, J'_n) \\ = \sum_{h=1}^{n} w_h J'_h + \lambda F_1(w_1, \cdots, J'_1, \cdots) + \lambda^2 F_2 + \cdots, \end{array} \right.$$

der für $\lambda = 0$ nach (1) in die Identität $w_j = w'_j$, $J_j = J'_j$ übergeht. Da wir verlangen, daß die w'_j auch Winkelvariable sein sollen, dürfen sie sich von den w_j nur um Glieder unterscheiden, die periodisch in den w_h mit der Periode 2π sind. Da aus (1) und (2)

$$(3) \qquad w'_j = w_j + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial J'_j} + \lambda^2 \frac{\partial F_2}{\partial J'_j} + \cdots$$

folgt, müssen die $F_1, F_2, \ldots$ in den w_j periodisch mit der Periode 2π sein. Sollen die w'_j, J'_j dem gestörten System angepaßt sein, so müssen

[1]) P. Epstein, l. c.; M. Born, Zeitschr. f. Phys. **26**, 379, 1924.

nach dem Einsetzen der Ausdrücke (1), (2) für die J_j in $H_0 + \lambda \Phi$ [wo Φ durch § 1, (15) gegeben ist] alle w_j herausfallen, also $H_0 + \lambda \Phi$ eine Funktion der J'_j allein werden. Es muß also, wenn wir für diesen Energieausdruck E den Ansatz $E = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \cdots$ machen, die folgende Identität bestehen:

$$(4) \qquad \begin{cases} H_0\left(J'_j + \lambda \dfrac{\partial F_1}{\partial w_j} + \lambda^2 \dfrac{\partial F_2}{\partial w_j} + \cdots\right) \\ + \lambda \Phi\left(w_j, J'_j + \lambda \dfrac{\partial F_1}{\partial w_j} + \lambda^2 \dfrac{\partial F_2}{\partial w_j} + \cdots\right) \\ = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo immer anstatt aller Argumente nur das eine mit dem Index j angeschrieben ist und die E_0, E_1, E_2 ... Funktionen der J'_j allein sind. Entwickeln wir nach Potenzen von λ und vergleichen die Koeffizienten $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots$ auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$(5) \qquad H_0(J'_1, \ldots, J'_n) = E_0(J'_1, \ldots, J'_n)$$

$$(6) \qquad \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_h}\right)' \frac{\partial F_1}{\partial w_h} + \Phi(w_1, \ldots, w_n, J'_1, \ldots, J'_n) = E_1(J'_1, \ldots, J'_n)$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum_h \left(\dfrac{\partial H_0}{\partial J_h}\right)' \dfrac{\partial F_2}{\partial w_h} + \dfrac{1}{2} \sum_{hr} \left(\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial J_h \partial J_r}\right)' \dfrac{\partial F_1}{\partial w_h} \dfrac{\partial F_1}{\partial w_r} + \sum_h \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial J_h}\right)' \dfrac{\partial F_1}{\partial w_h} \\ = E_2(J'_1, \ldots, J'_n). \end{cases}$$

Dabei deutet $(\ldots)'$ immer an, daß in dem eingeklammerten Ausdruck $J_j = J'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ zu setzen ist. Nun ist (6) eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für F_1 als Funktion der $w_1, \ldots, w_n$. Wird F_1 aus ihr berechnet und in (7) eingesetzt, so wird aus (7) eine Differentialgleichung desselben Typus für F_2 usw., so daß man die ganze Entwicklung (2) durch fortwährende Auflösung von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten berechnen kann. Dann gibt aber (1) die der gestörten Bewegung angepaßten kanonischen Veränderlichen und damit die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen, da die J'_j konstant bleiben und die w'_j linear mit der Zeit sich ändern. Diese Integrationsmethode ist an und für sich nicht einfacher als die in § 1 auseinandergesetzte. Aber sie bietet einen großen Vorteil, wenn man nicht die gestörte Bewegung selbst kennenlernen will, sondern nur ihre Energie als Funktion der angepaßten Wirkungsvariablen J'_j, also die Reihe $E = E_0 + \lambda E_1 + \cdots$

2. Berechnung des Energieausdruckes. Die Energie jedes mechanischen Systems läßt sich nach I, § 2, **6** als Funktion der $2n - 1$ Konstanten darstellen, von denen die Bahnkurven abhängen. Sind aber n Konstante die Werte eines Involutionssystems von n Integralen, so läßt sich nach

I, § 4, 4 die Energie schon durch diese n Konstanten allein darstellen. Solche n Konstanten sind auch die einem System angepaßten Wirkungsvariablen $J_1, \ldots, J_n$, als deren Funktion die Energie nach I, § 5, (37) sich ausdrücken läßt. Wir wollen diese Darstellung kurz den „Energieausdruck" nennen. Die in 1 auseinandergesetzte Methode wurde (im Anschluß an einen Gedanken von N. Bohr und Kramers) von Born und Pauli dazu ausgearbeitet[1]), um den Energieausdruck für ein gestörtes System zu berechnen. Das erste Glied in der Entwicklung von E erhält man nach (5) einfach durch Einsetzen der J_j' anstatt der J_j in die Energie H_0 der ungestörten Bewegung. Setzt man in (6) für $\bar{\Phi}$ seinen Ausdruck § 1, (15) und bedenkt, daß $F_1, F_2, \ldots$ wegen ihrer Periodizitätseigenschaften auch die Gestalt von Φ haben müssen und daher die Differentialquotienten von F_1 nach den w_h nur in den in $w_1, \ldots, w_n$ periodische Glieder enthalten können, so kann man (6) in sehr einfacher Weise über alle w_h von 0 bis 2π integrieren und durch $(2\pi)^n$ dividieren. Man erhält dann wegen des Verschwindens der Integrale über die periodischen Glieder

$$E_1(J_1', \ldots, J_n') = \bar{\Phi}(J_1', \ldots, J_n'). \tag{8}$$

In erster Näherung kann man also den Energieausdruck der gestörten Bewegung ohne jede Integration als

$$E = H_0(J_1', \ldots, J_n') + \lambda \bar{\Phi}(J_1', \ldots, J_n') \tag{9}$$

erhalten. Es tritt zur Energie der ungestörten Bewegung das unperiodische (sekulare) Glied der Störungsfunktion. Durch Einsetzen von E_1 nach (8) in (6) wird daraus wegen § 1, (15)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=1}^{n} \nu_h^{(0)} \frac{\partial F_1}{\partial w_h} = \bar{\Phi} - \Phi = -\sum_{k_1, \ldots, k_n} f_{k_1, \ldots, k_n}(J_1', \ldots, J_n'). \\ \qquad \cos[k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n + \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(J_1', \ldots, J_n')]. \end{array} \right. \tag{10}$$

Dabei ist $\nu_h^{(0)} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_h}\right)'$.

Die lineare partielle Differentialgleichung (10) hat offenbar die Lösung

$$F_1 = -\sum_{k_1, \ldots, k_n} \frac{f_{k_1, \ldots, k_n}(J_1', \ldots, J_n')}{k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)}} \sin[k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n + \varphi]. \tag{11}$$

Setzen wir diesen Wert in (7) ein und bilden wieder für alle w_h den Mittelwert über eine Periode 2π, so verschwinden alle Glieder,

---

[1]) M. Born und W. Pauli jr., Über die Quantelung gestörter mechanischer Systeme. Zeitschr. f. Phys. **10**, 137, 1922.

die von der Mittelbildung über die periodischen Glieder (d. h. die in den Differentialquotienten von F_2 linearen) herrühren und es bleibt

$$(12)\quad E_2(J_1', \ldots, J_n') = \frac{1}{2}\sum_{hr}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_h \partial J_r}\right)' \overline{\frac{\partial F_1}{\partial w_h}\frac{\partial F_1}{\partial w_r}} + \sum_h \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial J_h}\right)' \frac{\partial F_1}{\partial w_h}}.$$

Dabei bedeutet der Querstrich die Mittelbildung im früheren Sinne. Ihr Ergebnis sind wieder die unperiodischen Glieder. Obwohl nämlich die Ableitungen von F_1 und Φ selbst in den $w_1 \ldots w_n$ periodisch sind, können doch durch Multiplikation und Entwicklung in trigonometrische Reihen unperiodische Glieder entstehen, wie z. B. $\cos w \cos w = \frac{1}{2}(1 + \cos 2w)$. Der charakteristische Vorteil der Methode von Born und Pauli besteht darin, daß zur Berechnung von E_1 das F überhaupt nicht berechnet werden muß, zur Berechnung von E_2 nur F_1 usw. Das Verfahren läßt sich ja offenbar beliebig fortsetzen und liefert den Energieausdruck mit beliebiger Genauigkeit. Das Verfahren versagt nur, wenn das ungestörte System entartet ist, weil dann zwischen den Frequenzen $\nu_h^{(0)}$ desselben gewisse Relationen der Form $k_1 \nu_1^{(0)} + \cdots + k_n \nu_n^{(0)} = 0$ bestehen, infolgederen gewisse Nenner der Entwicklungen (11) verschwinden können.

3. Das ungestörte System ist entartet. Wir betrachten wie in § 1, 3 ein genau μ-fach periodisches System und führen wie dort eigentliche und uneigentliche Winkelvariable ein. Die Hamiltonsche Funktion lautet dann nach § 1, (29) in kanonischen Veränderlichen, die dem ungestörten System angepaßt sind:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} H = H_0 + \lambda\Phi = H_0(J_1, \ldots, J_\mu) \\ + \lambda R(J_1, \ldots, J_\mu, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m) \\ + \lambda P(J_1, \ldots, w_1, \ldots, u_1, \ldots, v_1, \ldots). \end{array}\right.$$

Wir suchen nun neue kanonische Veränderliche w_j', J_j', v_j', u_j', die der gestörten Bewegung angepaßt sind, wobei wir zunächst nur den sekularen Teil R der Störungsfunktion berücksichtigen. Wir suchen also, wie es auch zur Integration der Differentialgleichungen § 1, (35) erforderlich ist, eine solche Berührungstransformation, daß die v_j' in R' (dem transformierten R) nicht mehr vorkommen. Damit aber nicht etwa gleichzeitig die w_j' in H_0 eingeschleppt werden, setzen wir die charakteristische Funktion $G(w_1, \ldots, w_\mu, v_1, \ldots, v_m, J_1', \ldots, J_m', u_1', \ldots, u_m')$ der gesuchten Transformation in der Form an:

$$(14)\quad G = w_1 J_1' + \cdots + w_\mu J_\mu' + G_0(J_1', \ldots, J_\mu', v_1, \ldots, v_m, u_1', \ldots, u_m').$$

Dann lautet analog zu (1), wenn G an Stelle von F tritt, die Transformation:

$$(15)\quad \left\{ J_j = \frac{\partial G}{\partial w_j} = J_j', \quad w_j' = \frac{\partial G}{\partial J_j'} = w_j + \frac{\partial G_0}{\partial J_j'}, \quad u_j = \frac{\partial G_0}{\partial v_j}, \quad v_j' = \frac{\partial G_0}{\partial u_j'}. \right.$$

Ist die Transformation von der gewünschten Art, so folgt durch Einsetzen in (13)

$$(16)\quad \begin{cases} H = H_0(J'_1, \ldots, J'_\mu) + \lambda R'(J'_1, \ldots, J'_\mu, u'_1, \ldots, u'_m) \\ \qquad + \lambda P'(J'_1, \ldots, w'_1, \ldots, u'_1, \ldots, v'_1, \ldots). \end{cases}$$

Da während der ungestörten Bewegung die J'_j, u'_j, v'_j konstant bleiben, sind nach (15) die w'_j von den w_j nur um additive Konstante verschieden, also auch Winkelkoordinaten. Es ist also P' wieder periodisch in den $w'_1, \ldots, w'_\mu$ mit der Periode 2π. Um nun noch aus P' die w'_j zu entfernen, wenden Born und Pauli[1]) auf den Ausdruck (16) das Verfahren von **1** und **2** noch einmal an, wobei an Stelle von Φ jetzt $R' + P'$ tritt und die Transformation sich nur auf die eigentlichen Winkelvariablen w'_j und die dazu gehörigen J'_j bezieht, während die u'_j, v'_j überhaupt unverändert bleiben. Man sucht also eine Funktion $F(w'_1, \ldots, w'_\mu, J''_1, \ldots, J''_\mu)$, aus der eine derartige Transformation der w'_j, J'_j in w''_j, J''_j:

$$(17)\quad J'_j = \frac{\partial F}{\partial w'_j}, \quad w''_j = \frac{\partial F}{\partial J''_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu)$$

hervorgeht, daß beim Einsetzen des Ausdruckes für die J'_j in H (Gl. 16) die w'_j vollständig herausfallen. Setzen wir F wieder in der Form (2) an, so muß H sich wieder in eine Reihe $E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \cdots$ entwickeln lassen, wobei in den $E_0, E_1, E_2, \ldots$ die w'_j nicht vorkommen. Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich dann ganz analog zu (5) und (6)

$$(18)\quad H_0(J''_1, \ldots, J''_\mu) = E_0$$

$$(19)\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{\mu} \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_h}\right)'' \frac{\partial F_1}{\partial w'_h} + R'(J''_1, \ldots, J''_\mu, u'_1, \ldots, u'_m) \\ + P'(w'_1, \ldots, w'_\mu, J''_1, \ldots, J''_\mu, u'_1, \ldots, u'_m, v'_1, \ldots, v'_m) = E_1. \end{cases}$$

Bilden wir für alle $w'_1, \ldots, w'_\mu$ den Mittelwert über die Periode 2π so verschwindet er wegen der Periodizität der Differentialquotienten von F_1 und der Funktion P' für diese Glieder und man erhält, weil E_1 von den w'_j unabhängig ist: $E_1 = R'$, was für E die erste Näherung

$$(20)\quad E = H_0(J''_1, \ldots, J''_\mu) + \lambda R'(J''_1, \ldots, J''_\mu, u'_1, \ldots, u'_m)$$

ergibt. Zum Energieausdruck der ungestörten Bewegung addiert sich der Energieausdruck, wie er sich aus den Differentialgleichungen § 1, (35) der sekularen Störungen ergibt. Denn diese Gleichungen bilden selbst ein kanonisches Gleichungssystem mit der Energie R, und in (20) steht der Ausdruck dieser Energie in angepaßten Wirkungsvariablen u'_j. Mit dieser ersten Näherung begnügen wir uns hier[2]).

[1]) a. a. O.

[2]) Für die Berechnung der weiteren Glieder sei auf die oben zitierte Arbeit von Born und Pauli verwiesen.

§ 4. Der Energieausdruck für unharmonische Schwingungen.

1. Die oskulierende harmonische Schwingung ist nicht entartet. Man kann die in § 3 entwickelte Theorie anwenden, um den Energieausdruck für solche unharmonische Schwingungen zu berechnen, die man als durch kleine Störungen aus elastischen hervorgegangen ansehen kann. Betrachten wir zunächst den Fall von § 2, **1**, wo die Störungsfunktion Φ durch § 2, (5) gegeben ist. Wenn wir die dem gestörten System angepaßten Wirkungsvariablen mit J_j (ohne Strich) bezeichnen, ist nach § 2, (3) und § 3, (5): $E_0 = \nu_1 J_1 + \nu_2 J_2$, ferner ist nach § 3, (8) wegen des Fehlens unperiodischer Glieder in Φ das Reihenglied $E_1 = 0$, so daß E in erster Näherung durch E_0 gegeben ist. E_2 berechnet sich dann aus § 3, (12). Um diese Formel auszuwerten, ist zuerst F_1 aus § 3, (11) zu berechnen. Es ergibt sich bei Benutzung des Φ aus § 2, (5)

$$F_1 = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{2} a_j \left(\frac{2J_j}{\nu_j}\right)^{3/2}\left(\frac{3\cos w_j}{\nu_j} - \frac{\cos 3w_j}{\nu_j}\right). \tag{1}$$

Setzen wir diesen Wert und den von Φ aus § 2, (5) in § 3, (12) ein, wobei die Doppelsumme verschwindet, weil H_0 in den J_j linear ist, so erhalten wir einen Ausdruck, aus dem sich durch einfache Umformungen alle Produkte trigonometrischer Funktionen wegschaffen lassen, so daß eine Summe trigonometrischer Ausdrücke entsteht, aus der bei der auszuführenden Mittelbildung nur die unperiodischen Glieder übrigbleiben. Man erhält so

$$E_2 = -\frac{5}{12}\sum_{h=1}^{2}\frac{a_h^2 J_h^2}{\nu_h^2}. \tag{2}$$

Die Näherungsformel für E lautet also:

$$E = \nu_1 J_1 + \nu_2 J_2 + \lambda^2(\nu_{11}J_1^2 + \nu_{22}J_2^2), \quad \nu_{hh} = -\frac{5a_h^2}{12\nu_h^2}. \tag{3}$$

Wenn wir dieselbe Rechnung für die Störungsfunktion Φ nach § 2, (15) durchführen, erhalten wir schon für die erste Näherung $E_0 + \lambda E_1$ einen von E_0 verschiedenen Ausdruck, weil Φ ein unperiodisches Glied enthält, das E_1 gleich ist. Führen wir das Verfahren wieder bis zur zweiten Näherung durch, so wird:

$$E = \nu_1 J_1 + \nu_2 J_2 + \lambda\nu_{12}J_1J_2 + \lambda^2(\nu_{112}J_1^2J_2 + \nu_{122}J_1J_2^2). \tag{4}$$

$$\nu_{12} = \frac{b}{2\nu_1\nu_2}, \quad \nu_{112} = -\frac{b}{4\nu_1\nu_2}\left[\frac{1}{2(\nu_1-\nu_2)} + \frac{1}{2(\nu_1+\nu_2)} - \frac{2}{\nu_1}\right]. \tag{5}$$

ν_{122} ist der durch Vertauschung der Indizes aus ν_{112} (5) entstehende Ausdruck. Wenn das System ein entartetes wird, z. B. $\nu_1 = \nu_2$, so sind die Formeln (4), (5) zur Berechnung des Energieausdruckes nicht mehr anwendbar; die Formel (5) für das ν_{112} in der zweiten Näherung ver-

sagt überhaupt; aber auch die erste Näherung wird unrichtig, weil in den Störungsfunktionen durch die Entartung das Glied mit $w_1 - w_2$ zu den sekularen hinzutritt, so daß der sekulare Teil von Φ die Gestalt R der zweiten Gleichung § 3, (27) annimmt und nicht mehr von den Wirkungsvariablen allein abhängt. Man muß also das Verfahren von § 3, **3** anwenden.

2. Einfach periodische Grundbewegung. Wir gehen wieder von der Störungsfunktion § 2, (15) aus, setzen aber eine einfach periodische ungestörte Bewegung voraus, also $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, führen wieder in § 2, (21), (22) die Veränderlichen v, w, u, J ein. Der Energieausdruck ist dann in erster Näherung durch § 3, (20) gegeben, wobei R' sich aus dem zweiten Ausdruck für R in § 3, (27) berechnet, indem man R als Hamiltonsche Funktion eines mechanischen Problems auffaßt und die angepaßten Veränderlichen u', v' einführt. Bezeichnen wir mit ϱ den numerischen Wert von R, der durch die Werte von u, v, J für die ungestörte Bewegung gegeben ist und während der ganzen sekularen Störung konstant bleibt, so läßt sich die Hamilton-Jakobische partielle Differentialgleichung

$$(6) \qquad -\frac{b(J+u)u}{4\nu^2}(2+\cos 2v) = \varrho$$

nach der Methode der Separation der Veränderlichen behandeln, weil nur eine einzige Lagekoordinate v vorkommt. Man hat nach I, § 5, **1**, **3**, einfach (6) nach u aufzulösen. Man erhält so

$$(7) \qquad u = -\frac{J}{2} + \sqrt{\frac{J^2}{4} - \frac{4\varrho\nu^2}{b(2+\cos 2v)}},$$

wenn wir den Zweig der Funktion hinschreiben, der für $\varrho = 0$ verschwindet. Wir definieren dabei gemäß § 3, (14), (15) eine Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion G

$$(8) \quad G = wJ' + \int\left(-\frac{J'}{2} + \sqrt{\frac{J'^2}{4} - \frac{4\varrho\nu^2}{b(2+\cos 2v)}}\right)dv = wJ' + G_0.$$

Dabei ist zu beachten, daß man ϱ als Funktion von J' und u' nach I, § 5, (36) findet, wenn man dort an Stelle von J_1, J_2, q_1, q_2, p_1, p_2 die Größen J', u', w, v, J, u einsetzt, während die P_1, P_2 jetzt nur in der Kombination ϱ vorkommen. Man erhält so

$$(9) \quad J' = \frac{1}{2\pi}\oint J\,dw,\; u' = \frac{1}{2\pi}\oint\left[-\frac{J}{2} + \sqrt{\frac{J^2}{4} - \frac{4\varrho\nu^2}{b(2+\cos 2v)}}\right]dv.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $J = J'$. Setzt man das in die zweite ein, und löst man sie nach ϱ auf, so erhält man ϱ als Funktion von J' und u', also die gesuchte Funktion R'. Die explizite Berechnung

von R' gelingt nur in dem Falle, daß u klein gegen J ist. Dann ist nach (6) auch ϱ klein gegen J und wir können den Integranden in (9) nach Potenzen dieser kleinen Größen entwickeln. Man erhält dann

$$(10)\quad 2\pi u' = -\frac{4\nu^2}{b}\frac{\varrho}{J}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{2+\cos 2v} - \frac{16\nu^4}{b^2}\frac{\varrho^2}{J^3}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{(2+\cos 2v)^2}\cdots,$$

wo die Umlaufsintegrale in gewöhnliche Integrale umgeformt sind. Wegen der Integralformel [1])

$$(11)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{a+\varepsilon\cos 2v} = \frac{1}{\sqrt{a^2-\varepsilon^2}}$$

und der durch Differentiation nach a daraus hervorgehenden erhält man aus (10)

$$(12)\quad u' = -\frac{4\nu^2}{b\sqrt{3}}\frac{\varrho}{J} - \frac{32\nu^4}{3b^2\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{J^3}\cdots$$

Bezeichnet man mit ϱ_n den n-ten Näherungswert für ϱ, den man erhält, wenn man in (9) rechts n Glieder stehen läßt, nach ϱ auflöst und die Glieder bis zur n-ten Potenz in u' beibehält, so lautet die zweite Näherung ϱ_2, mit der wir uns zur Berechnung von R' begnügen wollen:

$$(13)\quad R' = -\frac{b\sqrt{3}}{4\nu^2}Ju' - \frac{b}{2\nu^2}u'^2.$$

Da nach § 3, (20) und (15) einfach $J = J' = J''$ in (10) einzusetzen ist, um die Endformel zu erhalten, ergibt sich für den Energieausdruck, wenn wir die angepaßten Wirkungsvariablen wieder mit J, u (ohne Strich) bezeichnen:

$$(14)\quad E = J\nu - \frac{b\sqrt{3}}{4\nu^2}Ju - \frac{b}{2\nu^2}u^2.$$

Wenn wir das Umlaufsintegral in (9) ohne Vernachlässigungen berechnen wollen, so ist folgendes zu beachten [2]). Wenn die Quadratwurzel in (7) für alle Werte von v (zwischen 0 und 2π) einen reellen Wert liefert, so nimmt u seinen Anfangswert wieder an, wenn v um 2π gewachsen ist; das Umlaufsintegral in (9) ist also wie in (10) über v von 0 bis 2π zu erstrecken. Dieser Fall (der Fall der „Periodizität", weil u eine periodische Funktion von v wird) tritt aber offenbar nur ein, wenn der Radikand in (7) auch noch für $\cos 2v = -1$ nicht negativ ist:

$$(15)\quad \varrho \leqq \frac{bJ^2}{16\nu^2}.$$

[1]) Siehe 1. Bd., I, § 2, (32).
[2]) Siehe P. Epstein, a. a. O.

Das gilt z. B. immer, wenn ϱ sehr klein ist, wie im Falle von (10). Wenn hingegen ϱ größer ist als die Ungleichung (15) verlangt, so ergibt sich für v ein gewisser Grenzwert, über den hinaus es nicht wachsen kann, ohne daß u aufhört reell zu sein. Dieser Grenzwert ist durch

$$2 + 2\cos v = \frac{16\, v^2}{b J^2}\, \varrho \tag{16}$$

bestimmt. Aus (16) ergeben sich für v zwei Werte: $\pm v^*$, zwischen denen v hin und her pendeln muß, wenn u reell bleiben soll. Das Umlaufsintegral in (9) ist zwischen den beiden Nullstellen $\pm v^*$ des Radikanden zu erstrecken, und zwar in dem einen Sinne mit positiv genommener, im anderen mit negativ genommener Quadratwurzel. Es schreibt sich daher (9)

$$2\pi u' = 2\int_{-v^*}^{+v^*} \left[-\frac{J}{2} + \sqrt{\frac{J^2}{4} - \frac{4\,\varrho\, v^2}{b\,(2+\cos 2v)}} \right] dv. \tag{17}$$

Es tritt der Fall der Pendelung oder „Libration“ ein. Aus (5) ergibt sich, daß durch Wahl von ϱ Periodizität oder Libration bewirkt werden kann.

Fünftes Kapitel.

Probleme der Himmels- und Atommechanik.

§ 1. Die Keplerbewegung.

1. Bahnelemente der Keplerellipse. Wenn im Koordinatenursprung eine Masse M sich befindet, die auf eine andere Masse m (mit den ebenen Polarkoordinaten r, χ) eine gegen M gerichtete anziehende Kraft ausübt, die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz durch

$$R = -\varkappa \frac{M m}{r^2} \tag{1}$$

gegeben ist, so lautet die Differentialgleichung der Bahnkurve nach II, § 3, (20)

$$\frac{d^2\varrho}{d\chi^2} + \varrho = C\varkappa M m, \quad \varrho = \frac{1}{r}, \tag{2}$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist. Führen wir $\varrho - C\varkappa M m$ als neue Veränderliche ein, so läßt sich (2) leicht integrieren, wobei zwei weitere willkürliche Konstanten auftreten. Bei geeigneter Bezeichnung

der drei Integrationskonstanten in der endlichen Gleichung der Bahnkurve lautet diese in ebenen Polarkoordinaten

$$(3) \qquad \varrho = \frac{1 + \varepsilon \cos(\chi - \chi_0)}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\chi - \chi_0)}.$$

Wenn $\varepsilon < 1$ ist, wie wir jetzt immer annehmen wollen, ist (3) die Polargleichung einer Ellipse mit der großen Halbachse a (deren Richtung den Winkel χ_0 mit der Polarachse einschließt) und mit der numerischen Exzentrizität ε. Die Annahme $\varepsilon < 1$ ist deshalb notwendig, weil nach II, § 3 beim Kraftgesetz (1) die durch (2) und (3) gegebene Bahnkurve nur bei positivem C wirklich durchlaufen werden kann, aus $C > 0$ aber $\varepsilon < 1$ folgt. Wenn wir auch noch die Lage der Bahnkurve im Raume festlegen wollen, kann das durch Angabe von zwei weiteren Größen geschehen: dem Winkel i, den die Bahnkurve mit der Äquatorebene $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ des Systems räumlicher Polarkoordinaten I, § 2, (16) einschließt, und dem Winkel Ω zwischen der Schnittlinie von Bahn- und Äquatorebene (der Knotenlinie) und der x-Achse $\left(\varphi = 0,\ \vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$. Wenn wir dann die Polarachse ($\chi = 0$) des ebenen Koordinatensystems in die Knotenlinie legen, ist die Ellipsenbahn nach Lage und Gestalt durch folgende fünf Konstanten bestimmt: a, ε, χ_0, i (die Schiefe der Bahn), Ω (Länge des aufsteigenden Knotens). Anstatt χ_0 wird auch oft die Größe $\Pi = \Omega + \chi_0$, die „Länge des Perihels", verwendet. Die fünf „Bahnelemente" zusammen mit der Zeit t_0, zu der die Masse m durch das Perihel geht, bilden die sechs Integrationskonstanten des Problems. Da die Energieformel in ebenen bzw. räumlichen Polarkoordinaten

$$(4) \quad E = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\chi^2) - \varkappa\frac{Mm}{r} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) - \varkappa\frac{Mm}{r}$$

autet, ist im ersteren Falle χ, im zweiten φ eine verborgene Koordinate. Nach I, § 2, (3) sind daher $p_\chi = mr^2\dot\chi$ und $p_\varphi = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi$ während der Bewegung konstant, müssen sich also durch die Bahnelemente ausdrücken lassen. Wenn wir benutzen, daß die kinetische Energie eine homogene Funktion zweiten Grades ist, so folgt nach I, § 2, (3), wenn wir beide Ausdrücke in (4) umformen: $p_r\dot r + p_\chi\dot\chi = p_r\dot r + p_\varphi\dot\varphi + p_\vartheta\dot\vartheta$, also

$$(5) \qquad p_\chi\dot\chi = p_\vartheta\dot\vartheta + p_\varphi\dot\varphi.$$

Wir legen durch die Masse m die Kugel mit dem Radius r um den Ursprung M und zeichnen uns auf diese Kugel folgende Kreise: den Schnittkreis mit der Bahnebene, den Äquator des Polarsystems $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$, den Parallelkreis und den Meridian durch m. Wenn der Winkel

zwischen den Ebenen der Bahn und des Parallelkreises (mit dem Polabstand ϑ) mit β bezeichnet wird, erhalten wir durch Zerlegung des tangentialen Geschwindigkeitsvektors mit der Länge $r\dot{\chi}$ nach zwei aufeinander senkrechten Komponenten längs Parallelkreis und Meridian: $\dot{\chi}\cos\beta = \dot{\varphi}\sin\vartheta$, $\dot{\chi}\sin\beta = \dot{\vartheta}$. Für das rechtwinklige sphärische Dreieck, das aus Äquator, Meridian und Bahnebene gebildet ist, folgt $\cos i = \cos\beta\sin\vartheta$. Daher ergibt sich für die Impulskomponenten:

$$(6)\qquad \begin{cases} p_r = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = m r^2\dot{\vartheta} = m r^2\dot{\chi}\sin\beta = p_\chi\sqrt{1-\dfrac{\cos^2 i}{\sin^2\vartheta}}, \\ p_\varphi = m r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = m r^2\sin\vartheta\,\dot{\chi}\cos\beta = p_\chi\cos i. \end{cases}$$

2. Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen. Wir suchen nun solche Winkel- und Wirkungsvariablen einzuführen, die unserem mechanischen Problem (d. h. seiner Hamiltonschen Funktion) angepaßt sind. Es sollen also die J_r, J_ϑ, J_φ während der Keplerbewegung konstant bleiben, die w_r, w_ϑ, w_φ aber, in denen die Lagekoordinaten periodisch sind, sich linear mit der Zeit ändern. Nach I, § 6, (8) erhält man die J_j aus den Ausdrücken für die p_j, die sich nach der Methode der Separation der Veränderlichen ergeben, also in unserem Falle aus den Ausdrücken I, § 5, (27)

$$(7)\qquad \begin{cases} 2\pi J_r = \oint p_r\,dr = \oint\sqrt{2mP_1 + \dfrac{2Mm^2\varkappa}{r} - \dfrac{P_2}{r^2}}\,dr, \\ 2\pi J_\vartheta = \oint p_\vartheta\,d\vartheta = \oint\sqrt{P_2 - \dfrac{2P_3}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta, \\ 2\pi J_\varphi = \oint p_\varphi\,d\varphi = \oint\sqrt{2P_3}\,d\varphi. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Konstanten P_1, P_2, P_3 ergibt sich dabei nach den Ansätzen in I, § 5, (4) mit Hilfe der Gl. (6) als

$$(8)\qquad P_1 = E, \quad P_2 = p_\chi^2, \quad P_3 = \tfrac{1}{2}p_\chi^2\cos^2 i.$$

Die P_j lassen sich also durch Energie, Drehimpuls und Schiefe der Bahn darstellen. Führen wir die Werte (8) in (7) ein, verwenden in der Formel für J_r den reziproken Wert ϱ von r als neue Veränderliche und zerlegen den Ausdruck unter der Wurzel in Linearfaktoren, so erhalten wir

$$(9)\qquad \begin{cases} 2\pi J_r = -p_\chi\oint\sqrt{(\varrho_1-\varrho)(\varrho-\varrho_2)}\,\dfrac{d\varrho}{\varrho^2}, \\ \varrho_1+\varrho_2 = \dfrac{2Mm^2\varkappa}{p_\chi^2}, \quad \varrho_1\varrho_2 = -\dfrac{2mE}{p_\chi^2}. \end{cases}$$

Da ϱ_1 der größte und ϱ_2 der kleinste Wert von ϱ ist, den unser Massenpunkt wirklich erreicht, ist nach (3) und (9)

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{1}{a(1-\varepsilon)},\quad \varrho_2 = \frac{1}{a(1+\varepsilon)},\quad p_\chi = \sqrt{\varkappa M}\,.\,m\,.\,\sqrt{a(1-\varepsilon^2)},\\ E &= -\varkappa\frac{Mm}{2a}. \end{aligned}\right.$$

Das Integral in (9) formen wir durch partielle Integration um. Es ist ja

$$-\sqrt{(\varrho_1-\varrho)(\varrho-\varrho_2)}\,\frac{d\varrho}{\varrho^2} = \sqrt{(\varrho_1-\varrho)(\varrho-\varrho_2)}\,d\frac{1}{\varrho}$$
$$= d\left[\frac{1}{\varrho}\sqrt{\cdots}\right] - \frac{1}{\varrho}\,d\sqrt{\cdots}.$$

Bei Ausführung des Umlaufsintegrals in (9) fallen die von den Grenzen herrührenden Glieder in der eckigen Klammer fort (weil obere und untere Grenze zusammenfallen) und es wird

$$(10\,a)\quad \left\{\begin{aligned} 2\pi J_r &= p_\chi \oint \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho_1-\varrho)(\varrho-\varrho_2)}}\\ &- p_\chi\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}\oint \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{(\varrho_1-\varrho)(\varrho-\varrho_2)}}. \end{aligned}\right.$$

Wir führen nun ähnlich wie in III, § 2, (14) die Hilfsvariable α durch $\varrho = \varrho_1\cos^2\frac{\alpha}{2} + \varrho_2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}[(\varrho_1+\varrho_2) + (\varrho_1-\varrho_2)\cos\alpha]$ ein. Dann wird aus (10 a):

$$(10\,b)\quad \left\{\begin{aligned} 2\pi J_r &= p_\chi(\varrho_1+\varrho_2)\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{(\varrho_1+\varrho_2)-(\varrho_1-\varrho_2)\cos\alpha}\\ -p_\chi\int_0^{2\pi} d\alpha &= 2p_\chi\left(\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)^2-(\varrho_1-\varrho_2)^2}} - 1\right), \end{aligned}\right.$$

wobei am Schluß noch die Integralformel IV, § 4, (11) benutzt ist. Aus (10 b), (9) und (10) folgt dann

$$(11)\quad J_r = \frac{\varkappa M\sqrt{m^3}}{\sqrt{-2E}} - p_\chi = \frac{\varkappa M\sqrt{m^3}}{\sqrt{-2P_1}} - \sqrt{P_2} = \sqrt{\varkappa M}\,\sqrt{a}\,.\,m(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}).$$

Zur Berechnung von J_ϑ und J_φ verwendet man am besten die aus (5) folgende Beziehung $p_\chi\,d\chi = p_\vartheta\,d\vartheta + p_\varphi\,d\varphi$. Bildet man auf beiden Seiten das Umlaufsintegral, so folgt aus (7): $p_\chi = J_\vartheta + J_\varphi$.

Da aber aus der letzten Gl. (7) sofort $J_\varphi = \sqrt{2P_3}$ folgt, erhält man mit Hilfe von (8):

$$(12) \quad J_\vartheta = p_\chi(1-\cos i) = \sqrt{P_2} - \sqrt{2P_3}, \quad J_\varphi = p_\chi \cos i = \sqrt{2P_3}.$$

Durch Auflösung von (11), (12) nach E, p_χ, $p_\chi \cos i$ erhält man:

$$(13) \quad E = -\frac{\varkappa^2 M^2 m^3}{2(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^2}, \quad p_\chi = J_\vartheta + J_\varphi, \quad p_\chi \cos i = J_\varphi.$$

Daraus folgen nach (8) die Ausdrücke für die P_1, P_2, P_3. Setzen wir diese in die Formeln für p_r, p_ϑ, p_φ ein, so erhalten wir aus I, § 5, (28) die Funktion $F^*(r, \vartheta, \varphi, J_r, J_\vartheta, J_\varphi)$, aus der sich nach I, § 5, (39) die Berührungstransformation ergibt, durch welche die angepaßten Variablen w_r, w_ϑ, w_φ, J_r, J_ϑ, J_φ eingeführt werden. Da der Energieausdruck E^* in diesen Größen durch (13) gegeben ist, folgt für die drei Grundfrequenzen ν_r, ν_ϑ, ν_φ aus I, § 6, (8): $\nu_r = \nu_\vartheta = \nu_\varphi$. Es bestehen zwischen ihnen also zwei verschiedene Relationen der Gestalt I, § 6, (10), etwa: $\nu_r - \nu_\vartheta = 0$, $\nu_r - \nu_\varphi = 0$. Unser System ist also zweifach entartet; infolgedessen, da es drei Freiheitsgrade hat, genau einfach periodisch. Man kann daher durch eine kanonische Transformation der Gestalt I, § 6, (12), (13a) neue Winkel- und Wirkungsvariable so einführen, daß von den ersteren: w', v_1', v_2' nur w' eine „eigentliche" Winkelvariable ist. Die konjugierten Größen mögen J', $u_1' u_2'$ heißen. Wir setzen:

$$(14) \quad J' = J_r + J_\vartheta + J_\varphi, \quad u_1' = J_\vartheta + J_\varphi, \quad u_2' = J_\varphi.$$

Diese Gleichungen haben die Gestalt von I, § 6, (13a). Da nach (13), (14) die Energie, die wir in den neuen Veränderlichen wieder einfach E nennen wollen, nur von J' abhängt, ist nur die zu J' konjugierte Winkelvariable eine eigentliche. Wir berechnen direkt w', v_1', v_2', indem wir in die Funktion F in I, § 5, (28) die J', u_1', u_2' vermöge (8), (13), (14) einführen. Die Winkelvariablen ergeben sich dann nach I, § 5, (39) als:

$$(15) \quad w' = \frac{\partial F}{\partial J'}, \quad v_1' = \frac{\partial F}{\partial u_1'}, \quad v_2' = \frac{\partial F}{\partial u_2'},$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} F(r, \vartheta, \varphi, J', u_1', u_2') = &\int_{r_1}^{r} \sqrt{-\frac{\varkappa^2 M^2 m^4}{J'^2} + \frac{2\varkappa M m^2}{r} - \frac{u_1'^2}{r^2}}\, dr \\ &+ \int_{\pi/2}^{\vartheta} \sqrt{u_1'^2 - \frac{u_2'^2}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta + u_2' \int_0^{\varphi} d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Da die unteren Grenzen der Integrale willkürlich sind, konnten wir für sie bequeme Spezialwerte einsetzen; r_1 ist die Entfernung des

Perihels. Berechnen wir w' aus (15) und (16) und zerlegen das Polynom unter der Quadratwurzel in Linearfaktoren, so erhalten wir:

$$(17)\qquad \begin{cases} w' = \dfrac{\varkappa^2 M^2 m^4}{J'^2} \displaystyle\int_{r_1}^{r} \dfrac{dr}{\sqrt{-\dfrac{\varkappa^2 M^2 m^4}{J'^2} + \dfrac{2\varkappa M m^2}{r} - \dfrac{u_1'^2}{r^2}}} \\ \quad = \dfrac{\varkappa M m^2}{J'^2} \displaystyle\int_{r_1}^{r} \dfrac{r\,dr}{\sqrt{(r_2 - r)(r - r_1)}}. \end{cases}$$

Dabei sind r_1 und r_2 die kleinsten und größten Werte, die r während der Bewegung annimmt, der Perihel- und Aphelabstand, also nach (3)

$$(18)\qquad r_1 = a(1-\varepsilon), \quad r_2 = a(1+\varepsilon).$$

Zur Ausrechnung von (17) führen wir wieder einen Hilfswinkel α ein, der von 0 bis 2π wächst, wenn r zwischen r_1 und r_2 hin und her geht:

$$(19)\qquad r = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) + \tfrac{1}{2}(r_1 - r_2)\cos\alpha = a(1 - \varepsilon\cos\alpha).$$

Dann wird aus (17)

$$(20)\qquad w' = \frac{\varkappa M m^2}{J'^2} \int_0^{\alpha} r\,d\alpha = \frac{a\varkappa M m^2}{J'^2}(\alpha - \varepsilon\sin\alpha) = \alpha - \varepsilon\sin\alpha,$$

wobei für J' sein Wert in a eingesetzt ist, der sich aus (14), (13), (10) ergibt. Die einzige eigentliche Winkelvariable w' wächst gemäß I, § 6, (23) nach dem Gesetz

$$(21)\qquad \begin{cases} w' = \nu(t - t_0), \quad \nu = \dfrac{\partial E}{\partial J'} = \dfrac{\varkappa^2 M^2 m^3}{J'^3} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{a^3}}, \\ T = \dfrac{2\pi}{\nu} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\varkappa M}}, \end{cases}$$

wobei t_0 die Zeit des Periheldurchganges und T die Periode eines Umlaufes bedeutet. In der Astronomie nennt man gewöhnlich α die „exzentrische Anomalie“, w' die „mittlere Anomalie“ und ν die „mittlere Bewegung“. Die uneigentlichen Winkelvariablen v_1', v_2' bleiben während der Bewegung konstant. Wenn man sie daher durch Ausführung der Differentiationen (15) und (16) berechnet, so bleiben ihre Werte ungeändert, wenn man nach der Differentiation im Ausdruck für v_1' anstatt r und ϑ ihre Werte für das Perihel ($r = r_1$, $\vartheta = \vartheta_0$, wo ϑ_0 der Polabstand des Perihels ist), im Ausdruck für v_2' anstatt ϑ

und φ ihre Werte für den aufsteigenden Knoten $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \Omega\right)$ einsetzt. Wenn man die Beziehungen (14), (12), (6) beachtet, erhält man:

$$(22)\qquad \begin{cases} v_1' = u_1' \displaystyle\int_{\pi/2}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{u_1'^2 - \frac{u_2'^2}{\sin^2\vartheta}}} = \int_{\pi/2}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2\vartheta}}} \\ \quad = \displaystyle\int_0^{\chi_0} d\chi = \chi_0 = \Pi - \Omega, \quad v_2' = \int_0^{\Omega} d\varphi = \Omega. \end{cases}$$

Die uneigentlichen Winkelvariablen sind also, wenn wir die Bezeichnungen in **1** verwenden, im wesentlichen die Länge des Perihels und des aufsteigenden Knotens. Die so eingeführten J', u_1', u_2', w', v_1', v_2' nennt man oft die Delaunayschen Bahnelemente. Sie werden in der Astronomie meist mit L, G, H, l, g, h bezeichnet. Da im Planetensystem die Schiefe i und die Exzentrizität ε der Bahnen kleine Größen sind, gilt dasselbe für die Differenzen $J' - u_1'$, $u_1' - u_2'$, wie sich aus (14), (13), (11) ergibt. Es liegt daher, um bequeme Reihenentwicklungen zu erhalten, nahe, folgende neue kanonische Veränderliche einzuführen:

$$(23)\qquad J = J', \quad u_1 = J' - u_1', \quad u_2 = u_1' - u_2'.$$

Die entsprechenden Winkelvariablen w, v_1, v_2 müssen dann der Identität $Jw + u_1 v_1 + u_2 v_2 = J'w' + u_1' v_1' + u_2' v_2'$ genügen. Dann folgt aus (23):

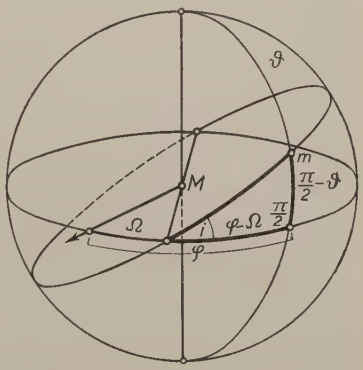
$$(24)\qquad w = w' + v_1' + v_2', \quad v_1 = -v_1' - v_2', \quad v_2 = -v_2'.$$

Hier ist wieder nur w eine eigentliche Winkelvariable. Jeder Zustand eines materiellen Punktes läßt sich anstatt durch die sechs Lage- und Geschwindigkeitskomponenten (z. B. im cartesischen System x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) auch durch die sechs kanonischen Veränderlichen w, v_1, v_2; J, u_1, u_2 bestimmen. Es sind dies nämlich die fünf Bahnkonstanten v_1, v_2, J, u_1, u_2, die der materielle Punkt beschreibt, wenn man ihn im fraglichen Zustand der Wirkung des Kraftfeldes (1) überläßt, und als sechstes Bestimmungsstück der Winkel w, der die Lage auf der Ellipse angibt, die „mittlere Länge“. Man nennt diese sechs Größen die kanonischen Elemente der den betreffenden Zustand oskulierenden Keplerbewegung. Wir wollen sie zum Schluß noch durch die in **1** eingeführten elliptischen Bahnelemente, die eine unmittelbare geometrische Bedeutung haben, ausdrücken. Es folgt aus (24), (23), (22), (21), (14), (12), (11):

$$(25)\qquad \begin{cases} w = \nu(t - t_0) + \Pi, \quad v_1 = -\Pi, \quad v_2 = -\Omega \quad \left(\nu = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a^3}}\right), \\ J = m\sqrt{\varkappa M}\sqrt{a}, \qquad u_1 = m\sqrt{\varkappa M}\sqrt{a}\,(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}), \\ u_2 = m\sqrt{\varkappa M}\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}\,(1 - \cos i). \end{cases}$$

3. Berechnung der Lagekoordinaten. Von den Winkel- und Wirkungsvariablen, deren zeitlicher Verlauf einfach durch (25) gegeben ist, haben wir nun wieder zu den gewöhnlichen Lagekoordinaten q_j zurückzurechnen. Wir wollen gewöhnliche cartesische Koordinaten x, y, z benutzen, die mit den in **1** verwendeten räumlichen Polarkoordinaten durch die Gl. I, § 2, (16) zusammenhängen. Legen wir um M mit dem Radius r eine durch m gehende Kugel und betrachten auf ihr drei größte Kugelkreise: den Schnitt mit der Bahnebene, der Äquatorebene $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ und dem Meridian, so bilden diese ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck. Die Längen der Seiten sind, wie aus der Fig. 4 ersichtlich, χ, $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\varphi - \Omega$,

Fig. 4.



die den ersten beiden gegenüberliegenden Winkel $\pi/2$ und i. Dann folgt nach den einfachsten Formeln der sphärischen Trigonometrie (den „Neperschen Regeln“):

$$\cos(\varphi - \Omega)\sin\vartheta = \cos\chi, \quad \sin(\varphi - \Omega)\sin\vartheta = \sin\chi\cos i,$$
$$\cos\vartheta = \sin\chi\sin i,$$

wenn man daher in I, § 2, (16) $\varphi = (\varphi - \Omega) + \Omega$ setzt und $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ entwickelt, folgt

$$(26) \qquad \begin{cases} x = r(\cos\chi\cos\Omega - \sin\chi\sin\Omega\cos i), \\ y = r(\cos\chi\sin\Omega + \sin\chi\cos\Omega\cos i), \\ z = r\sin\chi\sin i. \end{cases}$$

Wenn wir in (26) überall $\chi = \chi_0 + (\chi - \chi_0)$ einsetzen und $\cos\chi$, $\sin\chi$ entwickeln, können wir leicht an Stelle der „wahren Anomalie“ $\chi - \chi_0$ die durch (19) definierte „exzentrische Anomalie“ einführen. Aus (3) und (19) folgten ja für die rechtwinkligen ebenen Koordinaten $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ unseres Massenpunktes in bezug auf das Hauptachsenkreuz der Bahnellipse als Koordinatenachsen:

$$(27) \qquad \begin{cases} x^0 = r\cos(\chi - \chi_0) = a(\cos\alpha - \varepsilon), \\ y^{(0)} = r\sin(\chi - \chi_0) = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\alpha. \end{cases}$$

Aus (26) und (27) folgt dann, wenn in der Bezeichnung von **1** die Länge des Perihels Π durch $\chi_0 = \Pi - \Omega$ eingeführt wird:

$$(28)\quad \begin{cases} x = x^{(0)}[\cos(\Pi-\Omega)\cos\Omega - \sin(\Pi-\Omega)\sin\Omega\cos i] \\ \quad - y^{(0)}[\sin(\Pi-\Omega)\cos\Omega - \cos(\Pi-\Omega)\sin\Omega\cos i] \\ y = x^{(0)}[\cos(\Pi-\Omega)\sin\Omega + \sin(\Pi-\Omega)\cos\Omega\cos i] \\ \quad + y^{(0)}[-\sin(\Pi-\Omega)\sin\Omega + \cos(\Pi-\Omega)\cos\Omega\cos i] \\ z = x^{(0)}\sin(\Pi-\Omega)\sin i + y^{(0)}\cos(\Pi-\Omega)\sin i. \end{cases}$$

Für $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ sind die Ausdrücke (27) einzusetzen. Wenn α um 2π wächst, gilt nach (20) dasselbe für die Winkelvariable w'. Daher sind nach (27) $x^{(0)}$ und $y^{(0)}$ periodische Funktionen von w' mit der Periode 2π, und zwar $x^{(0)}$ eine gerade, $y^{(0)}$ eine ungerade Funktion. Nach dem 1. Bd., IV, § 4 lassen sich daher $x^{(0)}$ und $y^{(0)}$ in trigonometrische Reihen der folgenden Gestalt entwickeln:

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{x^{(0)}}{a} = \dfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos w' + A_2\cos 2w' + \cdots, \\ \dfrac{y^{(0)}}{a} = B_1\sin w' + B_2\sin 2w' + \cdots \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} A_j = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos\alpha - \varepsilon)\cos j w'\, dw', \\ B_j = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\alpha)\sin j w'\, dw' \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Wenden wir auf diese Integrale die partielle Integration an und setzen im Resultat $w' = \alpha - \varepsilon\sin\alpha$, $dw' = (1-\varepsilon\cos\alpha)\,d\alpha$, so ergibt sich:

$$(31)\quad \begin{cases} A_j = \dfrac{2}{\pi j}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin[j(\alpha-\varepsilon\sin\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha \\ \quad = \dfrac{1}{\pi j}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos[(j-1)\alpha - j\varepsilon\sin\alpha]\,d\alpha - \dfrac{1}{\pi j}\int_0^{\pi}\cos[(j+1)\alpha \\ \qquad\qquad - j\varepsilon\sin\alpha]\,d\alpha, \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} B_j = \dfrac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\pi j}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos[j(\alpha-\varepsilon\sin\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha \\ \quad = \dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\pi j}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos[(j+1)\alpha - j\varepsilon\sin\alpha]\,d\alpha \\ \quad + \dfrac{1}{\pi j}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos[(j-1)\alpha - j\varepsilon\sin\alpha]\,d\alpha. \end{cases}$$

Durch (31), (32) werden A_j, B_j als Funktionen von $j\varepsilon$ dargestellt, die sich nach dem 1. Bd., VIII, § 3, (13) durch Besselsche Funktionen ausdrücken lassen. Es ist nämlich

$$(33)\quad \begin{cases} A_j = \frac{1}{j}[J_{j-1}(j\varepsilon) - J_{j+1}(j\varepsilon)], \\ B_j = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{j}[J_{j-1}(j\varepsilon) + J_{j+1}(j\varepsilon)] \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ferner ist nach (30):

$$(34)\qquad A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon\cos\alpha)\, d\alpha = -3\varepsilon.$$

Da die Besselschen Funktionen offenbar bei gleichzeitiger Umkehrung des Vorzeichens in Argument und Index ihren Wert nicht ändern, folgt aus (29), (33), (34):

$$(35)\quad \begin{cases} x^{(0)} = -\frac{3a\varepsilon}{2} + a\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j} J_{j-1}(j\varepsilon)\cos j w', \\ y^{(0)} = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j} J_{j-1}(j\varepsilon)\sin j w', \end{cases}$$

wobei in beiden Summen das Glied $j = 0$ fortzulassen ist. Durch Einsetzen von (35) in (28) erhält man die endgültigen Formeln für x, y, z als Funktionen der fünf Bahnkonstanten und der Winkelvariablen $w' = \nu(t - t_0)$. In analoger Weise kann man auch die Entfernung r der Masse m von M darstellen. Nach (19) und (20) ist r ebenso wie $x^{(0)}$ eine gerade Funktion von w' mit der Periode 2π.

Machen wir den Ansatz

$$(36)\quad \begin{cases} \frac{r}{a} = \frac{1}{2}C_0 + C_1\cos w' + C_2\cos 2w' + \cdots, \\ C_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1 - \varepsilon\cos\alpha)\cos j w'\, dw' \quad (j = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

so folgt ganz analog zu (30), (31), (33), (35):

$$(37)\quad \begin{cases} C_j = \frac{\varepsilon}{j}[J_{j+1}(j\varepsilon) - J_{j-1}(j\varepsilon)] \quad (j = 1, 2, \ldots), \\ \frac{1}{2}C_0 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad r = a + \frac{a}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon a\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j} J_{j-1}(j\varepsilon)\cos j w'. \end{cases}$$

Wollen wir endlich x, y, z, r noch durch die Winkel- und Wirkungsvariablen w, v_1, v_2, J, u_1, u_2 ausdrücken und so die in I, § 6, (15), (17) aufgestellte allgemeine Form der Reihenentwicklung für die Lage-

koordinaten erhalten, müssen wir (25) nach a, ε, i, Π, Ω, $w' = \nu(t - t_0)$ auflösen und die Resultate in (28), (35), (37) einsetzen. Es ist:

$$(38)\quad \begin{cases} a = \dfrac{J^2}{m^2 \varkappa M}, \quad \varepsilon^2 = \dfrac{2u_1}{J}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_1}{J}\right), \quad 1 - \cos i = \dfrac{u_2}{J - u_1}, \\ \Pi = -v_1, \qquad \Omega = -v_2, \qquad w' = w - \Pi. \end{cases}$$

Wir wollen die durch Einsetzen von (38) entstandenen Formeln für die Lagekoordinaten nur für den Fall wirklich durchrechnen, daß u_1 und u_2 klein gegen J sind. Das bedeutet für die Keplerellipsen kleine ε und i. Wenn wir für die Besselschen Funktionen die Reihenentwicklungen aus dem 1. Bd., VIII, § 3, (6) anwenden, ergibt sich, daß die Reihe für $J_{j-1}(\varepsilon j)$ mit einem Gliede von der Größenordnung ε^{j-1} beginnt. Wenn wir nur die in u_1 und u_2 linearen Glieder beibehalten wollen, brauchen wir in ε und i nur bis zur Ordnung ε^2 und i^2 zu gehen, also nur die Besselschen Funktionen $J_0(\varepsilon)$, $J_1(2\varepsilon)$, $J_2(3\varepsilon)$ zu berücksichtigen. Im Ausdruck (37) für r genügt es, wegen des Faktors ε von der Summe sogar die in ε linearen Glieder von $J_0(\varepsilon)$, $J_1(2\varepsilon)$ beizubehalten und $J_0(\varepsilon) = 1$, $J_1(2\varepsilon) = \varepsilon$ zu setzen. Dann folgt aus (38), (37), (36):

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{a} = 1 + \dfrac{u_1}{J} - \sqrt{\dfrac{2u_1}{J}}\cos(w + v_1) - \dfrac{u_1}{J}\cos(2w + 2v), \\ a = \dfrac{J^2}{m^2 \varkappa M}. \end{cases}$$

§ 2. Die gestörte Keplerbewegung.

1. Die störende Kraft ist eine Zentralkraft. Wenn wir annehmen, daß außer der Newtonschen Kraft § 1, (1) noch eine störende Kraft wirkt, deren Potential $\lambda V(r)$ eine gegebene Funktion von r ist, so erhalten wir die Störungsfunktion Φ durch Einführung der dem ungestörten System, der Keplerbewegung, angepaßten kanonischen Veränderlichen § 1, (25) in $\lambda V(r)$. Aus § 1, (39) ergibt sich, wenn wir $V(r)$ um die Stelle a nach Potenzen von u_1 entwickeln und nur die Glieder bis zur ersten Potenz beibehalten:

$$(1)\quad \begin{cases} V(r) = V(a) + \Delta r V'(a) + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 V''(a) \\ \qquad \Delta r = a\left[\dfrac{u_1}{J} - \sqrt{\dfrac{2u_1}{J}}\cos(w + v_1) - \dfrac{u_1}{J}\cos(2w + 2v_1)\right], \\ V(r) = \Phi(w_1, v_1, J, u_1) = V(a) + \dfrac{a u_1}{J}\left[V'(a) + \dfrac{a}{2}V''(a)\right] \\ \qquad - a\sqrt{\dfrac{2u_1}{J}}V'(a)\cos(w + v_1) \\ \qquad - \dfrac{a u_1}{J}\left[V'(a) - \dfrac{a}{2}V''(a)\right]\cos(2w + 2v_1), \end{cases}$$

worin für a überall sein Wert in J nach § 1, (38) zu setzen ist. Gl. (1) entspricht der allgemeinen Formel IV, § 1, (34). Für den sekularen Teil R der Störungsfunktion Φ, zu dem alle w nicht enthaltenden Glieder gehören, folgt also aus (1)

$$R = V(a) + \frac{a u_1}{J}\left[V'(a) + \frac{a}{2}V''(a)\right]. \tag{2}$$

Aus der Theorie von IV, **3** ergibt sich dann, daß J keine sekularen Störungen erleiden kann. Die Differentialgleichungen für die sekularen Störungen von v_1, u_1 lauten nach IV, § 1, (41) in unserem Falle wegen (2)

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda\frac{\partial R}{\partial u_1} = \lambda\frac{a}{J}\left[V'(a) + \frac{a}{2}V''(a)\right], \quad \frac{du_1}{dt} = 0. \tag{3}$$

Da nach § 1, (38) durch J und u_1 auch a und E festgelegt sind, behält bei einer Störung durch eine Zentralkraft die Keplerellipse im Mittel über ihre Periode Größe und Gestalt bei. Sie erleidet nur als Ganzes langsame sekulare Lageänderungen. Aus der ersten Gl. (3) folgt ja

$$v_1 = v_1^{(0)} + \sigma t, \quad \sigma = \lambda\frac{a}{J}\left[V'(a) + \frac{a}{2}V''(a)\right]. \tag{4}$$

Da nach § 1, (25) $v_1 = -\Pi$ ist, führt die Apsidenlinie der Keplerellipse (die Richtung zum Perihel) langsame Drehungen mit der Winkelgeschwindigkeit σ, die „Perihelbewegung", aus. u_2 und v_2 bleiben konstant, da sie in R gar nicht vorkommen. Da eine Zentralkraft die Masse m niemals aus der Ebene der Keplerellipse herauszieht, können die durch u_2, v_2 bestimmten Bahnelemente Ω, i sich nicht ändern. Man sieht leicht, daß σ nur dann allgemein (d. h. für alle Werte von a) verschwinden kann, wenn $V(r)$ das Potential einer Newtonschen Kraft ist, als $rV(r) = -\varkappa M m$.

Um den „Energieausdruck" im Sinne von IV, § 3, (20) zu berechnen, müssen wir beachten, daß für H_0 der Energieausdruck der ungestörten Bewegung aus § 1, (13) einzusetzen ist, aber nach § 1, (14) und (23) durch J ausgedrückt. Für R' ist R aus (2) einzusetzen, das schon ohne weitere Transformation nur von den Wirkungsvariablen J, u abhängt. Wir erhalten so

$$E(J, u) = -\frac{\varkappa^2 M^2 m^3}{2J^2} + \sigma u. \tag{5}$$

Darin ist für σ aus (4) und § 1, (38) sein Ausdruck als Funktion von J zu entnehmen.

2. Störungen durch ein homogenes elektrisches Feld. Wir betrachten jetzt anstatt der beiden gravitierenden Massen M und m ein wasserstoffähnliches Atom, wie es nach den Vorstellungen von Rutherford und N. Bohr aufzufassen ist. Es bewegt sich ein punktförmig ge-

dachtes Elektron mit der Ladung $-e$ und der Masse m um einen mit der Ladung $+Ne$ geladenen, im Raume festen Atomkern, wobei N eine ganze Zahl, die „Kernladungszahl" ist. Da die Anziehung des Kernes auf das Elektron nach dem Coulombschen Gesetz geschieht, gilt für die Kraft wieder eine Formel der Gestalt § 1, (1). Nur ist an Stelle von $\varkappa mM$ jetzt Ne^2 zu setzen. Diese Substitution ist in allen Formeln für die Keplerbewegung auszuführen. Wo hingegen m nicht in der Kombination $\varkappa mM$ vorkommt, stammt es nicht aus dem Kraftgesetz, sondern aus der kinetischen Energie § 1, (4) und ist auch für die Bewegung des Elektrons beizubehalten. So erhält man für den Energieausdruck der Keplerbewegung des Elektrons nach (5), wenn man nur das erste Glied rechts berücksichtigt:

$$E = -\frac{N^2 e^4 m}{2J^2}. \tag{6}$$

Wir lassen nun auf das Elektron außer der Anziehungskraft des Kernes ein homogenes elektrisches Feld einwirken, das die Feldstärke F und die Richtung der positiven z-Achse hat. Die störende Kraft eF sei klein gegen die Coulombsche Anziehung. Dann können wir das Potential eFz der störenden Kraft als eine Störungsfunktion im Sinne von IV, § 1, (18) auffassen. Ihre entwickelte Gestalt nach IV, § 1, (32) erhalten wir durch Einsetzen des Ausdruckes für z aus § 1, (28), (35) und Einführung der kanonischen Bahnelemente J', u_1', u_2', w', v_1', v_2' aus § 1, (14), (22). Wir wollen nun den sekularen, d. h. von w' unabhängigen Teil der Störungsfunktion hinschreiben, wobei wir den Strich bei allen Größen weglassen, um in Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel IV, § 1, (34) zu kommen. Da nach § 1, (35) $y^{(0)}$ gar kein von w' unabhängiges Glied, $x^{(0)}$ aber nur ein einziges $-\frac{3}{2}a\varepsilon$ enthält, ergibt sich für den sekularen Teil von $e.F.z$

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda R(J, u_1, u_2, v_1, v_2) = -\tfrac{3}{2}a\varepsilon eF \sin v_1 \sin i \\ &= -\frac{3FJ}{2mNe}\sqrt{J-u_1^2}\sqrt{1-\frac{u_2^2}{u_1^2}}\sin v_1. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Wir können die sekularen Störungen der Bewegung des Elektrons, die durch das äußere elektrische Feld hervorgerufen werden, wieder als langsame Änderungen der Bahnelemente der Keplerellipse auffassen. Nach der allgemeinen Theorie von § 1, **3** bleibt J, also auch a, die große Halbachse, dabei konstant. Die Änderungen von u_1, v_1, u_2, v_2 sind dann nach IV, § 1, (41) durch

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dv_1}{dt} = \lambda\frac{\partial R}{\partial u_1}, \quad \frac{du_1}{dt} = -\lambda\frac{\partial R}{\partial v_1}, \\ &\frac{dv_2}{dt} = \lambda\frac{\partial R}{\partial u_2}, \quad \frac{du_2}{dt} = -\lambda\frac{\partial R}{\partial v_2} = 0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

bestimmt. Es bleibt also auch $u_2 = J_\varphi = \sqrt{mN}.e\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}\cos i$ konstant, also [wegen der Unveränderlichkeit von (a)] auch $\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos i$. Die beiden ersten Gl. (8) sind dann zwei Differentialgleichungen in den zwei unabhängigen Veränderlichen v_1, u_1. Durch Einsetzen von R aus (7) und Elimination von v_1 erhält man

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = \sigma^2\left(\frac{J^2u_2^2}{u_1^3} - u_1\right), \quad \sigma = \frac{3FJ}{2mNe}. \tag{9}$$

Multipliziert man die Differentialgleichung (9) beiderseits mit $\frac{du_1}{dt}$, so erhält man durch Quadratur

$$\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 = \sigma^2\left(C^2 - u_1^2 - \frac{J^2u_2^2}{u_1^2}\right), \quad dt = \frac{u_1\,du_1}{\sigma\sqrt{Cu_1^2 - u_1^4 - J^2u_2^2}}. \tag{10}$$

C ist dabei eine willkürliche Integrationskonstante. Durch Einführung von u_1^2 als neue Veränderliche und nochmalige Integration ergibt sich aus (10) t als Arcus-cosinus-Funktion von u_1^2 und durch Umkehrung

$$u_1^2 = \tfrac{1}{2}[C + \sqrt{C^2 - 4J^2u_2^2}\cos 2v'], \quad v' = v_0' - \sigma t. \tag{11}$$

Dabei ist σ aus (9) zu entnehmen und v_0' eine neue Integrationskonstante. u_1 selbst führt daher mit der Frequenz σ (der halben Frequenz von u_1^2) Schwingungen zwischen zwei extremen Werten aus. Da $u_1 = \sqrt{mN}e\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}$, ändert die Bahnellipse bei konstanter Halbachse a ihre Exzentrizität ε in langen Perioden, die sich zur Keplerschen Umlaufszeit verhalten wie die Anziehungskraft des Kernes zur störenden Kraft. Da λR als Hamiltonsche Funktion eines Systems kanonischer Gleichungen auch zeitlich konstant bleibt, lassen sich mit der Bezeichnung

$$-\lambda R = -\sigma u', \tag{12}$$

wo u' eine Konstante bedeutet, aus (7) und (11) $\sin v_1$ und aus (8) dann auch v_2 als Funktionen von v', u', C, J, u_2 darstellen. Da also alle Zustandsgrößen von der Zeit nur in der Kombination v' abhängen, ist das System ein entartetes, also einfach periodisches. Zur Keplerfrequenz tritt durch die Störung eine einzige kleine Frequenz der sekularen Störungen hinzu. Wenn man (7) mit der Bezeichnung (12) nach u_1^2 auflöst, sieht man leicht, daß der Maximalwert von u_1^2 während der langen Periode die Hälfte von $J^2 + u_2^2 - u'^2 + \sqrt{(J^2 + u_2^2 - u'^2) - 4J^2u_2^2}$ beträgt. Vergleicht man damit den Maximalwert von u_1^2, der sich aus (11) ergibt, so kann man C durch die anderen Konstanten ausdrücken:

$$C = J^2 + u_2^2 - u'^2. \tag{13}$$

Aus (11), (13) und der aus (7), (12) entspringenden Bezeichnung

$$u' = \sqrt{J^2 - u_1^2}\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{u_1^2}}\sin v_1 \tag{14}$$

lassen sich u_1, v_1 durch u', v' ausdrücken. Da man leicht sieht, daß $u_1\,dv_1 - u'\,dv'$ ein vollständiges Differential ist, so kann man die Funktion

$$f(v_1, u_1', v_2, u_2') = \int u_1\,dv_1 + u_2' v_2, \tag{15}$$

wobei u_1 aus (14) als Funktion von u', u_2, v_1 einzusetzen ist, als charakteristische Funktion einer Berührungstransformation auffassen, die von den Variablen v_1, u_1, v_2, u_2 zu v', u', v_2', u_2' überführt. Es ergibt sich außer den Beziehungen (11), (13), (14) noch

$$u_2 = \frac{\partial f}{\partial v_2} = u_2', \quad v_2' = \frac{\partial f}{\partial u_2'} = \int \frac{\partial u_1}{\partial u_2'}\,dv_1 + v_2. \tag{16}$$

Die neuen kanonischen Veränderlichen sind der Hamiltonschen Funktion λR angepaßt; denn nach (12) kommen die v', v_2' nicht in ihr vor. Aus (11) ist klar, daß v' eine Winkelvariable, also u' eine Wirkungsvariable ist. Sie allein kommt in λR vor, also ist v' die einzige eigentliche Winkelvariable. Der Energieausdruck des gestörten Systems im Sinne von IV, § 3, (20) ist also nach (6), (12), (9):

$$E = -\frac{N^2 e^4 m}{2 J^2} - \frac{3 F J u'}{2 m N e}. \tag{17}$$

§ 3. Einiges vom Dreikörperproblem.

1. Das Zweikörperproblem. Wir betrachten zwei Massenpunkte mit den Massen $m_1 = m_2 = m_3$ und $m_4 = m_5 = m_6$. Ihre rechtwinkligen Koordinaten in einem Inertialsystem bezeichnen wir mit q_1, q_2, q_3 bzw. q_4, q_5, q_6. Bezeichnen wir ihre gegenseitige Entfernung mit

$$r = \sqrt{(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2}$$

und nehmen an, daß sie sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen, so lautet die Hamiltonsche Funktion nach

$$\left\{\begin{array}{c} H = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{p_j^2}{m_j} \\ - \varkappa \dfrac{m_1 m_4}{\sqrt{(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2}}, \quad p_j = m_j \dfrac{dq_j}{dt}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Diesen Ausdruck kann man leicht durch eine Berührungstransformation auf die Gestalt der Hamiltonschen Funktion für die Keplerbewegung (Anziehung einer Masse durch ein festes Zentrum) bringen. Wir führen als neue Koordinaten Q_j die relativen Koordinaten der zweiten Masse in bezug auf die erste und die Koordinaten des Schwerpunktes ein:

$$\left\{\begin{array}{c} Q_1 = q_4 - q_1, \quad Q_2 = q_5 - q_2, \quad Q_3 = q_6 - q_3, \\ mQ_4 = m_1 q_1 + m_4 q_4, \quad mQ_5 = m_2 q_2 + m_5 q_5, \quad mQ_6 = m_3 q_3 + m_6 q_6, \\ m = m_1 + m_4 = m_2 + m_5 = m_3 + m_6. \end{array}\right. \tag{2}$$

Aus der Bedingung $\sum_{j=1}^{6} P_j Q_j = \sum_{j=1}^{6} p_j q_j$ ergeben sich die Transformationsgleichungen für die p_j:

$$(3)\quad \begin{cases} p_1 = -P_1 + \frac{m_1}{m} P_4, & p_2 = -P_2 + \frac{m_2}{m} P_5, & p_3 = -P_3 + \frac{m_3}{m} P_6, \\ p_4 = P_1 + \frac{m_4}{m} P_4, & p_5 = P_2 + \frac{m_5}{m} P_5, & p_6 = P_3 + \frac{m_6}{m} P_6. \end{cases}$$

Durch Einsetzen von (2), (3) in (1) folgt

$$(4)\quad \begin{cases} H = \frac{1}{2\mu_1}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2m}(P_4^2 + P_5^2 + P_6^2) \\ \qquad - \varkappa \frac{m_1 m_4}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}, \quad \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4}. \end{cases}$$

Jetzt sind Q_4, Q_5, Q_6 verborgene Koordinaten im Sinne von II, § 1, **1**. Bilden wir die kanonischen Bewegungsgleichungen, so folgt aus ihnen die Konstanz von P_4, P_5, P_6, also der Bewegungsgröße des Gesamtsystems; und Q_4, Q_5, Q_6, die Koordinaten des Schwerpunktes, werden lineare Funktionen der Zeit. In den Bewegungsgleichungen für die Indizes 1, 2, 3 kommen die P_4, P_5, P_6 überhaupt nicht vor; wir können also bei der Aufstellung dieser Gleichungen aus der Hamiltonschen Funktion (4) das zweite Glied überhaupt fortlassen; sie lautet dann:

$$(5)\quad \begin{cases} H = \frac{1}{2\mu_1}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - \varkappa \frac{\mu_1 M}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}, \\ \qquad M = \frac{m_1 m_4}{\mu_1} = m_1 + m_4. \end{cases}$$

Das ist aber die Hamiltonsche Funktion einer Keplerbewegung, wobei die im Raume feste, anziehende Masse M und die bewegliche μ_1 ist.

2. Reduktion des Dreikörperproblems. Ganz analoge Betrachtungen kann man auch anstellen, wenn drei Massenpunkte einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Wir bezeichnen die Massen mit $m_1 = m_2 = m_3$ bzw. $m_4 = m_5 = m_6$ und $m_7 = m_8 = m_9$, die rechtwinkligen Koordinaten des ersten Punktes mit q_1, q_2, q_3, des zweiten mit $q_4, q_5\ q_6$, des dritten mit q_7, q_8, q_9. Die Entfernungen der Massen voneinander sind $r_{14} = \sqrt{(q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2}$ und analog r_{17}, r_{47}. Die Hamiltonsche Funktion lautet dann

$$(6)\quad H = \frac{1}{2m_j}\sum_{j=1}^{9} p_j^2 - \varkappa \frac{m_1 m_4}{r_{14}} - \varkappa \frac{m_1 m_7}{r_{17}} - \varkappa \frac{m_4 m_7}{r_{47}}, \quad p_j = m_j \frac{dq_j}{dt}.$$

Durch eine Berührungstransformation kann man von (6) zur Hamiltonschen Funktion eines einfachen mechanischen Systems

gelangen. Wir führen als neue Koordinaten Q_j ein; die relativen Koordinaten Q_1, Q_2, Q_3 der zweiten Masse in bezug auf die erste; die relativen Koordinaten Q_4, Q_5, Q_6 der dritten Masse in bezug auf den Schwerpunkt der ersten und zweiten; endlich die Koordinaten Q_7, Q_8, Q_9 des Schwerpunktes aller drei Massen im Inertialsystem. Es ist also

$$(7)\quad \begin{cases} Q_1 = q_4 - q_1, \quad Q_2 = q_5 - q_2, \quad Q_3 = q_6 - q_3, \\ Q_4 = q_7 - \dfrac{m_1 q_1 + m_4 q_4}{m_1 + m_4}, \qquad Q_5 = q_8 - \dfrac{m_2 q_2 + m_5 q_5}{m_2 + m_5}, \\ Q_6 = q_9 - \dfrac{m_3 q_3 + m_6 q_6}{m_3 + m_6}, \qquad m Q_7 = m_1 q_1 + m_4 q_4 + m_7 q_7, \\ m Q_8 = m_2 q_2 + m_5 q_5 + m_8 q_8, \quad m Q_9 = m_3 q_3 + m_6 q_6 + m_9 q_9, \\ m = m_1 + m_4 + m_7. \end{cases}$$

Für die P_j folgt dann analog wie in **1**:

$$(8)\quad \begin{cases} p_1 = -P_1 - P_4 \dfrac{m_1}{m_1+m_4} + P_7 \dfrac{m_1}{m}, \quad p_2 = -P_2 - P_5 \dfrac{m_2}{m_2+m_5} + P_8 \dfrac{m_2}{m}, \\ p_3 = -P_3 - P_6 \dfrac{m_3}{m_3+m_6} + P_9 \dfrac{m_3}{m}, \\ p_4 = P_1 - P_4 \dfrac{m_4}{m_1+m_4} + P_7 \dfrac{m_4}{m}, \quad p_5 = P_2 - P_5 \dfrac{m_5}{m_2+m_5} + P_8 \dfrac{m_5}{m}, \\ p_6 = P_3 - P_6 \dfrac{m_6}{m_3+m_6} + P_9 \dfrac{m_6}{m}, \\ p_7 = P_4 + P_7 \dfrac{m_7}{m}, \quad p_8 = P_5 + P_8 \dfrac{m_8}{m}, \quad p_9 = P_6 + P_9 \dfrac{m_9}{m}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Abstand der dritten Massen vom Schwerpunkt der ersten beiden mit $r_{87} = \sqrt{Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2}$, so erhalten wir durch Einsetzen von (7) und (8) in (6) sowie Addition und Subtraktion von $\varkappa \dfrac{m_1 m_7}{r_{87}}$:

$$(9)\quad \begin{cases} H = \sum_{j=1}^{6} \dfrac{1}{2\mu_j} P_j^2 + \dfrac{1}{2m}(P_7^2 + P_8^2 + P_9^2) - \varkappa \dfrac{m_1 m_4}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}} \\ \qquad\qquad - \varkappa \dfrac{m_1 m_7}{\sqrt{Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2}} + S, \\ \dfrac{1}{\mu_1} = \dfrac{1}{\mu_2} = \dfrac{1}{\mu_3} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_4}, \quad \dfrac{1}{\mu_4} = \dfrac{1}{\mu_5} = \dfrac{1}{\mu_6} = \dfrac{1}{m_1+m_4} + \dfrac{1}{m_7}, \\ S = \varkappa \left[\dfrac{m_1 m_7}{r_{87}} - \dfrac{m_1 m_7}{r_{17}} - \dfrac{m_4 m_7}{r_{47}} \right]. \end{cases}$$

Hier sind Q_7, Q_8, Q_9 verborgene Koordinaten, wie man entweder durch Ausrechnung von S mit Hilfe von (7) einsieht oder ohne Rechnung daraus ersieht, daß P_7, P_8, P_9 die Komponenten des Gesamtimpulses

des Systems sind, der während der Bewegung konstant bleibt. In den Bewegungsgleichungen für die Indizes 1 bis 6 kommen dann auch die P_7, P_8, P_9 gar nicht vor; man kann also bei ihrer Aufstellung aus H in (9) das zweite Glied fortlassen und erhält ein mechanisches System von nur sechs Freiheitsgraden. Wenn man annimmt, daß die Masse m_1 sehr groß gegen m_4 und m_7 ist, kommt man zum Problem der Bewegung zweier Planeten um die Sonne (dem Dreikörperproblem) und kann die in IV, § 1 auseinandergesetzten Methoden der Störungsrechnung anwenden. Setzen wir etwa die Sonnenmasse $m_1 = 1$, so sind m_4, m_7 kleine Größen. Da der Schwerpunkt von m_1 und m_4 dann sehr nahe zu m_1 liegt, ist r_{87} nur sehr wenig von r_{17} entfernt. Da man leicht sieht, daß $1/r_{87} - 1/r_{17}$ klein von der Ordnung m_4 wird, muß S klein von der Ordnung $m_4 m_7$ sein, und man erhält durch Einführung des kleinen Parameters $\lambda = m_4 m_7$ den Ansatz $S = \lambda \Phi$, wo Φ endlich ist. Wir können dann (9) (nach Fortlassung des zweiten Gliedes) schreiben:

$$H = H_0 + \lambda \Phi, \quad H_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)}, \quad S = \lambda \Phi, \tag{10}$$

$$\begin{cases} H_0^{(1)} = \dfrac{1}{2\mu_1}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - \varkappa \dfrac{\mu_1 \dfrac{m_4}{\mu_1}}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}, \\ H_0^{(2)} = \dfrac{1}{2\mu_4}(P_4^2 + P_5^2 + P_6^2) - \varkappa \dfrac{\mu_4 \dfrac{m_7}{\mu_4}}{\sqrt{Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2}}. \end{cases} \tag{11}$$

Nun sind offenbar $H_0^{(1)}$ und $H_0^{(2)}$ Hamiltonsche Funktionen von Keplerbewegungen (§ 1). Wenn wir H_0 als Hamiltonsche Funktion der „ungestörten Bewegung“ auffassen, lassen sich nach den Methoden von § 1 ihr angepaßte kanonische Veränderliche einführen. Da nämlich $H_0^{(1)}$ nur $Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$, hingegen $H_0^{(2)}$ nur $Q_4, Q_5, Q_6, P_4, P_5, P_6$ enthält, zerfallen die zu H_0 gehörenden Bewegungsgleichungen in zwei Systeme von je sechs Gleichungen. Jedes der Systeme hat eine Keplerbewegung als Lösung, und zwar entsteht die zu $H_0^{(1)}$ gehörende aus der in § 1 behandelten, wenn man in § 1, (1), (4) den Ansatz $m = \mu_1$, $M = \dfrac{m_4}{\mu_1}$ macht, die zu $H_0^{(2)}$ gehörende durch den Ansatz $m = \mu_4$, $M = \dfrac{m_7}{\mu_4}$. Die ungestörte Bewegung besteht also darin, daß der erste Planet m_4 eine Keplerellipse mit der Sonne als Brennpunkt beschreibt, aus deren elliptischen Bahnelementen $a_1, \varepsilon_1, i_1, \Omega_1, \Pi_1$ sich die „kanonischen Elemente“ $(w^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, J^{(1)}, u_1^{(1)}, w_2^{(1)})$ nach § 1, (25) berechnen lassen, wenn darin $m = \mu_1$, $M = \dfrac{m_4}{\mu_1}$ gesetzt wird, der zweite Planet m_7 hingegen eine Keplerellipse um den gemeinsamen Schwerpunkt der Sonne und des

ersten Planeten als Brennpunkt beschreibt, aus deren elliptischen Bahnelementen $a_2, \varepsilon_2, \ldots$ sich die „kanonischen“ $(w^{(2)}, v_1^{(2)}, \ldots)$ nach § 1, (25) berechnen, wenn man $m = \mu_4$, $M = \frac{m_7}{\mu_4}$ setzt. Da sich nach § 1, **3** dann die rechtwinkligen Lagekoordinaten und also auch die Entfernungen r_{s7}, r_{17}, r_{47} als Funktionen der zwölf kanonischen Elemente ausdrücken lassen, und in $H_0^{(1)}$ nur $J^{(1)}$, in $H_0^{(2)}$ nur $J^{(2)}$ vorkommt [s. § 1, (13), (14), (23)], so läßt sich die Hamiltonsche Funktion H des Dreikörperproblems nach (9), (10), (11) in folgende Gestalt bringen:

$$(12)\quad \begin{cases} H = H_0(J^{(1)}, J^{(2)}) \\ + \lambda \Phi(w^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, J^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}; w^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, J^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}). \end{cases}$$

Das ist aber genau die Gestalt, von der wir in der Störungstheorie IV, § 1, (14) ausgegangen sind. Es läßt sich aus dem Ausdruck von $S = \lambda \Phi$ in (9) eine zu IV, § 1, (15) analoge Entwicklung der Störungsfunktion herleiten, gemäß der sich die zwölf Differentialgleichungen IV, § 1, (16) ansetzen lassen. In der Himmelsmechanik werden die Exzentrizitäten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und Neigungen i_1, i_2 der Planetenbahnen als klein angesehen, was auch für $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$ kleine Werte ergibt, so daß sich die Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung IV, § 1, (15) der Störungsfunktion auch nach Potenzen der $u_1^{(1)}, \ldots$ entwickeln lassen, so daß sich für die Theorie der sekularen Störungen die am Schlusse von IV, § 1, **4** entwickelte Methode anwenden läßt.

3. Quasistatische Bahnen beim ebenen Dreikörperproblem [1]**).** Wenn wir nur Bewegungen der drei Körper in einer Ebene betrachten, etwa der x, y-Ebene, und die Massen mit m_0, m_1, m_2, ihre rechtwinkligen Koordinaten mit ξ_0, η_0; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2, die entsprechenden Impulskomponenten mit p_0, q_0; p_1, q_1; p_2, q_2 bezeichnen, ferner voraussetzen, daß der gemeinsame Schwerpunkt der drei Massen ruht, also $p_0 + p_1 + p_2 = 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 0$, so läßt sich H analog zu (6) so schreiben:

$$(13)\quad \begin{cases} H = \frac{1}{2m_0}[(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2] \\ \quad + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2m_i}(p_i^2 + q_i^2) + V(x_1, y_1; x_2, y_2), \end{cases}$$

wenn die potentielle Energie mit V bezeichnet wird und $x_i = \xi_i - \xi_0$, $y_i = \eta_i - \eta_0$ $(i = 1, 2)$ ist.

Da der Drehimpuls der Masse m_i in bezug auf den Koordinatenursprung nach I, § 6, (4) durch $\xi_i q_i - \eta_i p_i$ gegeben ist und die Summe der Drehimpulse aller Massen konstant sein muß, ist $\sum_{i=0}^{2} (\xi_i q_i - \eta_i p_i)$

[1]) Siehe die Fußnote zu II, § 1, **3**.

ein Integral des Systems, das wir nach Einführung der relativen Koordinaten $x_1, \ldots, y_2$ von m_1, m_2 in bezug auf m_0 und bei Berücksichtigung der Bezeichnungen $p_0 = -(p_1 + p_2)$ usw. so schreiben können:

$$(14)\quad f(x_1, y_1, x_2, y_2, p_1, p_2, q_1, q_2) \equiv \sum_{i=1}^{2} (x_i q_i - y_i p_i) = \text{konst.}$$

Man findet die Bewegungen unserer drei Massen, die in bezug auf das Integral (14) quasistatisch sind, nach II, § 1, (19). Da $n = 4$, $\mu = 1$, erhalten wir acht Gleichungen der Gestalt $\frac{\partial H}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ usw., sie ergeben $2n - \mu$ unabhängige Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen. Bilden wir zunächst die acht Gleichungen, die sich in $\delta H + \lambda \delta f = 0$ zusammenfassen lassen, wo H aus (13) und f aus (14) einzusetzen ist, so lauten sie

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{p_i}{m_i} + \dfrac{1}{m_0}(p_1 + p_2) = \lambda y_i, & \dfrac{q_i}{m_i} + \dfrac{1}{m_0}(q_1 + q_2) = -\lambda x_i \\ & (i = 1, 2), \end{cases}$$

$$(16)\quad -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \lambda q_i = 0, \quad -\frac{\partial V}{\partial y_i} + \lambda p_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Wenn man beachtet, daß nach der Definition der Impulskomponenten $p_i = m_i \frac{d\xi_i}{dt}$, $q_i = m_i \frac{d\eta_i}{dt}$ ist, kann man (15) auch schreiben:

$$(17)\quad \frac{dx_i}{dt} = \lambda y_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\lambda x_i \quad (i = 1, 2).$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit x_i bzw. y_i und Addition $x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i = 0$, also die Konstanz von $x_i^2 + y_i^2$. Die gegenseitige Entfernung der drei Massen bleibt während der Bewegung konstant; sie bewegen sich als ein starres Dreieck. Führen wir etwa Polarkoordinaten $x_i = r_i \cos \vartheta_i$, $y_i = r_i \sin \vartheta_i$ ein, so folgt wegen der Konstanz der r_i durch Einsetzen in (17) $\lambda = -\dot{\vartheta}_i$, d. h. das Dreieck dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit λ um seinen Schwerpunkt. Berechnen wir die q_i, p_i aus (16) und setzen wir in (15) ein, so erhalten wir:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} + \dfrac{m_i}{m_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right) - m_i \lambda^2 x_i = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y_i} + \dfrac{m_i}{m_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_1} + \dfrac{\partial V}{\partial y_2}\right) - m_i \lambda^2 y_i = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2).$$

Bezeichnen wir die gegenseitige Entfernung von m_1 und m_2 mit Δ, so ist nach (6)

$$(19)\quad V = -\varkappa \frac{m_0 m_1}{r_1} - \varkappa \frac{m_0 m_2}{r_2} - \varkappa \frac{m_1 m_2}{\Delta},$$

und man erhält durch Einsetzen von (19) in die erste Gl. (18) für $i = 1$ und $i = 2$:

$$(20)\quad \begin{cases} \left[\varkappa\left(\dfrac{m_0+m_1}{r_1^3}+\dfrac{m_2}{\Delta^3}\right)-\lambda^2\right]x_1+\varkappa m_2\left[\dfrac{1}{r_2^3}-\dfrac{1}{\Delta^3}\right]x_2=0, \\ \varkappa m_1\left[\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{\Delta^3}\right]x_1+\left[\varkappa\left(\dfrac{m_0+m_2}{r_2^3}+\dfrac{m_1}{\Delta^3}\right)-\lambda^2\right]x_2=0. \end{cases}$$

Die Gl. (20) sind zwei lineare homogene Gleichungen für x_1, x_2. Durch Einsetzen von (19) in die zweite Gl. (18) folgt, daß y_1, y_2 denselben Gl. (20) genügen müssen. Wir haben also zwei Lösungssysteme von (20) zu suchen. Wenn überhaupt von Null verschiedene Lösungen existieren, muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden [d. h. von niedrigerem Range als 2 sein][1]).

Es sind dann noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob dieser Rang Null oder Eins ist. Erster Fall: Es gibt zwei verschiedene Lösungen, d. h. die Vektoren x_1, y_1 und x_2, y_2 fallen nicht in eine Gerade, die drei Massen bilden ein wirkliches Dreieck. Da die Determinante den Rang Null hat, müssen alle ihre Elemente verschwinden. Das ergibt:

$$(21)\qquad r_1 = r_2 = \Delta, \quad \lambda^2 = \frac{\varkappa(m_0+m_1+m_2)}{\Delta^3}.$$

Die drei Massen bilden ein gleichseitiges Dreieck, das mit einer Winkelgeschwindigkeit rotiert, deren Quadrat verkehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes der Massen ist, ganz analog zum dritten Keplerschen Gesetz bei der einfachen Keplerbewegung [§ 1, (21)]. Zweiter Fall: Es gibt (bis auf eine gemeinsame multiplikative Konstante) nur ein Lösungssystem. Die Vektoren x_1, y_1 und x_2, y_2 fallen zusammen; die drei Massen liegen auf einer Geraden; ihr Abstandsverhältnis läßt sich aus dem Verschwinden der Determinante der Gl. (20) berechnen, ebenso auch die Winkelgeschwindigkeit, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Lehrbücher zu Kap. IV und V.

Himmelsmechanik:

C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. Zwei Bände. Leipzig 1902.
H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste, t. I. Paris 1905.
F. R. Moulton, An introduction to celestial mechanics. New York 1923.

Atommechanik:

N. Bohr, Über die Quantentheorie der Linienspektren. Deutsch von P. Hertz. Braunschweig 1923.
M. Born, Vorlesungen über Atommechanik. Berlin 1925.

[1]) Siehe 1. Bd., II, § 1, 5.

II. Abschnitt.

Wärmeleitung und Diffusion.

Sechstes Kapitel.

Freie Wärmeleitung und Diffusion.

§ 1. Grundbegriffe und Differentialgleichungen.

1. Grundbegriffe der Wärmeleitung in festen Körpern. Die Lehre von der Wärmeleitung geht von der Erfahrungstatsache aus, daß bei der Berührung zweier Körper verschiedener Temperatur oder beim Vorhandensein von Temperaturdifferenzen zwischen den verschiedenen Teilen eines Körpers mit der Zeit ein Ausgleich der Temperaturen erfolgt und zwar immer derart, daß dabei der wärmere Teil kälter, der kältere wärmer wird.

Es liegt sehr nahe, diese Erscheinungen in der Weise zu deuten, daß man die „Wärme“ als eine Art Flüssigkeit auffaßt, die auf einen Körper gebracht, seine Temperatur erhöht und dabei bestrebt ist, von Stellen höherer zu Stellen niederer Temperatur zu fließen. Wir nehmen heute an, daß die Wärme nicht eine Materie im engeren Sinne des Wortes sei, sondern eine Form von Energie, die aus anderen Energieformen unter gewissen Umständen entstehen und sich umgekehrt in sie umwandeln kann. Die kinetische Theorie der Wärme behauptet speziell, daß die Wärmeenergie nichts anderes sei als die kinetische Energie der ungeordneten Bewegung der kleinsten Teilchen der Materie, der Moleküle, Atome, Elektronen. In diesem Zusammenhang soll von dieser speziellen Vorstellung nur gelegentlich Gebrauch gemacht werden; im allgemeinen halten wir uns ausschließlich an die Tatsache, daß die Wärme eine Energieform ist, deren Quantität man im mechanischen Maße nach Erg messen kann.

Wird einem Körper von der Masse m Wärmeenergie zugeführt, so steigt seine Temperatur erfahrungsgemäß nach folgendem Gesetz:

$$du = \frac{dq}{\sigma . m}, \tag{1}$$

wenn man mit dq die zugeführte Wärmemenge und mit du die Temperaturerhöhung bezeichnet. σ ist eine für die verwendete Substanz charakteristische Größe, welche man spezifische Wärme nennt.

Die spezifische Wärme ist im allgemeinen eine Funktion von Temperatur und Druck. Die Druckabhängigkeit ist bei festen Körpern, von denen hier die Rede ist, vernachlässigbar klein, die Temperaturabhängigkeit ist hingegen mitunter beträchtlich. In der Praxis wird man jedoch, wenn es sich nicht um sehr große Temperaturänderungen handelt, in der Regel mit der Annahme eines konstanten σ sein Auslangen finden.

Unter Zugrundelegung von (1) kann man die Wärmemenge auch in „kalorischem" Maße messen, mit derjenigen Wärmemenge als Einheit, die die Temperatur der Masseneinheit einer Grundsubstanz (des Wassers) um die Einheit erhöht; man nennt sie „Kalorie". Erg und Kalorie hängen durch eine konstante Umrechnungsgröße, das mechanische Wärmeäquivalent, zusammen.

Für den Fluß der Wärme durch einen festen Körper hat sich nun aus gewissen Experimenten folgende Gesetzmäßigkeit empirisch ergeben. Denken wir uns eine Platte aus einer homogenen Substanz, deren Ausdehnung sehr groß sei gegenüber ihrer Dicke und halten wir (etwa durch schmelzendes Eis oder siedendes Wasser) die beiden parallelen Begrenzungsflächen auf konstanter, aber verschiedener Temperatur, dann wird sich mit der Zeit ein stationärer Zustand einstellen, bei dem ständig von der wärmeren zur kälteren Fläche ein Wärmestrom bestimmter Stärke durch die Platte fließt, den man aus der Menge des pro Zeiteinheit geschmolzenen Eises oder kondensierten Wasserdampfes bestimmen kann.

Versteht man unter dem „Wärmestrom" Q die Wärmemenge, die pro Sekunde durch die Begrenzung der Platte fließt, nennt man Δ die Dicke der Platte und F die Größe der Begrenzungsfläche, t die Zeit und u_1 bzw. u_2 die beiden konstanten Temperaturen, so ergibt sich folgende empirische Beziehung:

$$Qt = k \frac{u_1 - u_2}{\Delta} \cdot F \cdot t. \tag{2}$$

Die Größe k nennt man die „innere Wärmeleitfähigkeit" der Substanz; sie ist in erster Annäherung eine Materialkonstante, genau genommen aber selbst eine Funktion der Temperatur. Um die Probleme nicht zu sehr zu komplizieren, wollen wir im folgenden k stets als konstant betrachten. Je nach der Größe von k nennen wir die Körper gute oder schlechte Wärmeleiter.

Wir greifen nun das Problem etwas allgemeiner an, indem wir einen beliebigen Körper zugrunde legen. Wir denken uns in irgend einen Punkt P desselben ein Flächenelement dF hineingelegt und parallel dazu im Abstand dn ein gleich großes. Der Temperaturunterschied zwischen diesen beiden Flächen sei du. Wir nehmen nun

an, daß für den Wärmefluß in dem kleinen Zylinder innerhalb sehr kurzer Zeiten dt der Grenzfall des Gesetzes (2) gültig bleibt, in der Form

$$dq = -k\frac{\partial u}{\partial n}dF\,.\,dt, \tag{3}$$

wo das Minuszeichen gesetzt ist, da ja der Wärmestrom die Richtung der fallenden u hat. Diese Gleichung können wir nun ohne weiteres in vektorieller Schreibweise darstellen durch Einführung des Vektors $\mathfrak{Q}$. der „Wärmestromdichte", dessen Betrag gleich $\frac{dq}{dF\,dt}$ ist.

$$\mathfrak{Q} = -k\,\mathrm{grad}\,u, \quad Q = \int \mathfrak{Q}_n\,dF = -\int\left(k\frac{\partial u}{\partial n}\right)dF. \tag{4}$$

Dabei kann k im allgemeinen sowohl Funktion des Ortes als auch Funktion der Richtung des Vektors $\mathfrak{Q}$ in bezug auf irgend ein mit dem Körper fest verbundenes Koordinatensystem sein. Q ist die gesamte in der Richtung von n durch eine Fläche in der Zeiteinheit fließende Wärmemenge.

Wenn zwei homogene Medien mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten k_1 und k_2 in einer Fläche aneinanderstoßen, so müssen für diese Grenzfläche spezielle Annahmen, den Wärmeübergang betreffend, gemacht werden. Wir wollen annehmen, daß sich auch beim Übergang von einem Körper zu einem anderen die Temperatur nicht sprungweise ändern kann, so daß dort immer

$$u_1 = u_2. \tag{5}$$

Da es ferner physikalisch einleuchtend ist, daß der Wärmestrom keine flächenhaften Quellen oder Senken haben kann, so muß an der Grenze

$$k_1\frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial n} \tag{6}$$

sein, d. h. das Temperaturgefälle erleidet an der Grenze zweier verschiedener Medien eine Unstetigkeit.

Wir müssen schließlich noch wissen, welche Gesetzmäßigkeiten für den Wärmestrom an der „Oberfläche" eines Körpers gelten. Der Begriff „Oberfläche" ist allerdings ein wenig schwankend, da ja jede Oberfläche als Grenzfläche zweier Körper aufgefaßt werden kann, es sei denn, es handle sich um eine Grenze gegen das „absolute Vakuum". In vielen Fällen jedoch, z. B. an der Grenze gegen Luft oder ein anderes Gas, ist die Wärmeleitfähigkeit der äußeren Substanz so gering, daß wir den Wärmestrom durch Leitung vernachlässigen können. Es findet dann ein Wärmeaustausch zwischen der Körperoberfläche und seiner Umgebung statt erstens durch die Wärmestrahlung, und zweitens

durch Konvektion infolge von Strömung der umgebenden Flüssigkeiten oder Gase. Die wahren Gesetze dieser Vorgänge sind sehr kompliziert und von Fall zu Fall stark variabel. Man ist daher gezwungen, für die analytische Behandlung eine rohe Annäherung heranzuziehen, die als das „Newtonsche Abkühlungsgesetz" bezeichnet wird und folgendermaßen lautet: Ist die Temperatur an der Oberfläche eines Körpers u und die Temperatur seiner Umgebung U, ist ferner dF ein Element der Oberfläche, dann ist der Wärmestrom senkrecht auf dF in der Zeit dt gleich

$$dq = h(u - U)\,dF\,dt, \tag{7}$$

worin h eine von den näheren Umständen abhängige Konstante bedeutet, die sogenannte „äußere Wärmeleitfähigkeit". Das Gesetz (7) gilt im allgemeinen nur mit ziemlich beschränkter Genauigkeit, die Größe h ist recht unexakt definiert. In einem späteren Absatz werden wir zeigen, daß sich unter gewissen Voraussetzungen das Newtonsche Gesetz auch exakt begründen läßt.

Aus der Stetigkeit des Wärmestromes an der Oberfläche ergibt sich schließlich die Oberflächenbedingung

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - U). \tag{8}$$

2. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung. Aus unserem Gesetz (4) können wir nun ohne weiteres eine Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einem festen Körper ableiten, indem wir uns in ihm ein Raumelement dV abgegrenzt denken und die Bilanz der ein- und ausströmenden Wärmemengen ziehen. Die Substanz werde zunächst inhomogen aber isotrop angenommen, d. h. k sei eine skalare Ortsfunktion.

Den Überschuß der eintretenden über die austretende Wärmemenge erhalten wir aus der Formel für Q [Gl. (4)], wenn wir das Integral über die Oberfläche des Volumenelementes erstrecken. Dieses ist aber nach der Formel im 1. Bd., II, § 3, (29) gleich einem Volumenintegral. Da wir es nur mit einem Volumenelement zu tun haben, schreiben wir es einfach: $\operatorname{div} \mathfrak{Q}\,dV = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\,dV$ [s. Gl. (4)]. Es kann ferner durch irgend einen Prozeß (z. B. chemischer oder elektrischer Natur) in dV Wärme entstehen. Bezeichnen wir die pro Sekunde im Volumen 1 entstehende Wärme mit A, so kommt zu dem obigen Ausdruck noch $A\,dv$ hinzu. Andererseits steigt durch die Vermehrung des Wärmeinhaltes die Temperatur des Volumenelementes um $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ oder nach (1) die Wärmemenge um $\sigma\varrho\dfrac{\partial u}{\partial t}\,dv$, worin ϱ die Dichte der Substanz bedeutet. Durch Gleich-

setzung dieses Ausdruckes mit den obigen erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung

$$(9) \quad \sigma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = A + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = A + k \Delta u + (\operatorname{grad} u \,.\, \operatorname{grad} k).$$

Ist das Medium anisotrop, wie es z. B. bei vielen Kristallen der Fall ist, so wird die Richtung des Wärmestromes mit der Richtung des Temperaturgradienten im allgemeinen nicht zusammenfallen und an Stelle der skalaren Größe k tritt ein Tensor K mit den Komponenten k_{xx}, $k_{xy}, \ldots$ (s. 1. Bd., II, § 4, **1**). An der Differentialgleichung (9) ändert sich dabei, wie man ohne weiteres sieht, weiter nichts, als daß an Stelle des Produktes $k \operatorname{grad} u$ das 1. Bd., II, § 4, (8), (9) definierte Produkt $K \operatorname{grad} u$ tritt. Anstatt (9) gilt also für anisotrope Körper:

$$(10) \qquad \sigma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = A + \operatorname{div}(K \operatorname{grad} u).$$

Machen wir speziell die Annahme, daß der Tensor K ein symmetrischer Tensor ist, wie aus empirischen Untersuchungen an verschiedenen Kristallen mit ziemlicher Sicherheit festzustehen scheint, so läßt sich das Koordinatensystem [s. 1. Bd., II, § 4, **3**, (30)] immer so wählen, daß die Komponenten mit zwei verschiedenen Indizes alle verschwinden und bloß die „Hauptkomponenten" nach drei Richtungen x, y, z übrigbleiben, die wir mit k_x, k_y, k_z bezeichnen wollen. In der Folge sei immer ein solches Koordinatensystem zugrunde gelegt.

Ist zunächst k bzw. K eine konstante Größe, so ergibt sich aus (10)

$$(11) \qquad \sigma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = A + k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

und aus (9) wegen $\operatorname{grad} k = 0$

$$(12) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\varrho \sigma} \Delta u + \frac{A}{\varrho \sigma}.$$

Ist überdies noch $A = 0$, so reduziert sich die Differentialgleichung auf die einfache Form

$$(13) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\varrho \sigma} \Delta u = a^2 \Delta u.$$

Die Größe a^2 wird, falls die spezifische Wärme auch als Konstante angesehen werden kann, selbst konstant und führt den Namen „Temperaturleitfähigkeit".

Für den stationären Zustand, wo u eine Funktion des Ortes allein ist $\left(\text{also } \frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$, folgt aus (12)

$$(14) \qquad \Delta u + \frac{A}{k} = 0,$$

die Poissonsche Gleichung der Potentialtheorie [1. Bd., XIV, § 1, (15)]. Für $A = 0$ wird daraus

$$\Delta u = 0, \tag{15}$$

die Laplacesche Gleichung [1. Bd., XIV, § 1, (5)]. In diesen Fällen reduzieren sich also die Probleme der Wärmeleitung auf die im 1. Bd., XVI, XVII behandelten Probleme der Potentialtheorie.

Die allgemeinere Gl. (13) ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wenn wir u als nur von einer räumlichen Koordinate x abhängig ansehen, lautet sie $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und fällt unter die im 1. Bd., XV, § 5, **2** behandelten Gleichungen [1]). Nach der dort gemachten Fallunterscheidung haben wir es mit einer parabolischen Differentialgleichung zu tun, die vom mathematischen Standpunkt ausführlicher im 1. Bd., XIX, § 4, **1**, **2**, behandelt ist.

In der Wärmeleitungstheorie ist folgendes Integrationsproblem zu lösen: Es ist eine Lösung $u(t, x, y, z)$ der Differentialgleichung (10) [bzw. (11), (12) oder (13)] zu suchen, die für $t = 0$ innerhalb eines endlichen räumlichen Bereiches in eine gegebene Funktion von x, y, z übergeht, während an der Begrenzung die Temperatur u oder das Temperaturgefälle $\partial u/\partial n$ oder eine Linearkombination von beiden [wie z. B. in Gl. (8)] für $t > 0$ als Funktion von t vorgegeben ist. Dabei soll u für $t > 0$ im ganzen Bereich regulär sein.

3. Grundbegriffe der Diffusion ohne Einwirkung äußerer Kräfte. Wir verstehen unter Diffusion die folgende Erscheinung: Haben wir zwei in flüssigem oder gasförmigem Zustand befindliche Gemische 1 und 2 aus zwei Bestandteilen A und B in verschiedenen Konzentrationen zusammengesetzt, die in einer Grenzfläche aneinanderstoßen, derart, daß auf beiden Seiten der Grenzfläche überall der gleiche Druck und die gleiche Temperatur herrschen, so beobachten wir eine Strömung zwischen den beiden Gemischen, derart, daß der Bestandteil A aus dem Gemisch, in dem er mit höherer Konzentration enthalten ist, in das Gemisch mit niederer Konzentration fließt, und ebenso der Bestandteil B so lange, bis sich die Konzentrationen in 1 und 2 ausgeglichen haben. Als „Gemische" kommen dabei in Betracht: Gemische bzw. Lösungen von zwei Flüssigkeiten ineinander, Lösungen von festen oder gasförmigen Körpern in Flüssigkeiten, Gemische zweier Gase, schließlich „Nebel" aus festen oder flüssigen Partikeln in Gasen. Die Lösungen können dabei sowohl molekular als auch kolloid sein, d. h. die Vermischung kann sich bis auf die Moleküle oder bloß bis auf gewisse Molekülkomplexe der gelösten Substanzen erstrecken.

[1]) Nur sind die unabhängigen Veränderlichen jetzt t, x anstatt x, y.

Ist der eine der beiden Körper im Verhältnis zu dem anderen stets in überwiegender Menge vorhanden, wie es z. B. bei den meisten Lösungen fester Körper in Flüssigkeiten der Fall ist, so ist die Konzentrationsänderung der Flüssigkeit gegenüber der der festen Substanz zu vernachlässigen und man spricht dann mitunter von der Diffusion der gelösten Substanz allein, obschon auch das Lösungsmittel diffundieren muß. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir im folgenden bloß immer den letzteren Fall im Auge halten; die erhaltenen Resultate lassen sich auf die anderen Fälle ohne weiteres übertragen.

Um die Gesetzmäßigkeiten der Diffusionsströmung zu ermitteln, machen wir folgenden Versuch: In zwei sehr große Reservoire 1 und 2 bringen wir eine und dieselbe Lösung in zwei verschiedenen Konzentrationen c_1 und $c_2 > c_1$. Die beiden Gefäße seien durch eine Kapillare von der Länge l miteinander verbunden. Der hydrostatische Druck an beiden Enden der Kapillare sei der gleiche. Wir bemerken, daß durch die Kapillare die gelöste Substanz aus dem Gefäß 2 in das Gefäß 1 strömt und daß die insgesamt in der Zeit t durch die Kapillare übergegangene Substanzmenge Q sich ergibt aus der Formel

$$Q = \varkappa \frac{c_2 - c_1}{l} \cdot t. \tag{16}$$

Die Größe $\varkappa$ ist dabei eine Konstante, die außer vom Querschnitt der Kapillare noch von der Natur der gelösten Substanz und des Lösungsmittels abhängt. Man sieht, daß dieses Diffusionsgesetz dem Gesetz (2) für die Wärmeströmung durch eine Platte völlig analog ist, an Stelle des Temperaturgefälles tritt hier das „Konzentrationsgefälle".

Man kann diesen Versuch auch so ausführen, daß man die beiden Gefäße durch einen Docht oder einen Streifen Filtrierpapier miteinander verbindet, oder sie durch eine feste Wand aus einer porösen Substanz voneinander scheidet, welche man sich als ein Bündel von Kapillarröhren vorstellen kann. Im letzteren Falle nennt man die Erscheinung gewöhnlich „Osmose".

Die gleiche Formel (16) würden wir nun aber auch erhalten, wenn wir uns die gelöste Substanz unter der Wirkung einer hydrostatischen Druckdifferenz $p_1 - p_2$ durch die Kapillare getrieben denken, da die Reibungskraft in der Kapillare ihrer Länge direkt proportional ist. Es wirkt also die Konzentrationsdifferenz $c_1 - c_2$ wie eine ihr proportionale hypothetische Druckdifferenz $p_1 - p_2$. Den Druck p nennen wir den „osmotischen Druck"; zwischen ihm und der Konzentration herrscht die Beziehung

$$p = \gamma \cdot c, \tag{17}$$

wo γ nicht mehr von der Konzentration abhängt.

Man vermag nun diesen osmotischen Druck auch direkt nachzuweisen und zur Messung zu bringen, wenn man die Kapillare bzw. die Poren der osmotischen Wand so eng macht, daß zwar die Moleküle des Lösungsmittels, nicht aber die der gelösten Substanz hindurchtreten können. Es wird dann das Lösungsmittel aus dem Gefäß niederer Lösungskonzentration 1 in das der höheren 2 fließen. Sind die beiden Gefäße nach außen abgeschlossen und mit Manometern versehen, so wird dadurch der Druck im Gefäß 2 steigen und im Gefäß 1 sinken, so lange, bis die entstandene Druckdifferenz gleich der osmotischen Druckdifferenz geworden ist, die im entgegengesetzten Sinne wirkt, und daher das Gleichgewicht eintritt. Man kann so in der Tat das Gesetz (17) bestätigen und die Bedeutung der Größe γ ermitteln. Bezeichnet man das Volumen eines Grammoleküls der gelösten Substanz in der Lösung mit v, so wird $c = \frac{1}{v}$ und das Gesetz (17) kann in der Form geschrieben werden

$$p v = R T, \tag{18}$$

worin T die absolute Temperatur und R eine universelle Konstante bezeichnet, die sich als identisch mit der Gaskonstanten erweist. Man sieht, daß die Gesetze des osmotischen Druckes denen der idealen Gase völlig analog sind; die Größe des osmotischen Druckes hängt von der Natur der Kapillaren bzw. der osmotischen Membranen gar nicht ab.

Wir können nun das Resultat des oben beschriebenen Versuches in plausibler Weise verallgemeinern, ähnlich wie wir es in **1** bei der Wärmeleitung gemacht haben, wenn wir uns vorstellen, daß in jeder Lösung, in der die Konzentration eine Funktion des Ortes ist, auf ein kleines Flüssigkeitselement osmotische Druckkräfte einwirken, die nach (17) dem Gradienten der Konzentration proportional sein müssen, gerichtet von der Stelle höherer zur Stelle niederer Konzentration. Analog zu (4) erhalten wir also für die Materiestromdichte der diffundierenden Substanz die Vektorgleichung

$$\mathfrak{D} = - D \operatorname{grad} c, \tag{19}$$

wo D eine von c unabhängige Größe bedeutet, die noch vom Material und von der Temperatur abhängen kann, wir nennen sie „Diffusionskoeffizient“. Er spielt in der Theorie der Diffusion die gleiche Rolle wie der Koeffizient der inneren Wärmeleitung in der Theorie der Wärmeleitung.

In gewissen Fällen läßt sich D theoretisch berechnen[1]). Infolge des osmotischen Druckgefälles wirkt nämlich nach den Gesetzen der Hydrostatik auf die in der Volumeneinheit gelöste Substanz eine Kraft

[1]) Vgl. W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 613, 1888; A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 549, 1905.

$\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} p$, unter deren Einwirkung die Substanz eine Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{K}}{r}$ annehmen wird; r ist dabei die durch die Bewegung hervorgerufene Reibungskraft, welche offenbar gleich sein wird der Reibungskraft auf ein einzelnes Molekül mal der Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit. Nennen wir das Reziproke der Reibungskraft auf ein einzelnes Molekül: B (Beweglichkeit) und N die Anzahl der Moleküle pro Grammolekül (Loschmidtsche Zahl), so ist $r = \frac{1}{B}\, c.N$, daher $\mathfrak{v} = -\frac{B}{cN} \operatorname{grad} p$. Da nun gemäß (18) $p = RTc$ und $\mathfrak{L} = c.\mathfrak{v}$, so folgt $\mathfrak{L} = -\frac{RT}{N} B \operatorname{grad} c$ und durch Identifizierung mit (19)

$$D = \frac{RT}{N} \cdot B. \tag{20}$$

Der Diffusionskoeffizient ist also der absoluten Temperatur direkt proportional. Die Größe B läßt sich allgemein nicht berechnen, sie ist eine Materialkonstante. Speziell für kugelige Partikeln einer festen Substanz in flüssiger Lösung ist nach dem Stokesschen Gesetz

$$B = \frac{1}{6\pi\mu a} \quad \text{(siehe XVIII, § 2)}, \tag{21}$$

wenn μ der Koeffizient der inneren Reibung des Lösungsmittels und a der Partikelradius ist.

4. Die Differentialgleichung der Diffusion. Wir können nun die Differentialgleichung der Diffusion sofort nach dem Muster von **2** gewinnen. Betrachten wir ein kleines Volumenelement dV der Lösung während der Zeit dt, so ist der Überschuß der in das Element einströmenden Menge gelöster Substanz über die ausströmende gemessen in Grammolekülen $-\operatorname{div}\mathfrak{L}\, dv\, dt = D \operatorname{div}.\operatorname{grad} c\, .\, dV\, dt$. Andererseits ist die Zunahme von Substanz daselbst $\frac{\partial c}{\partial t}\, dt\, dV$. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhalten wir

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\,.\,\Delta c. \tag{22}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Diffusion, die, wie man sieht, formal mit Gl. (13) der Wärmeleitung völlig übereinstimmt, wenn man c mit der Temperatur und D mit a^2 identifiziert. Wir können also formal die Probleme der Diffusion auf solche der Wärmeleitung zurückführen und umgekehrt.

Gl. (22) gilt für jeden Punkt im Innern der betrachteten Flüssigkeiten und Gase. Berühren sich zwei verschiedene Flüssigkeits- bzw.

Gasgemische unter Zwischenschaltung einer porösen Wand, so gilt die aus (17) sofort folgende Gleichung für die Normalkomponente der osmotischen Strömung durch ein Flächenelement dF in der Zeit dt

$$\mathfrak{D}_n\,dt = D^*(c_1 - c_2)\,dF\,dt, \tag{23}$$

wo D^* außer von der Natur der Substanz noch von der Art der porösen Scheidewand abhängig ist. Ist D^* für das Lösungsmittel von Null verschieden, für die gelöste Substanz aber gleich Null, so nennt man die Scheidewand „semipermeabel".

§ 2. Wärmeleitung und Diffusion im unbegrenzten Körper.

1. Der Körper ist unendlich ausgedehnt in einer Dimension. Allgemeine Lösung. Wir machen in diesem Paragraphen die Annahme, daß k, ϱ, σ Konstanten sind und $A = 0$. Der Körper sei homogen und isotrop und nach allen Seiten hin unendlich ausgedehnt, es soll aber von vornherein angenommen werden, daß u nur von einer Koordinate x abhängen möge. Wir werden an einer späteren Stelle zeigen, daß unter geeigneten Anfangsbedingungen in der Tat eine solche Abhängigkeit von nur einer Koordinate erzielt werden kann. Gl. (13) reduziert sich dann auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Es ist nun die Aufgabe, eine Lösung dieser Differentialgleichung zu suchen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Zur Zeit $t = 0$ soll u gleich einer gegebenen Funktion $\Phi(x)$ sein und für alle späteren Zeiten $t > 0$ soll u im ganzen Raume endlich, stetig und stetig differenzierbar sein.

Wir versuchen eine partikuläre Lösung zu finden, die sich als Produkt aus einer Funktion von x allein und einer Funktion von t allein darstellen läßt.

$$u = X(x) \cdot T(t). \tag{2}$$

Setzen wir dies in Gl. (1) ein, so erhalten wir $X \frac{dT}{dt} = a^2 T \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}$ oder $\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}$. Hier steht links vom Gleichheitszeichen eine Funktion von t allein, rechts eine Funktion von x allein. Es kann also die Gleichung nur dann für alle Werte von x und t erfüllt sein, wenn beide Seiten gleich einer und derselben Konstanten α sind. Daraus folgt zunächst $\frac{dT}{dt} = \alpha T$ oder $T = A \cdot e^{\alpha t}$. Setzen wir $\alpha = -\lambda^2 a^2$, so folgt für x die Differentialgleichung $\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X$.

Diese hat (s. 1. Bd., VI, § 2, 3) die beiden partikulären Integrale $\sin \lambda x$ und $\cos \lambda x$. Es können daher X und T nur für alle $t > 0$ und alle x endlich bleiben, wenn α negativ reell, also λ^2 positiv reell ist. Aus (2) erhalten wir dann die beiden Lösungen $A e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x$ und $B e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$. Darin ist λ eine willkürliche reelle Zahl, die wir positiv annehmen wollen, A und B sind willkürliche Größen, die wir als Funktionen von λ ansetzen. Da durch Summation über beliebig viele dieser Partikularlösungen immer neue Lösungen entstehen, erhalten wir durch Integration über λ eine Lösung:

$$u = \int_0^\infty (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda, \tag{3}$$

die von zwei willkürlichen Funktionen $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ abhängt. Wir wollen nun sehen, ob sich diese so wählen lassen, daß die Anfangsbedingung $u = \Phi(x)$ für $t = 0$ erfüllt ist.

Nun läßt sich aber nach dem Fourierschen Integraltheorem [1. Bd., IV, § 3, (11)] eine Funktion $\Phi(x)$, die innerhalb eines endlichen Intervalls der Dirichletschen Bedingung genügt und außerhalb desselben verschwindet, in folgender Gestalt darstellen:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \lambda (\alpha - x) d\alpha. \tag{4}$$

Da aus (3) für $t = 0$

$$u = \int_0^\infty (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) d\lambda \tag{5}$$

folgt, ergibt sich durch Zerlegung des cos in (4) und Vergleichung von (4) und (5)

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \alpha \lambda \,.\, d\alpha, \qquad B = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha \lambda \,.\, d\alpha$$

und durch Einsetzen in (4)

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \lambda (\alpha - x) d\alpha, \tag{6}$$

woraus in der Tat für $t = 0$ nach (4) $u = \Phi(x)$ folgt. Wir vertauschen nun die Reihenfolge der Integrationen in (6); dann wird

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) d\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \,.\, d\lambda.$$

Die Integration nach λ läßt sich leicht ausführen und liefert [nach 1. Bd., I, § 4, (29)]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\alpha - x)\, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4 a^2 t}},$$

so daß wir für u erhalten:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4 a^2 t}}\, d\alpha \text{ [1]}. \tag{7}$$

Daß (7) die Lösung unseres Problems darstellt, kann man auch unmittelbar einsehen. Denn die Funktion $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4 a^2 t}}$ ist für ein beliebiges α ein partikuläres Integral von (1), wovon man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Um nun auch noch nachzuweisen, daß für $t = 0$ sich u auf $\Phi(x)$ reduziert, führt man in (7) die neue Variable $\xi = \frac{\alpha - x}{2a\sqrt{t}}$ ein. Dies liefert $\alpha = x + 2\xi a\sqrt{t}$ und

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x + 2\xi a\sqrt{t})\, e^{-\xi^2}\, d\xi, \tag{8}$$

für $t = 0$ gibt dies [nach 1. Bd., I, § 4, (21)]

$$u = \Phi(x)\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \Phi(x).$$

Die Lösung (7) läßt sich physikalisch sehr anschaulich auf Grund der folgenden Überlegung deuten: Wir betrachten das partikuläre Integral

$$u = \frac{\gamma}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4 a^2 t}} \tag{9}$$

unserer Differentialgleichung (1), worin γ eine zunächst willkürliche Konstante bedeutet. Für $t = 0$ liefert diese Formel überall $u = 0$, mit Ausnahme der Stelle $x = \alpha$. Das entspricht also der Anfangsbedingung, daß im ganzen Raume die Temperatur Null herrscht, mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung der Ebene $x = \alpha$. Im Unendlichen verschwindet u für alle Zeiten.

Berechnet man sich die gesamte Wärmemenge, die zu irgend einer Zeit in dem Zylinder mit dem Querschnitt 1 enthalten ist, der sich

[1]) Diese Lösung ist ein Spezialfall der im 1. Bd., XIX, § 4, (16) (19), hergestellten.

parallel der x-Achse beiderseits ins Unendliche erstreckt, so findet man nach § 1, (1) $Q = \varrho\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = \varrho\sigma\,.\,\gamma$, wobei das Integral mit Hilfe der oben verwendeten Substitution $\alpha = x + 2\xi a\sqrt{t}$ ausgewertet und die beim Nullpunkt der Temperatur im Körper enthaltene Wärmemenge gleich Null gesetzt ist. Q ist also von der Zeit unabhängig, d. h. die gesamte Wärmemenge behält ihren (endlichen) Wert bei; während sie aber zur Zeit Null auf einem unendlich schmalen Streifen zusammengepreßt war, verbreitet sie sich durch Wärmeleitung allmählich, bis sie sich schließlich nach unendlich langer Zeit unendlich verdünnt hat. Die Größe γ spielt also in der Formel $Q = \varrho\sigma\gamma$ die Rolle des Produktes aus dem Volumen des schmalen Streifens und der Anfangstemperatur an der Stelle $x = \alpha$. Wäre nur eine „Quelle" der Wärmeströmung vorhanden, d. h. eine schmale Schicht der Temperatur $\Phi(\alpha)$ und der Breite (= Volumen) $d\alpha$, so würde wegen $\gamma = \Phi(\alpha)\,d\alpha$ die Temperatur an irgend einer Stelle x und zu irgend einer Zeit t gemäß (9) gegeben sein durch

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\Phi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha.$$

Befindet sich nun aber an jeder Stelle α eine „Quelle" und ist $\Phi(\alpha)$ wieder wie früher die Temperaturverteilungsfunktion zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir unter der Annahme, daß die Strömung so erfolgt, als ob die einzelnen Quellen jede gesondert, unabhängig voneinander wirken würden, für u die Summe aus allen diesen Strömungen, das ist der Ausdruck (7), den wir daher auch als Integral über die Quellen der Wärmeströmung oder kurz als das „Quellenintegral" der Differentialgleichung (1) bezeichnen. Wir werden von dieser Auffassung später noch Gebrauch machen.

Gemäß der in § 1, 4, von uns konstatierten formalen Identität zwischen der Wärmeleitungs- und der Diffusionsgleichung liefern die obigen Formeln gleichzeitig die Lösung des analogen Diffusionsproblems, wenn man Wärmemenge durch Substanzmenge, Temperatur durch Konzentration ersetzt.

2. Beispiele. Wir gehen nun zur Besprechung einiger einfacher Beispiele über.

Als erstes Beispiel betrachten wir die folgende Temperatur- (oder Konzentrations-) Verteilung zur Zeit $t = 0$: Es sei überall $u = 0$, mit Ausnahme der Schicht zwischen $\alpha = +1$ und $\alpha = -1$, wo u konstant, beispielsweise gleich 1, gesetzt sein möge. Das bedeutet: $\Phi(\alpha) = 0$ für $\alpha > 1$ und $\alpha < -1$ und $\Phi(\alpha) = 1$ für $-1 < \alpha < +1$. Setzt man diese Werte für Φ in (8) ein, so ist der Integrand nur zwischen

den Grenzen $x + 2\xi a\sqrt{t} = \pm 1$ von Null verschieden. Berechnet man daraus die Grenzen von ξ, so folgt aus (8):

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-1-x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left\{ \psi\left(\frac{1-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \psi\left(\frac{1+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right\}, \tag{10}$$

wenn wir mit ψ das Gaußsche Fehlerintegral

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \tag{11}$$

bezeichnen. Man sieht unmittelbar, daß u die Anfangsbedingungen erfüllt und für $t = \infty$ überall verschwindet; dann hat sich die endliche Wärmemenge auf ein unendlich großes Gebiet verbreitet. In Fig. 5 sind für eine Anzahl von Zeiten die Temperaturen als Funktion von x dargestellt.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Anfangsverteilung der Temperatur, derart, daß für $\alpha > 0$ $\Phi(\alpha) = 0$ und für $\alpha < 0$ $\Phi(\alpha) = 1$. Wie oben erhält man aus Formel (8)

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right\}. \tag{12}$$

Aus Fig. 6, welche die Temperaturverteilung für einige Zeiten darstellt, sieht man, wie die Wärme allmählich aus dem negativen in den positiven Halbraum einströmt, während zu bemerken ist, daß an keiner Stelle des positiven Halbraumes zu irgend einer Zeit die Temperatur höher werden kann als $^1/_2$.

Dieses Beispiel liefert gleichzeitig auch die analytische Behandlung des Grundversuches der Diffusion. Es werden zu diesem Zwecke zwei gleiche und genügend lange zylindrische Gefäße mit den Grundflächen aneinandergesetzt und durch eine Schiebewand getrennt. Der eine Zylinder enthält das reine Lösungsmittel ($c = 0$), der andere Lösung mit der Konzentration C. Nun wird der Schieber geöffnet und nach einer gewissen Zeit T wieder geschlossen. Gemäß (12) wird die gelöste Substanz aus dem Zylinder 2 in den Zylinder 1 diffundiert sein. Um ihre Menge Q zu bestimmen, bemerken wir, daß gemäß § 1, (19) in der Zeit dt durch den geöffneten Schieber die Substanzmenge $dq = D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} F\,dt$ fließen wird, wenn F den Zylinderquerschnitt

bezeichnet. Setzen wir den Ausdruck (12) (für $u = c$, $\sqrt{a} = D$) ein, so erhalten wir die bis zur Zeit T durchgeflossene Substanzmenge

$$Q = \int_0^T dq = C\sqrt{\frac{DT}{\pi}}. \tag{13}$$

Durch Messung von Q sind wir imstande, aus dieser Formel den Diffusionskoeffizienten D zu bestimmen.

Fig. 5.

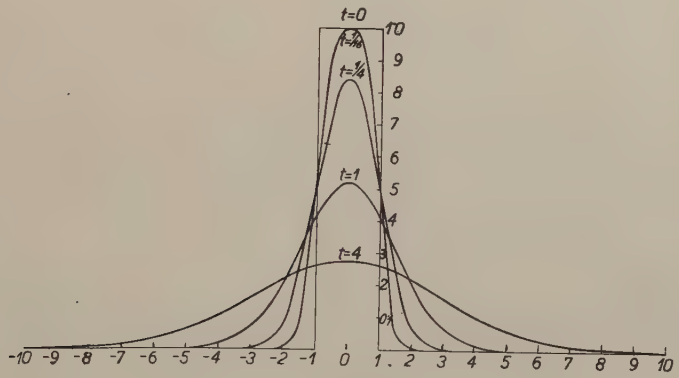
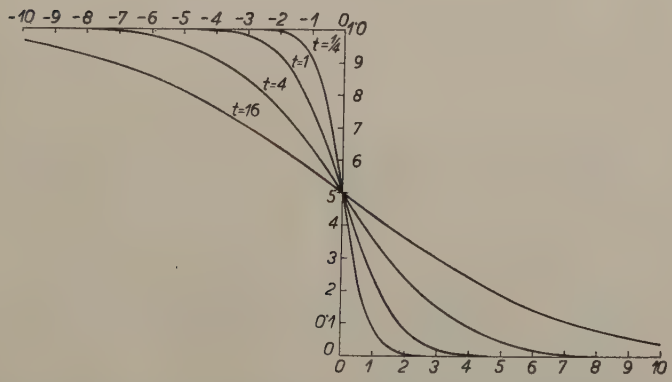


Fig. 6.



Wir kehren nun zu Formel (12) zurück und wollen zusehen, mit welcher Geschwindigkeit eine bestimmte Temperatur im positiven Halbraum vorschreitet. Nennen wir sie u_0, so finden wir die gesuchte Geschwindigkeit, wenn wir in Formel (12) $u = u_0$ setzen und sie nach x auflösen. Das gibt

$$x = 2a\sqrt{t}.\psi^*(1 - 2u_0), \tag{14}$$

wenn man mit ψ^* die zu ψ inverse Funktion bezeichnet. Daher ist die gesuchte Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sqrt{t}} \cdot \psi^* (1 - 2u_0). \tag{15}$$

Wir bemerken, daß für jedes u_0 die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Zeit bzw. mit der Entfernung von der Temperaturgrenze immer kleiner wird und im ersten Moment unendlich groß ist, daß ferner die Geschwindigkeit um so größer ist, je niedrigere Temperaturen wir betrachten. Von einer Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärme schlechthin läßt sich also nicht reden, da zu jeder auch noch so kurzen Zeit, von $t = 0$ angefangen, die Temperatur in noch so großer Entfernung von $x = 0$ bereits gestiegen ist.

Bemerkenswert ist ferner, daß an der Stelle $x = 0$ die Temperatur für alle Zeiten den konstanten Wert $^1/_2$ beibehält. Wir werden diese Tatsache später bei der Besprechung eines anderen Problems benutzen, wo gerade diese Festlegung einer bestimmten Temperatur an einer bestimmten Stelle vorgeschrieben ist.

Gemäß Formel (14) kann man natürlich auch durch Beobachtung des Vordringens der Temperatur eine Bestimmung von a, bzw. bei dem analogen Diffusionsproblem eine Bestimmung von D vornehmen, wenn es gelingt, dieses Vordringen in einfacher Weise kenntlich zu machen.

Im ersteren Falle kann man etwa so vorgehen, daß man die zu untersuchende Substanz in die Form eines langen Stabes bringt, den man entweder mit einer leicht schmelzbaren Schicht (Paraffin) überzieht und das Vordringen der Schmelzgrenze beobachtet, oder mit einem Anstrich versieht, der seine Farbe beim Überschreiten einer gewissen Temperatur verändert und das Vordringen der Farbgrenze beobachtet, wobei man allerdings die „äußere Wärmeleitung“ vernachlässigt hat. An einer späteren Stelle wird dasselbe Problem exakter behandelt werden.

Im Falle der Diffusion kann man das Vordringen einer bestimmten Konzentration, z. B. bei sauren oder basischen Lösungen, durch den Kunstgriff beobachten, daß man der Lösung einen Indikatorfarbstoff beisetzt, welcher bei einer bestimmten Konzentration von Säure oder Base seine Farbe in charakteristischer Weise verändert.

Ein drittes, etwas allgemeineres Beispiel erhalten wir, wenn wir die Annahme der Homogenität fallen lassen und zulassen, daß sich a mit dem Orte ändert. Ein Fall, der sich einfach behandeln läßt und eine Verallgemeinerung des oben besprochenen darstellt, liegt vor, wenn man einen aus zwei homogenen Stücken zusammengesetzten Körper betrachtet, die in der Ebene $x = 0$ zusammenstoßen. Sie seien charakterisiert durch die beiden Temperaturleitfähigkeiten a_1 und a_2, derart, daß für $x < 0 : a_1$ und für $x > 0 : a_2$ zu setzen ist. Ferner

sollen für $t = 0$ die Temperaturen der beiden Stücke konstant, und zwar gleich C_1 bzw. C_2 sein. Gesucht ist die Temperaturverteilung zu irgend einem späteren Zeitpunkt und an irgend einer Stelle.

Es gilt also für $x < 0$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16}$$

und für $x > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

An der Stelle $x = 0$ gilt nach § 1, (5), (6) die Grenzbedingung

$$u_1 = u_2, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{17}$$

Wir versuchen die Aufgabe durch den Kunstgriff zu lösen, daß wir zunächst so tun, als ob die Substanz 1 den ganzen Raum erfüllen würde, und als Anfangsbedingung für $x < 0 : u = C_1$ wählen, für $x > 0$ aber $u = C_1'$, wo C_1' eine noch zu bestimmende Konstante ist. Analog machen wir es mit der Substanz 2. Wir erhalten so zwei Lösungen, von denen die erste den Anfangsbedingungen: für $x < 0$ $\Phi(x) = C_1$, für $x > 0$ $\Phi(x) = C_1'$ entspricht, die zweite aber für $x < 0$ $\Phi(x) = C_2'$, für $x > 0$ $\Phi(x) = C_2$. Beide Lösungen, u_1 und u_2, erhalten wir aus (8). Die Konstanten C_1' und C_2' bestimmen wir durch die Forderung, daß für $x = 0$ die beiden Lösungen den Bedingungen (17) genügen sollen.

Nach (8) wird dann

$$u_1 = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{C_1'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$+ \frac{C_1'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}(C_1 + C_1') + \frac{1}{2}(C_1 - C_1')\,\psi\left(-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right),$$

ebenso

$$u_2 = \frac{1}{2}(C_2 + C_2') + \frac{1}{2}(C_2 - C_2')\,\psi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right).$$

Nennen wir die gemeinsame Temperatur der Berührungsfläche C_0, so folgt durch Einsetzen in (17)

$$C_1 + C_1' = C_2 + C_2' = 2C_0, \quad \frac{k_1}{a_1}(C_1' - C_1) + \frac{k_2}{a_2}(C_2' - C_2) = 0,$$

also

$$C_0 = \frac{C_1 \frac{k_1}{a_1} + C_2 \frac{k_2}{a_2}}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}} \tag{18}$$

und

$$u_1 = C_0 - (C_0 - C_1)\,\psi\Big(-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\Big), \quad u_2 = C_0 - (C_0 - C_2)\,\psi\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\Big). \tag{19}$$

Wenn man für $x < 0 : u = u_1$, für $x > 0 : u = u_2$ setzt, so überzeugt man sich leicht, daß u tatsächlich unseren Anfangs- und Grenzbedingungen (17) genügt und eine Lösung der Differentialgleichung (16) ist. An der Berührungsfläche herrscht stets die gleiche Temperatur C_0, welche sich nach unendlich langer Zeit im ganzen Raume einstellt.

Eine weitere interessante Anwendung unserer allgemeinen Entwicklungen stammt von Fourier[1]) und lautet so: Wir denken uns wieder, wie in Beispiel 1, die Anfangstemperatur überall gleich Null, mit Ausnahme eines sehr schmalen Streifens in der Umgebung von $x = 0$; die Temperatur soll aber dort so groß sein, daß das Produkt aus Temperatur und Streifenbreite (die Ergiebigkeit der Wärmequelle) gleich 1 ist. Es ist dann gemäß (9) (für $\gamma = 1$, $\alpha = 0$)

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \tag{20}$$

Wir halten nun einen bestimmten Punkt $x = x_0$ fest und beobachten in ihm die Temperatur als Funktion der Zeit. Zur Zeit $t = 0$ ist jedenfalls $u = 0$, ebenso sicher für $t = \infty$, da sich ja eine endliche Wärmemenge auf ein unendliches Gebiet verstreut. Es muß also zu einer endlichen Zeit ein Maximum der Temperatur auftreten. Wir finden diese Zeit t_m, wenn wir in (20) $x = x_0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ setzen. Das gibt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\Big(\frac{1}{2t_m} - \frac{x_0^2}{4a^2 t_m^2}\Big) = 0,$$

und daraus folgt

$$x_0^2 = 2a^2 t_m, \quad t_m = \frac{x_0^2}{2a^2}. \tag{21}$$

Die Formel könnte zu einer einfachen Bestimmung von a nach der obigen Methode herangezogen werden, wie es übrigens in dem analogen Diffusionsproblem bereits mit Erfolg gemacht wurde, und zwar bei Lösungen von Elektrolyten in Wasser[2]), indem die betreffende

[1]) Vgl. auch Ph. Frank, Phys. Zeitschr. **19**, 516, 1918.
[2]) Procopiu, Ann. de phys. **9**, 96, 1918.

Lösung in einer sehr dünnen Schicht am Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes zu Beginn des Versuches ausgebreitet wird und die Konzentrationsänderung an der festgehaltenen Stelle durch Messung der elektromotorischen Kraft an einer daselbst befindlichen Elektrode verfolgt wird.

3. Anwendung auf die Brownsche Bewegung eines Einzelteilchens. Gemäß dem in § 1, 3 Gesagten kommt nach der Molekulartheorie die Diffusion so zustande, daß die Moleküle sich in unregelmäßiger Bewegung befinden und den ihnen zur Verfügung stehenden Raum gleichmäßig zu erfüllen trachten. Hat man nun z. B. zur Zeit $t = 0$ in dem unendlich ausgedehnten Medium die Substanz um die Ebene $x = 0$ konzentriert, so wird sie sich nach einer Zeit t gemäß (20) ausgebreitet haben. Nach der Molekulartheorie können wir das so auffassen, daß nicht alle Moleküle die gleiche Verschiebung x in der Zeit t erfahren, sondern alle möglichen Verschiebungen, wobei auf jede Verschiebung zwischen x und $x + dx$ ein gewisser Bruchteil der Gesamtzahl aller Verschiebungen entfällt, der durch

$$w\,dx = \frac{c(x,t)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} c(x,t)\,dx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx \tag{22}$$

gegeben sein wird [1]).

Wenn nun alle Moleküle untereinander gleich sind, so kann man den Versuch auch mit einem einzigen Molekül ausführen, indem man es von $x = 0$ ausgehen läßt, seine Lage zur Zeit t notiert, und es nach jeder Messung immer wieder zum Ausgangspunkt zurückführt. Macht man sehr viele solche Versuche, so wird offenbar wieder der Bruchteil aller Versuche, die Verschiebungen zwischen x und $x + dx$ ergeben, mit $w\,dx$ übereinstimmen. $w\,dx$ wird also die „Wahrscheinlichkeit“ dafür darstellen, daß ein Molekül sich in der Zeit t um ein Stück zwischen x und $x + dx$ infolge der Wärmebewegung verschoben hat. Genau dieselbe Überlegung muß nun aber auch gelten, wenn wir nicht ein Molekül, sondern ein noch unter dem Mikroskop sichtbares Teilchen einer Substanz ins Auge fassen. In der Tat führen solche Teilchen eine unregelmäßige Bewegung aus, die man als „Brownsche Bewegung“ bezeichnet. Diese unregelmäßigen Verschiebungen gehorchen dem „Wahrscheinlichkeitsgesetz“ (22). Aus Formel (22) kann man das zum erstenmal von Einstein [2]) abgeleitete

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 558, 1905.

[2]) A. Einstein, ebenda, S. 549, 1905; M. v. Smoluchowski, ebenda **21**, 756, 1906.

Gesetz für das „mittlere Verschiebungsquadrat“ ableiten, das definiert ist durch das [nach 1. Bd., I, § 4, (27) ausführbare] Integral

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x)\,dx = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^2\,d\xi = 2Dt. \tag{23}$$

Das Gesetz hat formal eine gewisse Analogie mit (21). Wir werden im folgenden sehen, daß man eine große Zahl von Problemen der Brownschen Bewegung ähnlich wie hier durch Aufsuchung von entsprechenden Quellenintegralen der Differentialgleichung der Diffusion lösen kann.

4. Der Körper ist unendlich ausgedehnt in zwei Dimensionen. Auch hier machen wir zunächst die Annahme, daß der betrachtete Körper homogen und isotrop sei, und daß keine wahren Quellen vorhanden sind. Er soll sich nach allen Seiten unendlich weit erstrecken, die Temperatur soll jedoch nur von zwei rechtwinkligen Koordinaten x und y abhängen und von z unabhängig sein. Dies kann entweder so realisiert werden, daß die Anfangsverteilung in allen Ebenen senkrecht zur z-Achse identisch ist oder, bei Vernachlässigung der äußeren Wärmeleitung, durch Verwendung einer sehr dünnen und ausgedehnten Platte.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet in diesem Falle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{24}$$

Wir suchen eine partikuläre Lösung dieser Gleichung zu finden, die sich als Produkt zweier Funktionen T und R darstellen läßt, so daß T eine Funktion der Zeit allein und R eine Funktion des Abstandes $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ allein sein möge. Es ist dann

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}$$

und nach Einsetzen von $u = T.R$ in (24) folgt für T eine Differentialgleichung mit der Lösung $T = A e^{-\lambda^2 a^2 t}$ wie in **1.** Für R ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0. \tag{25}$$

Führen wir hier an Stelle von r die Veränderliche $\varrho = \lambda r$ ein, so reduziert sie sich auf

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + R = 0. \tag{26}$$

Diese Differentialgleichung ist aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannt [1. Bd., VIII, § 3, (1), (25)]; ihre Lösung ist die Besselsche Funktion von der nullten Ordnung J_0, so daß wir haben

$$R = J_0(\varrho) = J_0(\lambda r). \tag{27}$$

Wir haben also ein partikuläres Integral von (24):

$$u = A\, e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot J_0(\lambda r), \tag{28}$$

wo A und λ beliebige Werte annehmen können. Da die Differentialgleichung homogen und linear ist, können wir die allgemeine Lösung daraus erhalten, wenn wir A als willkürliche Funktion von λ betrachten und nach λ über alle Werte von Null bis Unendlich integrieren:

$$u = \int_0^\infty A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{29}$$

Die Funktion $A(\lambda)$ ist nun wieder so zu wählen, daß dadurch die Anfangsbedingungen des Problems erfüllt werden. Dies geht natürlich nur dann, wenn auch für $t = 0$ u eine Funktion von r allein ist. Wir benutzen dazu den Satz aus der Theorie der Besselschen Funktionen über die Darstellung einer gegebenen Funktion durch ein Doppelintegral über Besselsche Funktionen, die analog der im eindimensionalen Falle verwendeten Fourierschen Darstellung (4) folgendermaßen lautet[1]):

$$\Phi(r) = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda \int_0^\infty \Phi(\alpha)\, J_0(\lambda \alpha)\, \alpha\, d\alpha. \tag{30}$$

Unser u reduziert sich für $t = 0$ auf

$$u_0 = \int_0^\infty A(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda.$$

Durch Vergleichung mit (30) folgt für $A(\lambda)$

$$A(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \Phi(\alpha)\, J_0(\lambda \alpha)\, \alpha\, d\alpha.$$

Setzen wir dies in (29) ein, so erhalten wir endgültig für u

$$u = \int_0^\infty \Phi(\alpha)\, \alpha\, d\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} J_0(\lambda r) \cdot J_0(\lambda \alpha) \cdot \lambda\, d\lambda. \tag{31}$$

Die Integration nach λ läßt sich hier nicht, wie im eindimensionalen Falle, allgemein ausführen. Für einen Spezialfall jedoch können wir die Lösung sofort geben, wenn nämlich $\Phi(\alpha)$ überall gleich Null ist, mit Ausnahme eines sehr schmalen Gebietes um $\alpha = 0$, über das

[1]) $\Phi(a)$ muß denselben Bedingungen genügen wie beim Fourierschen Integraltheorem; Gl. (30) rührt von H. Hankel her (Math. Ann. 8, 471 ff., 1875).

erstreckt $\int \alpha \Phi(\alpha)\, d\alpha = 1$ wird. Dann läßt sich das Integral nach α in (31) ausführen, und man erhält

$$u = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = \frac{1}{2a^2 t} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \tag{32}$$

wovon man sich durch Einsetzen der Potenzreihe für J_0 [1. Bd., VIII, § 3, (7a)] und gliedweise Integration leicht überzeugt. Nachträglich können wir nun in der Tat sehen, daß (32) ein partikuläres Integral von (24) ist.

Verlegen wir nun durch eine Verschiebung des Koordinatensystems den Koordinatenursprung in den Punkt ξ, η, so haben wir $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, und aus dem partikulären Integral (32) ergibt sich nun das weitere:

$$u = B \frac{1}{t} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}, \tag{33}$$

wo B noch eine beliebige Funktion von ξ und η sein kann.

Aus (33) nun können wir die allgemeinste Lösung von (24) erhalten (das „Quellenintegral“), wenn wir über die ganze Ebene ξ, η integrieren:

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty B(\xi, \eta) \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi\, d\eta, \tag{34}$$

wo die Funktion B wieder den Anfangsbedingungen entsprechend zu wählen wäre.

Wir werfen noch einen kurzen Blick auf die bei der Wärmeausbreitung in einer sehr ausgedehnten Platte (bei Vernachlässigung der äußeren Wärmeleitung) sich ausbildenden Linien gleicher Temperatur: die Isothermen. Haben wir eine zylindersymmetrische Anfangsverteilung, so ist aus Symmetriegründen klar, daß die Isothermen in jedem Augenblick Kreise mit ihrem Mittelpunkt auf der Zylinderachse sein müssen, jedoch nur dann, wenn das Medium isotrop ist.

Wir lassen nun die Annahme der Isotropie fallen, indem wir uns die Platte beispielsweise aus einem Kristall derart herausgeschnitten denken, daß zwei von den thermischen Hauptachsen (s. S. 181) in die Platte fallen oder, indem wir die Platte aus Holz machen, mit den Fasern parallel zur Platte. Die Differentialgleichung lautet dann in bezug auf die Hauptachsen nach § 1, (11):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Führen wir hier als neue Variable die Größen

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{a_x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{y} = \frac{y}{a_y}$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Das ist aber die Differentialgleichung für den isotropen Fall, und die isothermen Kurven müssen daher wieder in den Koordinaten ξ, η Kreise sein mit der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{Const} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = \text{Const.}$$

Das ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Halbachsen sich wie a_x zu a_y verhalten.

Auf diesem Umstand beruht eine Methode zur Bestimmung der Hauptleitfähigkeiten eines Kristalls. Man schneidet sich aus dem Kristall eine Platte, wie oben beschrieben, und überzieht sie mit einem leicht schmelzbaren Stoff, z. B. Paraffin. Darauf setzt man die Spitze eines erhitzten Drahtes auf eine Stelle der Platte und beobachtet die durch das Schmelzen des Überzuges entstehenden Figuren, welche die Isothermen der Schmelztemperatur darstellen; es sind im allgemeinen Ellipsen, deren Achsenverhältnis das Verhältnis der Temperaturleitfähigkeiten liefert.

Ein anderes, ähnliches Verfahren zur Bestimmung von Wärmeleitfähigkeiten beruht auf der Verwendung einer Platte, die aus zwei verschiedenen homogenen Stücken zusammengesetzt ist, die in einer beliebigen Grenzkurve aneinanderstoßen.

An der Grenzkurve ist nach § 1, (5), (6) die Bedingung erfüllt:

$$u_1 = u_2, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}, \tag{35}$$

wo n die Richtung der Normalen auf die Grenzkurve bezeichnet. Nennen wir s die Richtung der Tangente an diese Kurve, so ist wegen (35):

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{\partial u_2}{\partial s}. \tag{36}$$

Nun lautet die Differentialgleichung der Isotherme

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial n} dn = 0.$$

Es ist also $\frac{\partial u}{\partial n}$ dem cos des Winkels α zwischen der Kurvennormalen und n, $\frac{\partial u}{\partial s}$ dem sin desselben Winkels proportional. Daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial n}}. \tag{37}$$

Setzen wir aus (35) (36) ein, so folgt

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_1}{k_2}, \tag{38}$$

d. h. die Isothermen haben an der Grenzkurve einen Knick, dessen Größe ein Maß für das Verhältnis der beiden Wärmeleitfähigkeiten gibt. Hat man also die Wärmeleitfähigkeit der einen der beiden Substanzen anderweitig bestimmt, so kann man auf diese Weise die andere leicht messen.

5. Der Körper ist unendlich ausgedehnt in drei Dimensionen. Wir besprechen nunmehr den allgemeinsten Fall der Wärmebewegung im unendlich ausgedehnten Medium, wobei wir wiederum einen homogenen und isotropen Körper zugrunde legen. Der anisotrope Fall erledigt sich durch Einführung neuer Variabler nach dem Muster von 2 ohne Schwierigkeit.

Setzen wir zunächst voraus, daß u nur von r, der Entfernung des Aufpunktes vom Koordinatenursprung, abhänge. (Kugelsymmetrischer Fall.) Dann reduziert sich die Differentialgleichung § 1, (13) auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{39}$$

Führen wir hier statt u die Funktion $v = ru$ als abhängige Veränderliche ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \tag{40}$$

was mit der Differentialgleichung (1) für den linearen Fall identisch ist. Es muß jedoch hier r auf positive Werte beschränkt bleiben, und die Funktion v hat der Bedingung zu genügen: $v = 0$ für $r = 0$.

Da (9) ein partikuläres Integral von (1) ist, das die Ausbreitung der Wärme vom Punkte $x = 0$ aus auf einer Geraden darstellt, kennen wir ein Integral von (40), nämlich

$$v = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}},$$

wo A eine willkürliche Konstante bedeutet. Daraus erhalten wir wegen $v = ru$ ein Integral von (39):

$$u = \frac{A}{r\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}. \tag{41}$$

Dies ist aber für $r = 0$ unendlich groß, genügt also nicht unseren Bedingungen.

Ist nun aber v ein partikuläres Integral von (40), so ist auch $v_1 = \frac{\partial v}{\partial r}$ ein solches, also in unserem Falle

$$v_1 = \frac{B r}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}},$$

eine Lösung von (40), die unserer Forderung genügt; daraus folgt wegen $v_1 = r u_1$

$$u_1 = \frac{B}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \tag{42}$$

als eine Lösung von (39). B ist wieder eine willkürliche Konstante.

Aus (42) können wir nun ein ganz allgemeines Integral der Differentialgleichung § 1, (13) ableiten, indem wir durch Verschiebung des Koordinatensystems den Ursprung desselben in den Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ verlegen und statt r schreiben:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Wir können schließlich u_1 noch mit einer willkürlichen Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ multiplizieren und über den ganzen Raum integrieren, wodurch wegen der Homogenität und Linearität der Gleichung wieder ein Integral entsteht. Bezeichnen wir das Raumelement mit dV, so erhalten wir die allgemeine Lösung in der Form

$$u = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iiint e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \Phi(\xi, \eta, \zeta)\, dV, \tag{43}$$

wobei wir über B noch in geeigneter Weise verfügt haben.

Bezeichnen wir mit $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel um den Punkt (x, y, z) als Mittelpunkt, so ist $dV = r^2\, dr\, d\omega$.

Bezeichnen wir ferner den Mittelwert der Funktion Φ auf einer Kugel mit dem Radius r um den Punkt (x, y, z) mit $\psi(r)$:

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi\, d\omega, \tag{44}$$

so geht (43) über in

$$u = \frac{1}{(2a\sqrt{t})^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \psi(r)\, e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^2\, dr.$$

Das Integral können wir noch durch Einführung einer neuen Variablen $\lambda = \frac{r}{2a\sqrt{t}}$ vereinfachen, wodurch es sich verwandelt in

$$u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \psi(2a\sqrt{t}\,.\,\lambda)\, e^{-\lambda^2} \lambda^2\, d\lambda. \tag{45}$$

Das u enthält die willkürliche Funktion ψ und stellt daher das gesuchte allgemeine Integral von § 1, (13) vor. Für $t = 0$ reduziert es sich auf

$$u_0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \psi(0) \int_0^\infty e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda = \psi(0).$$

Nun ist aber ψ der Mittelwert der Funktion Φ, so daß also, da Φ eine stetige Funktion des Ortes ist, $\psi(0) = \Phi(x, y, z)$. Φ ist also der Anfangszustand zur Zeit $t = 0$, und der Ausdruck (43) ist die Lösung der Differentialgleichung § 1, (13) für beliebigen Anfangszustand (also das Quellenintegral für den dreidimensionalen Fall).

Ist speziell die Funktion Φ nur von einer Veränderlichen ξ abhängig, so können wir in (43) nach η und ζ integrieren und erhalten wegen

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = 1$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{46}$$

Das ist aber die bereits früher gefundene Lösung (7) für den eindimensionalen Fall. Wir sehen also, daß wir tatsächlich, wie bereits S. 186 erwähnt, durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen, nämlich Unabhängigkeit von η und ζ das allgemeine Problem auf das eindimensionale zurückführen können, wie es in der Tat in der Praxis häufig vorkommt. Ebenso können wir, wenn Φ von zwei Veränderlichen ξ und η allein abhängt, auf den zweidimensionalen Fall des vorigen Abschnittes geführt werden.

Ein wichtiger Spezialfall der allgemeinen Lösung (43) liegt vor, wenn die Anfangsbedingungen Kugelsymmetrie besitzen, also Φ eine Funktion von $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ allein ist. Nennen wir die Entfernung des Aufpunktes $Q(x, y, z)$ vom Ursprung $O: R$, dann ist r die Distanz PQ. Den Winkel zwischen r und ϱ nennen wir φ und den Winkel zwischen der Ebene OPQ und einer festen, durch r hindurchgehenden Ebene nennen wir ψ. Dann ist

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\varphi, \quad dV = \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\psi,$$

und nach Einsetzen in (43)

$$u = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \Phi(\varrho) \cdot \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\psi.$$

Die Integration nach φ und ψ können wir sofort ausführen, so daß für u herauskommt

$$(47) \qquad u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}.R} \int_0^\infty \Phi(\varrho) \left\{ e^{-\left(\frac{R-\varrho}{2a\sqrt{t}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{R+\varrho}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \right\} \varrho \, d\varrho.$$

Hierin ist $\Phi(\varrho)$ nur für positive Werte des Arguments definiert, wir können daher willkürlich für negative Werte von ϱ setzen $\Phi(\varrho) = \Phi(-\varrho)$, wodurch u übergeht in

$$(48) \qquad u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}.R} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\varrho) e^{-\left(\frac{R-\varrho}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \varrho \, d\varrho.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von (7) im eindimensionalen Falle nur dadurch, daß statt u hier Ru und entsprechend statt Φ hier $\Phi\varrho$ gesetzt ist, was wir auch direkt aus dem Umstand hätten entnehmen können, daß jede Lösung der Differentialgleichung (40) durch diese Transformation in eine Lösung von (39) für den kugelsymmetrischen Fall übergeht.

Als Beispiel zur Illustration dieses Wärmeleitungsproblems, das natürlich auch, wie wir schon wissen, als Diffusionsproblem gedeutet werden kann, nehmen wir das zu S. 189 analoge Problem: Welchen Verlauf hat die Funktion u von R und t, wenn zur Zeit $t = 0$ die Temperatur (oder Konzentration) im ganzen Raume verschwindet mit Ausnahme des Bereiches $R < 1$, wo $\Phi(\varrho) = 1$ sein soll? Durch Einführung von $\xi = \frac{\varrho - R}{2a\sqrt{t}}$ als neue Veränderliche in (48) können wir u auf die Form bringen

$$(49) \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2}\left\{\psi\left(\frac{1-R}{2a\sqrt{t}}\right) + \psi\left(\frac{1+R}{2a\sqrt{t}}\right)\right\} \\ + \frac{a\sqrt{t}}{R\sqrt{\pi}}\left\{e^{-\left(\frac{1+R}{2a\sqrt{t}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{1-R}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\right\}. \end{cases}$$

Der Ausdruck ist ähnlich gebaut wie der entsprechende Ausdruck (10) und ψ ist wieder durch (11) definiert.

6. Die Integralgleichungen der Wärmeleitung und Diffusion. Im vorstehenden haben wir gezeigt, daß sich die Probleme der Wärmeleitung und Diffusion durch Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung erledigen lassen. Wir wollen nun zeigen, daß man zu demselben Ziele auch durch Lösung gewisser Integralgleichungen gelangen kann, die wir nunmehr aufstellen wollen.

Das vorgelegte Problem laute so: Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperatur (bzw. Konzentration) überall gleich Null, nur in der unmittelbaren

Umgebung der Ebene $x = \alpha$ soll u von Null verschieden sein, derart, daß über diese Umgebung erstreckt $\int u\,dx = 1$. Aus Symmetriegründen leuchtet es ein, daß auch für alle späteren Zeiten u nur eine Funktion von x und t allein sein wird, wenn man sich das Medium homogen und isotrop bis ins Unendliche ausgedehnt denkt. Bezeichnen wir die Temperatur (oder Konzentration) als Funktion der Ausgangslage α und der Koordinaten x und t mit $u = f(\alpha, x, t)$, so können wir für einen beliebigen späteren Zeitpunkt $t + \tau$ die Verteilung von u so finden: Nach Ablauf der Zeit t hat sich an der Stelle ξ die Verteilung $f(\alpha, \xi, t)$ hergestellt. Betrachten wir die zwischen ξ und $\xi + d\xi$ enthaltene Wärmemenge (oder Substanzmenge) und lassen sie sich nach demselben Vorgang nochmals ausbreiten, so wird sie sich zur Zeit $t + \tau$ im Punkte x auf

$$f(\alpha, \xi, t)\,d\xi \,.\, f(\xi, x, t + \tau)$$

belaufen, da der Mechanismus der Ausbreitung im ersten Teile des Prozesses offenbar genau derselbe ist, wie im zweiten Teile. Nehmen wir nun an, daß sich der tatsächliche Zustand für x und $t + \tau$ als Superposition aller oben definierten Teilvorgänge für alle ξ von $-\infty$ bis $+\infty$ ergibt, so erhalten wir für die Funktion f die folgende quadratische Integralgleichung [1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \xi, t) \,.\, f(\xi, x, t + \tau)\,d\xi = f(\alpha, x, t + \tau), \tag{50}$$

der die Funktion f für jedes beliebige τ genügen muß. Man kann in der Tat leicht verifizieren, daß beispielsweise unsere Lösung (9), die der obigen Anfangsbedingung genügt, Lösung dieser Integralgleichung ist.

Wir wollen uns mit der schwierigen Aufgabe der Lösung der Integralgleichung (50) unter geeigneten Randbedingungen nicht abgeben; wir wollen bloß zeigen, daß notwendig jede Lösung von (50) gleichzeitig Lösung einer gewissen Differentialgleichung unter denselben Randbedingungen sein muß [2]). Die Voraussetzungen über die Funktion f, die wir dazu brauchen, sind die folgenden: 1. Die Funktion $f(\alpha, x, t)$ ist für sehr kleine t verschwindend klein für alle x, die nicht in unmittelbarer Nähe von $x = \alpha$ liegen. 2. Für sehr kleine x bzw. t ist die Funktion $f(\alpha, x, t)$ gerade in $x - \alpha$. Beide Annahmen sind physikalisch unmittelbar einleuchtend. Wegen der Erhaltung der Wärmemenge (bzw. Materie) gilt ferner, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, x, t)\,d\alpha$ unabhängig von der Zeit, also gleich dem Anfangswert 1 sein muß. Wir wählen τ

[1]) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **48**, 1106, 1915.
[2]) H. C. Burger, Versl. K. Akad. van Wet. **25**, 1137, 1917.

sehr klein gegen t und entwickeln die Funktion $f(\alpha, \xi, t)$ in eine Potenzreihe nach $\xi - x$. Das gibt

$$(51) \qquad f(\alpha, \xi, t) = f(\alpha, x, t) + (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{(\xi - x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \cdots$$

Ebenso erhält man durch Entwicklung von $f(\alpha, x, t + \tau)$ nach der kleinen Größe τ die Potenzreihe

$$(52) \qquad f(\alpha, x, t + \tau) = f(\alpha, x, t) + \tau\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \cdots$$

Wegen 2. können wir für sehr kleine τ setzen $f(\xi, x, \tau) = f(x, \xi, \tau)$, was in (50) eingesetzt mit Benutzung von (51) und (52) liefert

$$f(\alpha, x, t) + \frac{\partial f}{\partial \xi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi - x) f(x, \xi, \tau)\, d\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi - x)^2 f(x, \xi, \tau)\, d\xi + \cdots$$

$$= f(\alpha, x, t) + \tau\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \cdots$$

In dieser Reihe verschwinden nun zunächst alle Integrale, die eine ungerade Potenz von $(\xi - x)$ enthalten, wegen der Bedingung 2. Laut unserer Voraussetzung 1 sind ferner die unter den Integralzeichen stehenden Funktionen verschwindend klein für alle Werte ξ, die x nicht unmittelbar benachbart sind. Für solche Werte ist aber f noch mit einer Potenz der sehr kleinen Größe $(\xi - x)$ multipliziert. Es können also für sehr kleine τ alle Integrale der Reihe gegen das mit $(\xi - x)^2$ vernachlässigt werden. Ebenso verschwinden alle Glieder mit $\tau^2, \tau^3, \ldots$ gegen das Glied mit τ. Die von ξ und τ freien Glieder heben sich auf beiden Seiten weg. Es bleibt also

$$(53) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi - x)^2 f(x, \xi, \tau)\, d\xi = \tau\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Vertauschen wir hier die Bezeichnungen ξ und x, so können wir sie so schreiben:

$$(54) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

wenn wir die Abkürzung

$$(55) \qquad D = \frac{1}{2\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - \xi)^2 f(\xi, x, \tau)\, dx$$

einführen. Da diese Differentialgleichung für alle τ erfüllt sein soll und f das τ gar nicht mehr enthält, so darf auch D nicht mehr von τ abhängen. D ist also eine Konstante.

Wir sehen: die Bedingung dafür, daß eine Funktion Lösung der Integralgleichung (50) unseres Problems ist, besteht darin, daß sie auch die Differentialgleichung (54) mit $D =$ konst erfüllen muß. Das ist aber gerade die Differentialgleichung der Wärmeleitung bzw. der Diffusion.

Hat man nun entweder durch Lösung von (50) oder von (54) eine solche „Quellenlösung“ des vorgelegten Problems unter den vorgeschriebenen Randbedingungen gefunden, so kann man daraus durch das § 2, 1 besprochene Superpositionsverfahren Lösungen $u(x, t)$ finden, die beliebigen Anfangsbedingungen $u(x, t_0) = \Phi(x)$ angepaßt sind. Wir kommen so zur Aufstellung einer neuen, und zwar linearen Integralgleichung für die Funktion $u = u(x, t)$ und einen beliebigen Anfangszustand, nämlich

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t_0)\, f(\xi, x, t - t_0)\, d\xi, \tag{56}$$

worin f dieselbe Bedeutung hat wie oben (vgl. 1. Bd., XI, S. 385 f.).

Wir wollen diese Integralgleichung speziell für den Fall näher untersuchen, wo keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen, also die Funktion f nach § 2, (9) die Gestalt

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{(t-t_0)\,4D}}$$

hat[1]). Nach § 2, (7) ist jede Lösung der Integralgleichung (56) $u(x, t)$ auch eine Lösung der Differentialgleichung (54). Nun kann man sich leicht überzeugen, daß die Funktionen

$$V_n(x, t) = (-t)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{2\sqrt{-Dt}}\right) \tag{57}$$

Lösungen der Differentialgleichung (54) sind, worin H_n die Hermiteschen Polynome (1. Bd., VIII, § 4, 2) bedeuten. Man beweist dies leicht, wenn man in (54) einsetzt unter Berücksichtigung der Differentialgleichung [1. Bd., VIII, § 4, (14)] für die Hermiteschen Polynome. Setzen wir also in (56) für $u(x, t)$ die obigen Funktionen (57) ein, so wird die Gleichung befriedigt und wir erhalten

$$\left\{ H_n\left(\frac{x}{2\sqrt{-Dt}}\right) = \frac{(-t_0)^{\frac{n}{2}}}{(-t)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n\left(\frac{\xi}{2\sqrt{-Dt_0}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}}\, d\xi. \right. \tag{58}$$

[1]) Myller-Lebedew, Math. Ann. **64**, 388, 1907.

Führen wir hier die neuen Variablen

$$X = \frac{x}{2\sqrt{-Dt}}, \quad \Xi = \frac{\xi}{2\sqrt{-Dt_0}} \tag{59}$$

ein, so erhalten wir

$$H_n(X) = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\Xi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{-t_0}}{\sqrt{t-t_0}} e^{-\frac{(X\sqrt{-t}-\Xi\sqrt{-t_0})^2}{t-t_0}} d\Xi. \tag{60}$$

Das ist eine lineare homogene Integralgleichung für die Funktion $H_n(x)$, deren Kern aber nicht symmetrisch ist. Man kann sie jedoch leicht in eine solche mit symmetrischem Kern in ξ und x verwandeln, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $e^{-\frac{X^2}{2}}$ multipliziert. Dann wird aus (60)

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{X^2}{2}} H_n(X) \\ &= \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\Xi^2}{2}} H_n(\Xi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{-t_0}{t-t_0}}\, e^{\frac{t+t_0}{2(t-t_0)}(X^2+\Xi^2)+\frac{2\sqrt{t\,.\,t_0}}{t-t_0}X\Xi} d\Xi. \end{aligned} \tag{61}$$

Wir sehen nun, daß die Funktionen $e^{-\frac{X^2}{2}} H_n(X)$ die Eigenfunktionen der Integralgleichung (61) mit dem symmetrischen Kerne

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{-t_0}{t-t_0}}\, e^{\frac{t+t_0}{2(t-t_0)}(X^2+\Xi^2)+\frac{2\sqrt{t\,.\,t_0}}{t-t_0}X\Xi} \tag{62}$$

darstellen, die zu den Eigenwerten $\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n}{2}}$, $n = 1, 2, \ldots$ gehören. Der Kern enthält dabei noch die Parameter t und t_0 (vgl. 1. Bd., XII, § 3). Daraus folgt nach 1. Bd., XII, § 3, **3**, daß sich mit gewissen Einschränkungen jede willkürliche Funktion $\varphi(X)$ nach den Funktionen $e^{-\frac{X^2}{2}} H_n(X)$ in der Form

$$\varphi(X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{X^2}{2}} H_n(X) \tag{63}$$

entwickeln läßt (s. 1. Bd., IX, § 1, **3**, **4**).

Diese Entwicklung kann man zur Lösung des oben angedeuteten linearen Wärmeleitungsproblems benutzen. Ist nämlich der Anfangszustand durch die Funktion $\Phi(x)$ gegeben, also $u(x, t_0) = \Phi(x)$, so kann man für $t = t_0$ mit Hilfe der Transformation (59) setzen $\Phi(x) = \varphi(X)$. Nun kann man $\varphi(X)$ gemäß (63) entwickeln und in dieser Entwicklung nachträglich wieder statt X aus (59) x und t einsetzen. So erhält man eine Funktion $u(x, t)$, die die Integralgleichung (55) befriedigt und für $t = t_0$ den gegebenen Anfangszustand $\Phi(x)$ hat, also eine Lösung unseres Problems.

Zu einer weiteren Integralgleichung für den Wärmeleitungs- bzw. Diffusionsvorgang kann man schließlich gelangen, indem man nach dem Vorgang von § 2, 1 die Differentialgleichung (1) in zwei Gleichungen für x und t allein spaltet und so zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + a^2\varphi = 0$$

gelangt.

Von dieser Differentialgleichung kann man, wie 1. Bd., XI, 32, 3 gezeigt wird, ebenfalls zu einer homogenen linearen Integralgleichung gelangen, und von dieser aus wiederum zur Lösung des linearen Wärmeleitungsproblems unter gegebenen Randbedingungen durch Entwicklung nach den entsprechenden Eigenfunktionen.

§ 3. Wärmeleitung und Diffusion im begrenzten Körper.

1. Die Temperatur (Konzentration) der Oberfläche ist konstant. Begrenzung durch eine Ebene. Wir behandeln in diesem Paragraphen Probleme, bei denen im Gegensatz zu den Entwicklungen des vorhergehenden ein im Endlichen begrenztes Medium zugrunde gelegt wird. Es genügt daher die Angabe der Anfangsbedingung zur eindeutigen Festlegung der Lösung nicht mehr, sondern es muß noch eine Verfügung über die Temperatur des Körpers an seiner Oberfläche getroffen werden. Wir beschränken uns zunächst auf die Bedingung, daß an der Oberfläche die Temperatur konstant sein soll. Diese Bedingung kann in der Praxis vielfach realisiert werden, indem man die Begrenzungsfläche entweder durch eine vorbeiströmende Flüssigkeit oder durch Berührung mit einem schmelzenden oder siedenden Körper sehr angenähert auf konstanter Temperatur halten kann. In allen in der Folge zu besprechenden Fällen soll der betrachtete Körper homogen und isotrop sein und daher die Differentialgleichung § 1, (13) gelten.

Besprechen wir zunächst wieder den eindimensionalen Fall. Die erste Aufgabe, die wir behandeln, lautet so: Nach einer Seite sei der Körper durch die Ebene $x = 0$ begrenzt und erstrecke sich nach der anderen Seite ins Unendliche. Gesucht ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

unter den Bedingungen

$$u = \Phi(x) \text{ für } t = 0 \quad \text{und} \quad u = 0 \text{ für } x = 0. \tag{2}$$

Wir können in diesem wie in vielen anderen Fällen die Lösung mittels des folgenden Kunstgriffes erhalten. Wir suchen die Anfangsbedingungen über die Begrenzungsfläche hinaus geeignet so fortzusetzen, daß dadurch

die Randbedingungen identisch erfüllt werden. Wir haben von diesem Verfahren bereits Gebrauch gemacht. In dem vorliegenden Falle liegt die Sache sehr einfach, da man unmittelbar sieht, daß die Fortsetzung

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \tag{3}$$

die verlangte Eigenschaft hat. Gemäß § 2, (7) und (8) liefert die gesuchte Lösung die Funktion

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \Phi(\alpha) \left\{ e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2 t}} \right\} d\alpha \,. \tag{4}$$

oder

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2a\sqrt{t}}}^\infty \Phi(2\xi a\sqrt{t} + x) e^{-\xi^2} d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty \Phi(2\xi a\sqrt{t} - x) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Ist zum Beispiel die Anfangstemperatur konstant gleich C, so erhalten wir daraus mit der Bezeichnung von § 2, (11)

$$u = C \cdot \psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{5}$$

Diese Lösung ist aber vollkommen identisch mit § 2, (12). In der Tat erhielten wir dort das Resultat, daß für $x = 0$ die Temperatur ihren Wert im Laufe der Zeit beibehielt. Es gelten also alle dort gezogenen Schlüsse über die Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung, nur daß wir sie hier als „Abkühlung des erwärmten Körpers" deuten werden.

Wir sahen aus § 2, (14), daß die Zeit, die nötig ist, damit eine bestimmte Temperatur in eine gewisse Entfernung x von der Oberfläche ins Innere des Leiters eingedrungen ist, dem Quadrat der Größe (x/a) direkt proportional ist. Diese Tatsache kann man zur Messung der Wärmeleitfähigkeit nach Ingenhous benutzen. Man stellt sich eine Anzahl von Stäben aus verschiedenen zu untersuchenden Materialien her und überzieht sie an ihrer Oberfläche mit einer leicht schmelzenden Substanz mit definiertem Schmelzpunkt. Die Enden werden dauernd durch Eintauchen in ein Wasserbad oder dadurch, daß sie an einem Rohre befestigt sind, das von Wasserdampf durchströmt wird, auf konstanter Temperatur gehalten. Es wird dann die Entfernung der Schmelzstellen von den Enden gemessen, zu der diese bei den verschiedenen Stäben in einer gewissen Zeit vorgedrungen sind; sie ist der Wärmeleitfähigkeit direkt proportional.

2. Brillouins Diffusionsversuch und „Erstpassagen" bei Brownscher Bewegung. Selbstverständlich ist der Ausdruck (5) gleichzeitig Lösung des analogen Diffusionsproblems, das jetzt so lautet: Das unendlich

nach der Seite der negativen x ausgedehnte Medium ist bei $x = 0$ von einer Wand begrenzt, an der ständig die Konzentration Null aufrecht erhalten wird. Zur Zeit $t = 0$ herrscht überall die konstante Konzentration C. Man kann dieser Bedingung sehr leicht Genüge leisten, wenn man die Wand „klebrig" macht, so daß jedes Teilchen der gelösten Substanz, das dort ankommt, dauernd festgehalten wird.

Formel (5) liefert für die Konzentration als Funktion der Zeit und des Ortes die Beziehung

$$c = C \cdot \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \tag{6}$$

und daraus entnehmen wir für die Substanzmenge Q, die bis zum Zeitpunkt $t = T$ an die Flächeneinheit der Wand angeklebt wurde[1]).

$$Q = \int_0^T D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} dt = 2C\sqrt{\frac{DT}{\pi}}. \tag{7}$$

Durch Messung dieser angeklebten Substanzmenge ist man also in der Lage, den Diffusionskoeffizienten zu bestimmen. Dieses Verfahren ist von Brillouin[2]) an Emulsionen mit Gummigutt und Mastix angewendet worden, indem er die begrenzende Glaswand schwach ansäuerte, wodurch sie die Eigenschaft erhält, die anprallenden Partikel festzuhalten, deren Anzahl sich dann unter dem Mikroskop auszählen läßt. Man könnte zunächst vermuten, wie dies auch Brillouin irrtümlich angenommen hat, daß die angeklebte Substanzmenge gleich ist derjenigen, die bei Abwesenheit der Wand an ihrer Stelle hindurchdiffundiert wäre, also gleich $C\sqrt{\frac{DT}{\pi}}$ gemäß Formel § 2 (13).

In Wirklichkeit erhalten wir aber den doppelten Wert, was sich aufklärt, wenn man bedenkt, daß ja bei Nichtanwesenheit der Wand auch Teilchen in der entgegengesetzten Richtung wieder zurückkommen können, was hier ausgeschlossen ist.

Wählen wir die Anfangsverteilung so, daß für $t = 0$ alle Substanz in einem schmalen Bereich um $x = \alpha$ zusammengedrängt ist, derart, daß über diesen Bereich erstreckt $\int \Phi(x)\,dx = 1$ und sonst überall $\Phi(x) = 0$, so erhalten wir aus (4)

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left\{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4Dt}}\right\}. \tag{8}$$

---

[1]) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. **124** (2a), 263, 1915.
[2]) Vgl. J. Perrin, Die Atome, S. 120f. Leipzig 1914.

Daraus entnehmen wir, daß die Substanzmenge, welche im Zeitintervall zwischen t und $t+dt$ an die Wand gelangt, gleich ist[1])

$$(9) \qquad M(t)\,dt = D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} dt = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi D t^3}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4Dt}}\, dt.$$

Nach unseren allgemeinen Überlegungen S. 195 können wir dies aber offenbar auch als die Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, daß ein „Brownsches Teilchen“ eine Verschiebung α nach einer bestimmten Seite in einer zwischen t und $t+dt$ gelegenen Zeit erfährt, unter der Bedingung, daß es nach dem Überschreiten von α aus der Statistik ausgeschieden wird, oder, mit anderen Worten, daß t die Zeit ist, zu der die Verschiebung α zum ersten Male erreicht wird.

Bilden wir den Mittelwert der Größe $1/t$

$$\overline{\left(\frac{1}{t}\right)} = \int_0^\infty \frac{1}{t}\, M(t)\,dt,$$

so erhalten wir aus (9)

$$(10) \qquad \overline{\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^\infty t^{-\frac{5}{2}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4Dt}}\, dt = \frac{2D}{\alpha^2}.$$

Man kann also durch Messung einer genügend großen Anzahl solcher „einseitiger Erstpassagezeiten“ bei der Brownschen Bewegung die Größe D bestimmen[2]).

3. Der Körper ist von zwei Ebenen begrenzt. Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir einen endlichen Körper hernehmen, der durch zwei Ebenen begrenzt und dort auf konstanter Temperatur gehalten wird. Die Anfangstemperatur sei beliebig. Die Anfangs- und Grenzbedingungen lauten dann

(11) $u = \Phi(x)$ für $t = 0$, $u = 0$ für $x = 0$, $u = \gamma$ für $x = \alpha$ $(t > 0)$.

Wir können die Aufgabe in zwei Teile zerlegen, indem wir $u = u_1 + u_2$ setzen und für u_1 und u_2 folgende Bedingungen festsetzen:

$$(12) \qquad \begin{cases} u_1 = \Phi(x),\ u_2 = 0 & \text{für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \alpha \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{„ } t > 0 \text{ „ } x = 0 \\ u_1 = 0,\ u_2 = \gamma & \text{„ } t > 0 \text{ „ } x = \alpha. \end{cases}$$

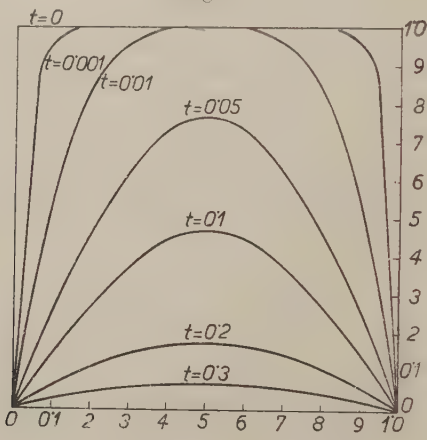
Zur Bestimmung von u_1 verwenden wir eine ähnliche Methode, wie in § 2, **1**, indem wir die allgemeine Lösung aus partikulären zusammenzusetzen trachten. Als eine solche partikuläre Lösung von (1) haben wir

[1]) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitsch. **16**, 318, 1915; E. Schrödinger, ebenda **16**, 289, 1915.

[2]) R. Fürth, Ann. d. Phys. **53**, 177, 1917.

dort die Funktion $e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x$ kennengelernt. Wir wollen zunächst die Konstante λ so zu bestimmen suchen, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Es muß dann $\lambda\alpha = n\pi$ gesetzt werden, worin n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Wir können nun wegen der Linearität

Fig. 7.



und Homogenität von (1) jede solche Partikularlösung mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren und alle addieren, wodurch die allgemeine Lösung

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{\alpha^2} t} \sin\frac{n\pi}{\alpha} x \tag{13}$$

entsteht. Wir müssen nun zusehen, ob es gelingt, hier die Koeffizienten A_n so zu bestimmen, daß dadurch die Anfangsbedingung erfüllt wird

$$u_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{\alpha} x = \Phi(x).$$

Das ist nun aber nichts anderes als die Entwicklung der Funktionen $\Phi(x)$ in eine Fouriersche Reihe nach dem Argument $\pi x/\alpha$, deren Koeffizienten sich nach 1. Bd., IV, § 4 aus

$$A_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\xi \cdot d\xi$$

bestimmen. Setzen wir diese Ausdrücke in (13) ein, so ergibt sich schließlich

$$u_1 = \frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{\alpha}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\alpha}\int_0^{\alpha} \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\xi \cdot d\xi. \tag{14}$$

Setzen wir hier beispielsweise $\Phi(\xi) = 1$, so erhalten wir

$$u_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{a(2n+1)\pi}{\alpha}\right)^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\alpha} \cdot \frac{1}{2n+1}. \tag{15}$$

Die Funktion (15) ist für verschiedene Werte von t in Fig. 7 graphisch dargestellt.

Wir gehen nun an die Berechnung von u_2. Eine Funktion, welche die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen (12) erfüllt, ist jedenfalls $u_2' = \frac{\gamma}{\alpha} x$. Damit nun auch die Anfangsbedingungen erfüllt sind, müssen wir hierzu noch eine Lösung u_2'' von (1) addieren, die an den beiden Grenzen verschwindet und zur Zeit Null die erste gerade aufhebt, also gleich $-\frac{\gamma}{\alpha} \cdot x$ ist. Diese erhalten wir aber, indem wir in (14) $\Phi(\xi) = -\frac{\gamma}{\alpha} \xi$ setzen. Dann wird daraus

$$u_2'' = -\frac{2\gamma}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{\alpha}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \int_0^{\alpha} \xi \sin \frac{n\pi \xi}{\alpha} \, d\xi.$$

Das letzte Integral ist, wie man durch partielle Integration leicht sieht, gleich $(-1)^{n+1} \frac{\alpha^2}{n\pi}$, so daß also u_2 gleich wird

$$u_2 = \gamma \left\{ \frac{x}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{\alpha}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\alpha} x \right\}. \tag{16}$$

Das gesuchte u lautet somit schließlich

$$\left\{ \begin{aligned} u = \frac{\gamma x}{\alpha} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ & e^{-\left(\frac{an\pi}{\alpha}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\alpha} x \left[\frac{(-1)^n}{n\pi} \gamma \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \Phi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \xi \cdot d\xi \right] \Bigg\}. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Für $t = \infty$ verschwindet das Summenglied und es stellt sich daher nach genügend langer Zeit die stationäre Verteilung

$$u = \frac{\gamma x}{\alpha} \tag{18}$$

her. Diese Verteilung, bei der u nur mehr Funktion des Ortes, nicht mehr der Zeit ist, kann natürlich auch unmittelbar aus der Differentialgleichung entnommen werden. Soll nämlich u von der Zeit unabhängig sein, so muß $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ sein, wir haben also die Differentialgleichung $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ zu lösen unter den obenstehenden Randbedingungen. Die Lösung

ist eine lineare Funktion von x, die durch die Randbedingungen in der Tat übereinstimmend mit (18) bestimmt ist.

4. „Doppelseitige Erstpassagen" bei Brownscher Bewegung. Wir wollen auch hier das analoge Diffusionsproblem betrachten, das wir so formulieren: Die betrachtete Flüssigkeit sei eingeschlossen zwischen zwei „klebrige" Wände an den Ebenen $x = 0$ und $x = 2\alpha$. Zur Zeit $t = 0$ sei die ganze Substanz in einen sehr schmalen Bereich um α zusammengedrängt, so daß über ihn erstreckt $\int \Phi(\xi)\, d\xi = \gamma$ und sonst überall $\Phi(\xi) = 0$.

Dann folgt aus (14)[1]) (wegen $\gamma = 0$)

$$c = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D\left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2\alpha} \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{19}$$

Wir erhalten daraus die Substanzmenge, die zwischen t und $t + dt$ an beiden Wänden zusammen festgehalten wird, aus

$$\left\{ \begin{aligned} N(t)\, dt &= D \left\{ \left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=0} - \left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=2\alpha} \right\} dt \\ &= \frac{\pi D}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi}{2}\, e^{-D\left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 t}\, dt. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Diese Formel liefert zunächst das selbstverständliche Ergebnis, daß in unendlich langer Zeit alle Substanz an die Wände gelangt ist, indem nämlich

$$\int_0^{\infty} N(t)\, dt = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = 1.$$

Faßt man die Formel wieder im Sinne von S. 195 als Wahrscheinlichkeitsformel auf, so bedeutet sie analog die Wahrscheinlichkeit, daß ein Substanzpartikel sich in der Zeit $t \ldots t + dt$ um die Strecke α zum ersten Male nach rechts oder links verschoben hat. Bilden wir den Mittelwert über sehr viele Zeiten

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t\, N(t)\, dt,$$

so erhalten wir durch Einsetzen von (20)

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{t} &= \frac{\pi D}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \int_0^{\infty} t\, . e^{-D\left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 t}\, dt \\ &= \frac{16\alpha^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{16\alpha^2}{\pi^3 D} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots\right) = \frac{\alpha^2}{2D}. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

[1]) R. Fürth, Ann. d. Phys. **53**, 177, 1917.

Die Formel zeigt in ihrem Bau eine weitgehende Analogie zu den Formeln (21, (23) des § 2 und zu Formel § 3 (10). Macht man eine genügend große Anzahl von Messungen solcher „doppelseitiger Erstpassagezeiten“ über dieselbe Strecke α, so kann man daraus wieder sehr einfach mit Benutzung von (21) den Diffusionskoeffizienten der Teilchensubstanz bestimmen[1]).

5. Geschichteter Körper. Das Wärmeleitungsproblem (11) läßt sich noch ein wenig verallgemeinern[2]) auf den Fall, daß man nicht bloß einen durch zwei Ebenen begrenzten Leiter vor sich hat, sondern einen „geschichteten“ Körper, der sich in der Richtung von y und z unendlich weit erstreckt und in der Richtung von x aus Schichten von der Dicke $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ besteht, mit den Wärmeleitfähigkeiten $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Die Dicke der ganzen Platte nennen wir $\delta = \delta_1 + \cdots + \delta_n$, die Temperatur in der ν-ten Schicht nennen wir u_ν. Wir wollen uns hier auf den stationären Fall beschränken.

Wir verlegen die Begrenzungsebenen in die Ebenen $x = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ und schreiben vor, daß für alle Zeiten bei $x = 0$ die Temperatur $u = 0$ und bei $x = x_n = \delta$ die Temperatur $u = \gamma$ herrschen soll. An den Ebenen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sind die folgenden Grenzbedingungen vorgeschrieben: für $x = x_\nu$ soll $u_\nu = u_{\nu+1}$ und $k_\nu \dfrac{\partial u_\nu}{\partial x} = k_{\nu+1} \dfrac{\partial u_{\nu+1}}{\partial x}$ sein.

Nach (18) ist u_ν eine lineare Funktion von x, die wir in der Form schreiben

$$u_\nu = \alpha_\nu x + \beta_\nu. \tag{22}$$

Wir müssen nun aus den Grenzbedingungen die $2n$-Größen α_ν, β_ν bestimmen. Durch Einsetzen aus (22) finden wir

$$\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu = \alpha_{\nu+1} x_\nu + \beta_{\nu+1}, \quad k_\nu \alpha_\nu = k_{\nu+1} \alpha_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$
$$\beta_1 = 0, \quad \gamma = \alpha_n \delta + \beta_n.$$

Das sind gerade $2n$ lineare Gleichungen, die zur Bestimmung der Konstanten ausreichen. Wir erhalten nach einfacher Rechnung

$$\alpha_\nu = \frac{\gamma}{k_\nu \sum_1^n \frac{\delta_r}{k_r}}, \quad \beta_\nu = \gamma \cdot \frac{\sum_1^{\nu-1} \frac{\delta_r}{k_r} - \frac{x_{\nu-1}}{k_\nu}}{\sum_1^n \frac{\delta_r}{k_r}}. \tag{23}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$k = \frac{\delta}{\sum_1^n \frac{\delta_r}{k_r}}, \tag{24}$$

---

[1]) R. Fürth, Ann. d. Phys. **53**, 177, 1917.

[2]) H. Gröber, „Die Grundgesetze der Wärmeleitung“, S. 110 ff. Berlin 1921.

so ergibt sich schließlich für u_ν aus (22) und (23)

$$u_\nu = \frac{\gamma k}{\delta}\left(\frac{x - x_{\nu-1}}{k_\nu} + \sum_1^{\nu-1}\frac{\delta_r}{k_r}\right). \tag{25}$$

Den Wärmefluß durch die ν-te Schicht erhalten wir nach § 1 (4)

$$-Q_\nu = k_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial x} = \frac{\gamma k}{\delta} = \alpha, \tag{26}$$

also gleich für alle Schichten, was ja auch im stationären Falle notwendig erfüllt sein muß.

Da γ/δ das Temperaturgefälle vorstellt, das herrschen würde, wenn die ganze Platte aus einem einzigen Stück bestände und an ihren Endflächen die obigen Bedingungen herrschten, so stellt k, wie ersichtlich, die Wärmeleitfähigkeit dieser fingierten Platte vor. Wir können also sagen, daß sich eine aus Schichten zusammengesetzte Platte in bezug auf ihr Wärmeleitvermögen senkrecht zu den Schichten so verhält, wie eine kompakte Platte vom Wärmeleitvermögen (24).

Lassen wir hingegen durch dieselbe Platte den Wärmestrom parallel zu den Schichtebenen laufen, so sind, wie man sofort einsieht, im stationären Fall die Wärmeströme in den einzelnen Schichten proportional den Ausdrücken $k_\nu\delta_\nu$ und daher der gesamte Wärmestrom proportional der Summe dieser Ausdrücke, das scheinbare Wärmeleitvermögen also

$$k^* = \frac{\sum_1^n k_\nu\delta_\nu}{\delta}.$$

6. Wärmeleitung im Zylinder. Wir haben bis jetzt in diesem Paragraphen Probleme behandelt, die nur von einer Koordinate abhängig waren. Wir gehen jetzt zur Besprechung der Wärmeleitung bzw. Diffusion zunächst in einem zylindrischen und dann in einem kugelförmigen Körper über.

Wir nehmen an, der betrachtete Zylinder sei unendlich lang, die Temperatur nur eine Funktion von r, der Entfernung von der Zylinderachse. Wir können dann, wie in § 2, 2 eine partikuläre Lösung angeben von der Form

$$u = A e^{-a^2\lambda^2 t} \cdot J_0(\lambda r), \tag{27}$$

wo A und λ willkürliche Konstanten sind und J_0 die Besselsche Funktion von der Ordnung Null bedeutet. Nun haben wir aber noch die Grenzbedingung zu befriedigen, die verlangt, daß die Oberfläche des Zylinders auf konstanter Temperatur gehalten sein soll, z. B. der Temperatur Null, daher $u = 0$ für $r = R$. Es müssen also die λ so gewählt werden, daß die transzendente Gleichung $J_0(\lambda R) = 0$ befriedigt ist. Wie aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannt ist (1. Bd., VIII.

§ 3, **10**), hat die Gleichung $J_0(x) = 0$ unendlich viele reelle und positive Wurzeln, die man aus der Tabelle (1. Bd. S. 339) entnehmen kann. Bezeichnen wir sie mit ξ_ν, so ist $\lambda = \lambda_\nu = \frac{\xi_\nu}{R}$ zu setzen, um unsere Grenzbedingungen zu erfüllen. Setzen wir dies in (27) ein, multiplizieren jede partikuläre Lösung mit einer willkürlichen Konstanten A_ν und summieren über ν von 1 bis ∞, so erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u = \sum_\nu A_\nu e^{-a^2 \lambda_\nu^2 t} . J_0(\lambda_\nu r). \tag{28}$$

Da nun für $t = 0$ die Anfangsbedingung $u = \Phi(r)$ vorgeschrieben ist, so muß gelten

$$\Phi(r) = \sum_1^\infty A_\nu J_0(\lambda_\nu r).$$

Nun läßt sich aber mit gewissen Einschränkungen jede Funktion Φ in eine solche Reihe entwickeln (1. Bd., IX, § 3, **4**). Setzen wir nämlich $x = r/R$, so ergibt sich

$$\Phi_1(Rx) = \sum_\nu A_\nu . J_0(\xi_\nu x),$$

wo ξ_ν eine Wurzel von $J_0 = 0$ ist. Nach 1. Bd., IX, § 3, (22), (23) ist dann A_ν gegeben in der Form

$$A_\nu = \frac{2}{J_0'(\xi_\nu)^2} \int_0^1 \Phi(Rx) . J_0(\xi_\nu . x)\, x . dx.$$

Gehen wir jetzt wieder zu der Variablen r zurück und berücksichtigen, daß $J_0' = -J_1$ [1. Bd., VIII, § 3, (7), (16)], so folgt

$$A_\nu = \frac{2}{R^2 J_1^2(\xi_\nu)} \int_0^R \Phi(r) J_0(\lambda_\nu r)\, r\, dr. \tag{29}$$

$J_{1\nu}$ sind hier die zu den Nullstellen von J_0 gehörigen Werte von J_1, die wir aus der Tabelle 1. Bd., S. 325 oder der Fig. 39 ebenda entnehmen können. Unsere gesuchte Lösung lautet also schließlich wegen (28), (29)

$$u = \frac{2}{R^2} \sum_{\nu=1}^\infty \frac{J_0(\lambda_\nu r)}{J_1^2(\xi_\nu)}\, e^{-a^2 \lambda_\nu^2 t} \int_0^R \Phi(\varrho) . J_0(\lambda_\nu \varrho)\, \varrho\, d\varrho. \tag{30}$$

Ist beispielsweise $\Phi(r) = C$ überall konstant, so läßt sich die Integration in (30) ausführen, da nach 1. Bd., VIII, § 3, (16): $xJ_0(x) = \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]$ und es wird

$$u = \frac{2C}{R} \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\lambda_\nu J_1(\xi_\nu)}\, e^{-a^2 \lambda_\nu^2 t} . J_0(\lambda_\nu r). \tag{31}$$

7. Wärmeleitung in der Kugel. Wir behandeln nun die gleiche Aufgabe für die Kugel ganz allgemein.

Wir führen Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, wodurch gemäß 1. Bd., II, § 3, (44) die Differentialgleichung § 1, (13) in die folgende übergeht

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right). \tag{32}$$

Wir setzen ein partikuläres Integral an in der Form

$$u = T.R.X, \tag{33}$$

worin T eine Funktion von t allein, R eine Funktion von r allein und X eine Funktion von ϑ und φ allein bedeuten soll. Setzen wir dies in (32) ein, so folgt

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{rR}\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \frac{a^2}{r^2 X}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial X}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X}{\partial\varphi^2}\right). \tag{34}$$

Wir machen weiter die Annahme, daß X eine Kugelfunktion der n-ten Ordnung sei, die also der folgenden Differentialgleichung genügt [1. Bd., VIII, § 2, (14)]:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial X}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X}{\partial\varphi^2} + n(n+1)X = 0. \tag{35}$$

Aus (34) und (35) erhalten wir

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{rR}\frac{d^2(rR)}{dr^2} - \frac{a^2 n(n+1)}{r^2}. \tag{36}$$

In dieser Differentialgleichung soll die linke Seite eine Funktion von t allein, die rechte eine Funktion von r allein sein. Also müssen beide Seiten einzeln derselben Konstanten gleich sein, für die wir $-\lambda^2 a^2$ schreiben.

Daraus folgt zunächst

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 a^2 T \tag{37}$$

und

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) rR = 0. \tag{38}$$

Gl. (37) liefert die bekannte Lösung

$$T = e^{-\lambda^2 a^2 t}, \tag{39}$$

woraus wir entnehmen, daß $\lambda^2 > 0$ sein muß. Setzen wir ferner in Gl. (38) $\lambda r = x$, so erhalten wir

$$\frac{1}{x}\frac{d^2(xR)}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) R = 0.$$

Setzt man hierin schließlich noch

$$R = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot S(x), \tag{40}$$

so ergibt sich für S die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{dS}{dx} + \left(1 - \frac{(2n+1)^2}{4x^2}\right) S = 0. \tag{41}$$

Diese Gleichung hat die Form der Differentialgleichung für die Besselschen Funktionen [1. Bd., VIII, § 3, (1)] mit dem nicht ganzzahligen Index $\nu = n + \frac{1}{2}$. Da R für $x = 0$ endlich bleiben muß, muß $S(0) = 0$ sein.

Die Lösung von (41) lautet also $S(x) = J_{n+1/2}(x)$. Die Funktionen $J_{n+1/2}(x)$ lassen sich nach 1. Bd., VIII, § 3, **1**, S. 324f. durch trigonometrische und rationale Funktionen von x in geschlossener Form ausdrücken. Durch Einsetzung der erhaltenen Ausdrücke (die uns hier übrigens nicht weiter interessieren) in (40) erhält man die Funktionen $R_n(x)$.

Es läßt sich wie bei den Besselschen Funktionen mit ganzzahligem Index auch für $J_{n+1/2}(x)$ zeigen, daß die Gleichung $R_n(x) = 0$ unendlich viele reelle Wurzeln, aber keine imaginären oder komplexen besitzt. Nennen wir eine derselben $\lambda_n^{(m)}$, dann ist die Funktion $R_n(\lambda_n^{(m)} r)$ eine Lösung der Differentialgleichung (38) und verschwindet für $r = 1$, während sie für $r = 0$ endlich bleibt. Sie befriedigt also unsere Randbedingungen, um die wir uns daher nicht weiter kümmern müssen.

Wir können jetzt die allgemeine Lösung unseres Problems angeben, indem wir in unser partikuläres Integral (33) für T den Ausdruck (39), für R die Funktion $R(\lambda_n r)$ und für X eine Kugelfunktion n-ter Ordnung einsetzen, die noch $2n + 1$ willkürliche Konstanten enthält. Nehmen wir zu jedem n die sämtlichen zugehörigen positiven Wurzeln $\lambda_n^{(m)}$ und summieren über alle n und m, so erhalten wir für u den allgemeinen Ausdruck

$$u = \sum_n \sum_m e^{-\lambda_n^{(m)2} a^2 t} R_n(\lambda_n^{(m)} r)\, X^{(n)}. \tag{42}$$

Um nun auch noch die Anfangsbedingungen zu befriedigen, müssen die Kugelfunktionen $X^{(n)}$ so gewählt werden, daß für $t = 0$

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_m R_n(\lambda_n^{(m)} r)\, X^{(n)}. \tag{43}$$

Nun kann man für ein beliebig gegebenes r die Funktion Φ in die Laplacesche Reihe nach Kugelfunktionen $Y^{(n)}$ entwickeln [(1. Bd., VIII, § 2, (9)]:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_n Y^{(n)}(\vartheta, \varphi). \tag{44}$$

Die Konstanten in den $Y^{(n)}$ sind dann noch Funktionen von r. Vergleichen wir (43) und (44), so ergibt sich

$$Y^{(n)} = \sum_m R_n(\lambda_n^{(m)} r)\, X^{(n)}. \tag{45}$$

Das ist eine Entwicklung der Funktionen $Y^{(n)}$ nach den Funktionen R_n, die der Entwicklung nach gewöhnlichen Besselschen Funktionen ganz analog ist und deren Koeffizienten auch durch ganz ähnliche Orthogonalitätseigenschaften leicht bestimmt werden können. Aus (45) ergeben sich durch Auflösung die $X^{(n)}$ als Funktionen von r, ϑ, φ, und da die R_n und die $\lambda_n^{(m)}$ bereits bekannt sind, ist damit u eindeutig bestimmt und unsere Aufgabe vollständig gelöst.

8. Vordringen des Frostes. Wir behandeln jetzt ein Problem der Wärmeleitung, das sich in gewisser Beziehung an die Entwicklungen des vorigen Paragraphen anschließt, sich jedoch durch eine eigenartige Grenzbedingung von ihnen unterscheidet, was in methodischer Hinsicht von Interesse ist.

Es handelt sich um das auch physikalisch sehr wichtige Problem des Vordringens des Frostes (beispielsweise in feuchter Erde oder in einer stehenden Wassermasse) oder auch um das Vordringen der Erstarrung in einer geschmolzenen Metallmasse beim Abkühlen oder Ähnliches. Wir denken uns die flüssige Masse durch eine Ebene einseitig begrenzt und sonst nach allen Seiten unbegrenzt groß. Sie möge zur Zeit $t = 0$ überall die gleiche Temperatur C_2 besitzen. Die Oberfläche selbst werde dauernd auf einer Temperatur C_1 unterhalb des Gefrierpunktes der Flüssigkeit gehalten. Es wird dann die angrenzende Schicht alsbald gefrieren und die Frostgrenze mit der Zeit immer weiter ins Innere der Flüssigkeit vordringen. Wir fragen nach der Geschwindigkeit dieser Vorrückung und nach der Temperaturverteilung als Funktion des Ortes und der Zeit.

Wir verlegen die Oberfläche in die Ebene $x = 0$ und nennen ξ die jeweilige Koordinate der Frostgrenze, a_1 und a_2 bzw. k_1 und k_2 seien die Temperatur- und Wärmeleitfähigkeiten für den festen und den flüssigen Zustand. Die Schmelzwärme, das ist diejenige Wärmemenge, die notwendig ist, um die Masseneinheit der festen Substanz beim Schmelzen in Flüssigkeit zu verwandeln, nennen wir λ. Die Wärmebilanz, aufgestellt für die Frostgrenze, lautet dann so:

Gegen die feste Substanz hin wird im Sinne der fallenden x in der Zeit dt pro Quadratzentimeter die Wärmemenge $+ k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_\xi dt$ abgeleitet. Zugeleitet wird von der Flüssigkeit her die Wärmemenge $k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_\xi dt$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke muß gerade gleich

sein der infolge des Schmelzprozesses in der Zeit dt gebundenen Wärme. Da nun aber während dt die Frostgrenze um das Stück $d\xi$ vorgeschritten ist, ist das Volumen geschmolzener Substanz gleich $d\xi$, also die Masse $\varrho\, d\xi$ und die gebundene Wärmemenge $\lambda\, \varrho\, d\xi$.

Wir erhalten also die Grenzbedingung

$$\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=\xi} = \lambda\, \varrho\, \frac{d\xi}{dt}. \tag{46}$$

Dazu kommen noch die Bedingungen

$$\begin{cases} u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{für} \quad x = \xi; \quad u_1 = C_1 \quad \text{für} \quad x = 0; \\ \qquad\qquad u_2 = C_2 \quad \text{für} \quad x = \infty, \end{cases} \tag{47}$$

da wir die Schmelztemperatur nach $u = 0$ legen, und da jedenfalls erst nach unendlich langer Zeit die Frostgrenze bis nach $x = \infty$ gelangt sein wird.

Die Differentialgleichung lautet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{für} \quad 0 < x < \xi, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{für} \quad x > \xi. \end{cases} \tag{48}$$

Wir wollen zeigen, daß unsere Anfangs- und Randbedingungen sich befriedigen lassen durch den folgenden Ansatz

$$\begin{cases} u_1 = A_1 + B_1 \psi\left(\dfrac{x}{2\, a_1 \sqrt{t}}\right), \\ u_2 = A_2 + B_2 \psi\left(\dfrac{x}{2\, a_2 \sqrt{t}}\right), \end{cases} \tag{49}$$

wo A_1, A_2, B_1, B_2 Konstante und ψ die in § 2, 2 definierten Funktionen sind. Daß diese Ansätze den Gleichungen (48) genügen, folgt bereits daraus, daß § 2, (11) ein partikuläres Integral der Wärmeleitungsgleichung bildet. Die Bedingungen (47) für $x = 0$ und $x = \infty$ liefern

$$A_1 = C_1, \quad A_2 + B_2 = C_2.$$

Damit ist auch die Anfangsbedingung im Einklang, welche für $t = 0$ $u_2 = C_2$ fordert.

Die übrigen Randbedingungen (47) liefern

$$A_1 + B_1 \psi\left(\frac{\xi}{2\, a_1 \sqrt{t}}\right) = 0, \quad A_2 + B_2 \psi\left(\frac{\xi}{2\, a_2 \sqrt{t}}\right) = 0.$$

Damit dies für alle Zeiten gilt, müssen die Argumente von ψ in beiden Gleichungen konstant werden, also ξ proportional $\sqrt{t}$ sein. Wir setzen

$$\xi = \alpha \sqrt{t}. \tag{50}$$

Wir können nun die Konstanten A und B bestimmen und erhalten

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = C_1, \quad B_1 = -\dfrac{C_1}{\psi\left(\dfrac{\alpha}{2a_1}\right)}, \quad A_2 = -\dfrac{C_2\,\psi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\psi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)}, \\ \qquad\qquad B_2 = \dfrac{C_2}{1-\psi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{array}\right.$$

Nun müssen wir noch untersuchen, ob wir über die noch freie Konstante α so verfügen können, daß dadurch unsere Grenzbedingung (46) identisch erfüllt ist. Aus (49), (50) folgt durch Einsetzen in (46):

$$\frac{k_1 B_1}{a_1\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}} - \frac{k_2 B_2}{a_2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}} = \frac{\lambda\varrho}{2\sqrt{t}}\alpha.$$

Da sich hieraus in der Tat $\sqrt{t}$ wegmultiplizieren läßt, bekommen wir durch Einsetzen aus (51):

$$(52)\quad \frac{k_1 C_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1\psi\left(\dfrac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 C_2 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1-\psi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\varrho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aus dieser transzendenten Gleichung haben wir nun α zu berechnen. Man sieht leicht, daß für $C_1 < 0$ und $C_2 > 0$ ein solcher Wert sicher existiert. Denn für $\alpha = 0$ ist die linke Seite der Gleichung $-\infty$ und für $\alpha = \infty$ ist sie $+\infty$, während die rechte Seite im gleichen Intervall von Null bis $-\infty$ läuft. Es muß also mindestens einen positiven Wert von α geben, für den beide Seiten den gleichen Wert haben. Aus α findet man dann die Konstanten A und B gemäß (51) und durch Einsetzen von (49) das u und damit ist die Aufgabe gelöst.

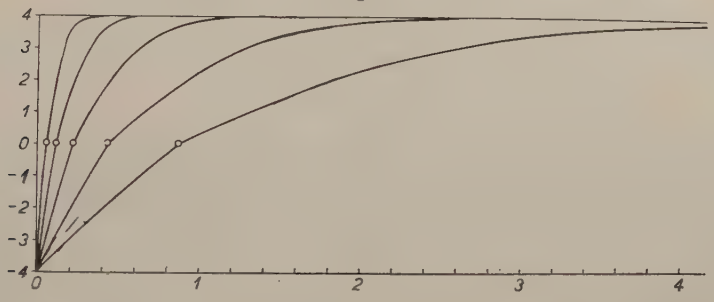
Leider ist es nicht möglich, dieses Verfahren auf einen beliebigen Anfangszustand zu übertragen, weil man wegen der Nichthomogenität der Grenzbedingung (46) nicht ein allgemeines Integral aus partikulären durch Addition zusammensetzen kann.

In Fig. 8 ist die gefundene Temperaturverteilung für den Fall Eis—Wasser für eine Anzahl von Zeiten durchgeführt, wobei folgende Daten benutzt wurden (der Index 1 bezieht sich auf Eis, der Index 2 auf Wasser): $C_1 = -4$, $k_1 = 0{,}005$, $\sigma_1 = 0{,}63$, $\varrho_1 = 0{,}92$, $C_2 = +4$, $k_2 = 0{,}001$, $\sigma_2 = 1{,}00$, $\varrho_2 = 1{,}00$, $\lambda = 80$.

Aus (52) folgt durch graphische Lösung $\alpha = 0{,}0219$ und daraus für die Konstanten $A_1 = -4$, $A_2 = -2{,}36$, $B_1 = 30{,}2$, $B_2 = 6{,}36$.

9. Die Temperatur (Konzentration) der Oberfläche ist eine gegebene Funktion der Zeit. Während wir in **1** für die Oberfläche eine konstante Temperatur als Randbedingung vorgeschrieben hatten, gehen wir jetzt zu einem etwas komplizierteren Problem über, indem wir verlangen, daß die Temperatur der Grenzfläche eine gegebene Funktion der Zeit sei. Wir beschränken uns dabei auf den eindimensionalen Fall und nehmen an, daß der Körper homogen und isotrop sei und die einseitige Begrenzung sich an der Ebene $x = 0$ befinde. Die Anfangs-

Fig. 8.



temperatur sei eine gegebene Funktion $\Phi(x)$ und für $x = 0$ sei in der ganzen Ebene $u = \varphi(t)$. Wir haben also die Differentialgleichung (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zu lösen mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} u &= \Phi(x) \quad \text{für} \quad t = 0, \\ u &= \varphi(t) \quad \text{für} \quad x = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Ähnlich wie in § 3, **1** zerlegen wir die Aufgabe in zwei Teile, indem wir den Ansatz $u = u' + u''$ machen, wo u' und u'' folgenden Bedingungen genügen sollen:

$$\begin{cases} u' = 0, & u'' = \Phi(x) \quad \text{für} \quad t = 0; \\ u' = \varphi(t), & u'' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0. \end{cases} \tag{54}$$

Die Funktion u'' haben wir bereits in (4) gefunden. Wir müssen also bloß noch u' finden.

Wir betrachten unsere Aufgabe als Grenzfall einer anderen, die so beschaffen ist, daß sich die Oberflächentemperatur in den aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $0, t_1, t_2, \ldots t_\nu, \ldots$ sprungweise verändert. Im Zeitintervall $\tau_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu$ soll die Funktion den konstanten Wert $\varphi(t_\nu)$ haben. Wir können dann u' ansetzen in der Form $u' = \sum_\nu u_\nu$, wo unter u_ν Lösungen der Differentialgleichung (1)

zu verstehen sind, die den folgenden Grenzbedingungen für $x = 0$ genügen:

$$(55) \qquad \begin{aligned} u_\nu &= 0 \quad \text{für} \quad t < t_\nu \quad \text{und für} \quad t > t_{\nu+1}; \\ u_\nu &= \varphi(t_\nu) \quad \text{für} \quad t_\nu < t < t_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun eine Funktion $\chi(x, t)$ durch die folgende Bestimmung. Es soll

$$(56) \qquad \chi(x, t) = 0 \quad \text{sein für} \quad t \leqq 0$$

und

$$\chi(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \text{für} \quad t > 0.$$

Diese Funktion ist eine stetige Funktion von x und für $x = 0$ auch eine stetige Funktion von t, dagegen ist sie an der Stelle $x = 0$ in t unstetig und springt beim Übergang von links nach rechts plötzlich von 0 auf 1.

Die Funktion genügt ferner, wie wir bereits aus § 2, **1** wissen, der Differentialgleichung (1). Setzen wir also

$$(57) \qquad u_\nu = \varphi(t_\nu)[\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})],$$

so haben wir ein u_ν, das unseren Bedingungen (55) genügt; denn für $x = 0$ und $t < t_\nu$ sind beide χ gleich Null, für $t > t_{\nu+1}$ sind sie beide gleich Eins und für $t_\nu < t < t_{\nu+1}$ ist das erste gleich Eins und das zweite gleich Null. Es ist also

$$(58) \qquad u' = \sum_\nu \varphi(t_\nu)[\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})].$$

Wir wollen nun die Intervalle τ_ν allmählich verkleinern und ihre Anzahl gleichzeitig vergrößern. Im Grenzfall kommen wir so auf eine stetige Oberflächenfunktion $\varphi(t)$. Es wird

$$\lim_{\tau_\nu = 0} \frac{\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})}{\tau_\nu}$$

$$= \lim_{\tau_\nu = 0} \frac{\chi(x, t - t_{\nu+1} + \tau_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})}{\tau_\nu} = \frac{\partial \chi(x, t - \vartheta)}{\partial t},$$

wobei $t_{\nu+1} = \vartheta$ gesetzt ist. Wenn wir in der Summe (58) in jedem Glied mit τ_ν multiplizieren und dividieren, wird beim Grenzübergang für $\tau_\nu = 0$ aus der Summe ein Integral:

$$(59) \qquad u' = \int_0^{t_n} \varphi(\vartheta) \frac{\partial \chi(x, t - \vartheta)}{\partial t} d\vartheta,$$

gültig für $t < t_n$, wenn t_n der letzte Zeitpunkt ist, in dem noch $\varphi(t) \neq 0$. Da nun aber $\chi(x, t-\vartheta)$ für $t < \vartheta$ verschwindet, so kann man in (59) die Integration von t bis t_n weglassen und erhält

$$u' = \int_0^t \varphi(\vartheta) \frac{\partial \chi(x, t-\vartheta)}{\partial t} d\vartheta.$$

Nun ist aber nach (56)

$$\frac{\partial \chi(x, t-\vartheta)}{\partial t} = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\vartheta)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\vartheta)}},$$

also schließlich

$$u' = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\vartheta) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\vartheta)}} (t-\vartheta)^{-3/2} d\vartheta. \tag{60}$$

Nachträglich können wir nun von dieser Lösung leicht zeigen, daß sie tatsächlich alles leistet, was von ihr gefordert wird. In § 2, **3** haben wir gezeigt, daß der Ausdruck $x \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} t^{-3/2}$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1) ist. Daran ändert sich nichts, wenn wir statt t setzen $t - \vartheta$, was offenbar bloß auf eine Veränderung des Nullpunktes der Zeitzählung herausläuft. Nun kommt allerdings die Variable t noch in der oberen Grenze des Integrals vor; man sieht aber ohne weiteres, daß dies nicht wesentlich ist, weil das Glied, das von der Differentiation nach der oberen Grenze herrührt, für $t = \vartheta$ verschwindet.

Um zu zeigen, daß auch die Nebenbedingungen erfüllt sind, führen wir als neue Veränderliche $\alpha = \frac{x}{2a\sqrt{t-\vartheta}}$ ein, wobei sich (60) verwandelt in

$$\left\{ u' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4a^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2} d\alpha, \right. \tag{61}$$

ein Ausdruck, der für $t = 0$ verschwindet und für $x = 0$ in $\varphi(t)$ übergeht.

Setzen wir hierin $\varphi = \text{konst}$, so kommen wir wieder auf den von uns § 3, **1** besprochenen Fall zurück und finden in der Tat Übereinstimmung der Lösungen. Es möge hier noch eine andere Art der Lösung des vorliegenden Problems[1]) Erwähnung finden, die auf der Verwendung der Laplacetransformation (Bd. I, XI, § 2, **6**) beruht, durch

[1]) G. Doetsch und F. Bernstein, Math. Zeitschr. **22**, 285, 1925.

die man jeder Funktion $u(t)$ eine andere Funktion $f(s)$ als „Funktion einer Funktion“ zuordnen kann gemäß

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt.$$

Wir können diese Transformation auf unsere Funktion $u(x, t)$ erweitern, indem wir setzen

$$f(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t)\, dt,$$

worin x als Parameter enthalten ist.

Setzen wir an Stelle von u in die obige Formel $\frac{\partial u}{\partial t}$ ein, so erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\, dt = s f(x, s) - u(x, 0).$$

Multipliziert man die Differentialgleichung (1) auf beiden Seiten mit e^{-st} und integriert nach t von $t = 0$ bis $t = \infty$, so ergibt sich, vorausgesetzt, daß sich die Differentiation nach x und die Integration vertauschen lassen, mit Benutzung der Randbedingung (53)

$$a^2 \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x^2} = s f(x, s) - \Phi(x).$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $f(x)$, in der noch s als Parameter vorkommen. Sie vereinfacht sich für den vorliegenden Fall [wenn wir statt u bloß die Funktion u' betrachten, für die $\Phi(x) = 0$ ist] auf

$$a^2 \frac{d^2 f}{d x^2} = s f,$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Randbedingung $u = \varphi(t)$ für $x = 0$ verwandelt sich in

$$f(0) = A(s),$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\int_0^\infty e^{-st} \varphi(t)\, dt = A(s).$$

Soll ferner u im Unendlichen verschwinden, so muß $f(\infty) = 0$.

Damit ist das Problem auf das weit einfachere Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgeführt, das

man nach 1. Bd., VII, § 2 behandeln kann. Im Falle der obigen Randbedingungen lautet die Lösung offenbar einfach

$$f = A e^{-\frac{\sqrt{s}}{a} x}.$$

Um von f zu u zurückzukehren, braucht man jetzt nur noch die Integralgleichung

$$A(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{a} x} = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) \, dt$$

zu lösen, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Man kommt so in der Tat zu der obigen Lösung (60) zurück.

10. Wärmewellen. Von den mannigfachen Anwendungen der gefundenen allgemeinen Lösung wollen wir hier einen einfachen Spezialfall hervorheben, nämlich den, wo die Funktion $\varphi(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist. Wir wollen setzen

$$\varphi(t) = \cos n t.$$

Die Anfangstemperatur sei zunächst überall gleich Null. Dann liefert Formel (61)

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty \cos n\left(t - \frac{x^2}{4a^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2} \, d\alpha. \tag{62}$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß nach Beginn des Versuchs bereits eine so lange Zeit verflossen sei, daß man in dem Integral (62) als untere Grenze Null setzen kann. In diesem Falle läßt sich die Integration leicht ausführen, wenn man statt $\cos x : e^{ix}$ setzt und im Resultat den reellen Teil allein berücksichtigt. Das gibt

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{int - \frac{inx^2}{4a^2\alpha^2} - \alpha^2} \, d\alpha.$$

Wir ergänzen im Exponenten zu einem vollständigen Quadrat und setzen die von α freien Bestandteile vor das Integralzeichen:

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{int - \frac{\sqrt{in}}{a} x} \int_0^\infty e^{-\left(\alpha - \frac{\sqrt{in}}{2a\alpha} x\right)^2} \, d\alpha. \tag{63}$$

Wir schreiben hier zur Abkürzung $\varkappa^2 = \frac{\sqrt{in}}{2a} x$ und zerlegen die Integration in (63) in zwei Teile von 0 bis $\varkappa$ und von $\varkappa$ bis ∞.

Im ersten Integral setzen wir statt α die neue Integrationsvariable ξ, die definiert ist durch $\alpha = -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \varkappa^2}$, wodurch es übergeht in

$$\int_{\infty}^{0} e^{-\xi^2} d\left(-\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \varkappa^2}\right).$$

Im zweiten Integral setzen wir statt α die neue Integrationsvariable η, die definiert ist durch $\alpha = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} + \varkappa^2}$, wodurch es übergeht in

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\left(\frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} + \varkappa^2}\right).$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhalten wir

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi - \int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2} d\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \varkappa^2}\right) + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$$

$$+ \int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\left(\sqrt{\frac{\eta^2}{4} + \varkappa^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Benutzen wir schließlich die Identität $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, so ergibt sich für die e-Potenz in (63) vor dem Integralzeichen

$$e^{t\left(nt - \frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}x\right) - \frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}x}$$

und da hiervon für uns allein der reelle Teil in Betracht kommt,

$$u = C.e^{-\frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}x} \cos\left(nt - \frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}} \cdot x\right). \tag{64}$$

Dieser Ausdruck stellt nun aber, wie bekannt, eine fortschreitende harmonische Temperaturwelle vor mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $a\sqrt{2n}$, deren Amplitude mit der Tiefe in geometrischer Progression abnimmt.

Dieser Umstand gibt zunächst ein Mittel in die Hand, die Temperaturleitfähigkeit durch Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer harmonischen Temperaturänderung an der Körperoberfläche ins Innere eines Körpers zu messen. Man kann so z. B. die Wärmeleitfähigkeit der oberen Erdschichten bestimmen, die ja ebenfalls der Einwirkung einer periodischen Änderung der Oberflächentemperatur unterworfen

sind, indem man an der Oberfläche und in einer gewissen Tiefe des Erdbodens die Temperatur gleichzeitig registriert und die Phasenverschiebungen beider Perioden gemäß (64) zur Bestimmung von a ausnutzt.

Der Vorgang der Fortschreitung einer Wärme- oder Diffusionswelle ist dem Fortschreiten einer elastischen Welle sehr ähnlich, hat aber gegen den letzteren Prozeß einen tiefgreifenden Unterschied. Während

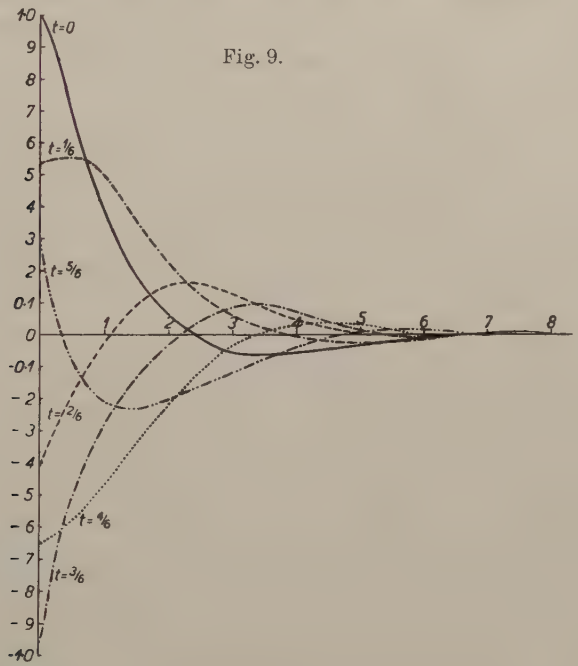


Fig. 9.

nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elastischen Welle bloß von den elastischen Eigenschaften des Mediums abhängt, sieht man aus (64), daß die Geschwindigkeit der Wärme- bzw. Diffusionswelle noch eine Funktion der Schwingungszahl ist. Man kann daher hier auch nicht, wie im Falle elastischer Wellen, die gefundenen Resultate ohne weiteres auf beliebige periodische Funktionen $\varphi(t)$ übertragen, indem man in (61) statt des cos einfach φ setzt, da sich die einzelnen harmonischen Wellen, aus denen man sich die allgemeine Welle zusammengesetzt denken kann, in verschiedener Weise verhalten. Es stellt sich vielmehr im allgemeinen Falle u als Summe einer Anzahl von Ausdrücken von der Form (64) dar

$$u = \sum_{\nu} A_\nu u_\nu,$$

wo die u_ν die den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Teile bezeichnen, die man aus (64) erhält, wenn man darin $u = u_\nu$ setzt, und die A_ν die Amplituden dieser Teilschwingungen sind.

In Fig. 9 sind für eine Anzahl von Zeiten die u als Funktionen von x eingetragen. Man sieht hier das Fortschreiten der Schwingungen mit der Zeit und ihre allmähliche Abnahme dabei.

Wie bereits erwähnt, sind die obigen Resultate anwendbar auf das Problem der Temperaturänderungen in den oberen Erdschichten, deren Oberfläche annähernd periodischen Temperaturänderungen unterliegt, wobei sich zwei einfache Periodizitäten, nämlich eine tägliche und eine jährliche überlagern.

Es werden ferner die Temperaturschwankungen in einer solchen Tiefe unmerklich werden, bei der der Exponent $\frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}x$ auf einen bestimmten Betrag ε angewachsen ist. Man sieht, daß das erst in um so größerer Tiefe der Fall sein wird, je kleiner die Schwingungszahl n ist; in genügender Tiefe also werden sich nur mehr sehr langsame, nicht mehr die raschen Schwingungen bemerkbar machen. Daraus erklärt sich z. B. die bekannte Erscheinung, daß in gewisser Tiefe unter der Erdoberfläche nicht mehr die täglichen, sondern nur mehr die jährlichen Temperaturschwankungen bemerkbar sind (Kellertemperatur), und daß in noch größerer Tiefe schließlich ständig ein und dieselbe Temperatur herrscht.

Wir können nun auch noch den Wärmefluß durch die Flächeneinheit der Oberfläche im Falle (64) ausrechnen gemäß $\mathfrak{Q}_x = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ und erhalten

$$(65)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_x = \dfrac{k\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}C.(\cos nt - \sin nt) = \dfrac{k\sqrt{n}}{a}C.\cos\left(nt + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \qquad = \sqrt{k\varrho\sigma.n}.C.\cos n\left(t + \dfrac{\tau}{8}\right). \end{cases}$$

Der Wärmefluß hat also dieselbe Periode wie die Oberflächentemperatur und ist ihr um $^1/_8$ der Schwingungsdauer τ in der Phase voraus.

Aus (65) erhalten wir für die gesamte Wärmemenge, die von dem Körper während einer halben Periode aufgespeichert wird,

$$(66)\qquad Q = 2\sqrt{\frac{k\varrho\sigma}{n}}.C,$$

also, wie unmittelbar einleuchtet, direkt proportional der Wärmekapazität des Körpers und um so größer, je kleiner die Schwingungszahl ist, also unmerklich klein, wenn die Schwingung außerordentlich rasch erfolgt.

Die Lösung (64) entspricht dem Temperaturverlauf nach Verstreichen einer sehr langen Zeit vom Beginn des Versuchs. Die allgemeine Lösung ist daraus leicht durch folgende Betrachtung zu finden: Setzen wir in (64) $t = 0$, so ergibt sich

$$\Phi(x) = e^{-\frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}x} \cos\left(\frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}x\right),$$

wir können also unsere Lösung auch als diesem Anfangszustand angepaßt auffassen. Wollen wir aber, wie in (54) angenommen, den Anfangszustand $\Phi(x) = 0$ haben, so müssen wir zu u gemäß dem in **1** auseinandergesetzten eine Funktion u_1 addieren, die zur Zeit $t = 0$ die Anfangsbedingung $\Phi_1(x) = -\Phi(x)$ erfüllt, und die an der Stelle $x = 0$ dauernd gleich Null ist. Eine solche Funktion haben wir aber in (4) bereits gefunden, mit deren Benutzung wir also erhalten

$$(67)\quad u_1 = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}\alpha} \cos\left(\frac{\sqrt{n}}{a\sqrt{2}}\alpha\right)\left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}}\right) d\alpha.$$

(67) läßt sich in reeller Form geschlossen ausdrücken, man sieht jedoch auch so schon dem Ausdruck an, daß er mit wachsender Zeit abklingt und schließlich nach sehr langer Zeit überall verschwindend klein wird.

11. Die Oberfläche ist ein Isolator. Die nun zu behandelnde Aufgabe, die bei allerhand physikalischen und technischen Problemen eine Rolle spielt, zeichnet sich dadurch aus, daß der wärmeleitende Körper an seiner Oberfläche wärmeundurchlässig oder adiabatisch ist, was man praktisch sehr nahe erreichen kann, wenn man ihn mit einer Hülle aus einem sehr schlechten Leiter umgibt. Handelt es sich um das analoge Diffusionsproblem, so lautet dieselbe Aufgabe so, daß das Medium, in welchem die Diffusion vor sich geht, mit einer Wand umschlossen ist, welche die diffundierende Substanz nicht hindurchläßt (aber auch nicht festhält), die also die Teilchen dieser Substanz „vollkommen reflektiert".

Mathematisch formuliert heißt das, daß die Normalkomponente des Wärme- bzw. Materiestroms an der Oberfläche verschwinden soll, oder

$$(68)\qquad \operatorname{grad}_n u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Im übrigen verfährt man bei der Lösung genau so, wie in **1**, nur mit dem Unterschied, daß an Stelle von $u = 0$ zu treten hat $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Man kann z. B. auch hier versuchen, so vorzugehen, daß man die Anfangsbedingung über die Berandung hinaus so fortsetzt, daß die

Oberflächenbedingung (68) für alle Zeiten identisch erfüllt ist. Nehmen wir beispielsweise wieder das lineare Problem her, wo der nach einer Seite unendlich weit erstreckte Körper an der Ebene $x = 0$ begrenzt ist, und setzen

$$\Phi(x) = \Phi(-x),$$

so muß für $x = 0$ wegen der spiegelbildlichen Symmetrie von Φ (68) erfüllt sein.

Wir gewinnen also unsere Lösung aus (4), wenn wir dort im zweiten Term + an Stelle von — setzen, also

$$(69)\quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \Phi(2\xi a\sqrt{t} + x) e^{-\xi^2} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \Phi(2\xi a\sqrt{t} - x) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Setzen wir hier wieder wie in § 3, **1** $\Phi(x) = C$, so erhalten wir die Trivialität

$$u = \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = C,$$

denn wenn wir einen gleichmäßig temperierten Körper in eine adiabatische Hülle schließen, so kann sich die Temperatur in ihm nach den Sätzen der Thermodynamik nicht mehr ändern. Analoges gilt für die Diffusion.

Den Fall des von zwei parallelen ebenen Wänden begrenzten homogenen Leiters kann man hier ebenfalls nach dem Muster von § 3, **1** behandeln, wenn man die allgemeine Lösung als Summe von Partikularlösungen von der Form

$$e^{-\left(\frac{a n \pi}{\alpha}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{\alpha} x$$

zusammensetzt, welche die Eigenschaft haben, an den Grenzen Null und α einen verschwindenden Temperaturgradienten zu liefern. Mit Benutzung der Fourierschen Reihe mit Kosinusgliedern erhalten wir so für u die zu (17) analoge Formel

$$(70)\quad u = \frac{2}{\alpha}\left\{\sum_0^{\infty} e^{-\left(\frac{a n \pi}{\alpha}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{n\pi x}{\alpha} \int_0^{\alpha} \Phi(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \Phi(\xi) d\xi \right\}.$$

Setzen wir hier wieder $\Phi(\xi) = C$, so erhalten wir wegen

$$\int_0^{\alpha} \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha} d\xi = 0$$

wieder die triviale Lösung $u = C$, wie oben näher erläutert wurde.

Betrachten wir als Beispiel genauer das folgende Diffusionsproblem: Die Lösung sei in ein Gefäß mit zwei parallelen Wänden im Abstand 2α

eingeschlossen, welche die gelöste Substanz „vollkommen reflektieren". Zur Zeit $t = 0$ soll die eine Hälfte des Gefäßes von $x = 0$ bis $x = \alpha$ die Konzentration C und die andere Hälfte die Konzentration 0 haben; wie verteilt sich c als Funktion von x und t?

Setzen wir die Anfangsbedingungen

$$(71)\quad \Phi(\xi) = C \quad \text{für} \quad 0 < \xi < \frac{\alpha}{2}, \quad \Phi(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \frac{\alpha}{2} < \xi < \alpha$$

in (70) ein, so ergibt sich, wenn wir nachträglich statt $\alpha : 2\alpha$ setzen,

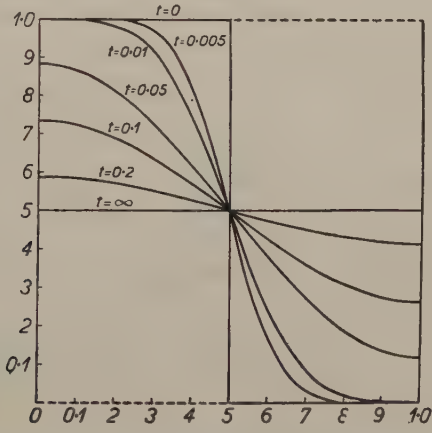
$$\int_0^{2\alpha} \Phi(\xi) \cos\frac{n\pi}{2\alpha}\xi \, . \, d\xi = \frac{2\alpha}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2} \cdot C \quad \text{und} \quad \int_0^{2\alpha} \Phi(\xi)\, d\xi = C\alpha,$$

also

$$(72)\qquad c = \frac{C}{2}\left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-D\left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi}{2\alpha} x \sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Die Funktion (72) ist für verschiedene t in Fig. 10 graphisch dargestellt, man sieht eine gewisse Analogie zu dem § 2, **1**, (92) behandelten Falle.

Fig. 10.



Das dort beschriebene Grundexperiment der Diffusion wird, da es sich ja immer um endliche Gefäße handelt, durch die hier gegebene Lösung genauer dargestellt als dort.

Nehmen wir statt (71) die folgende Anfangsbedingung, die eine gewisse Analogie zu der auf S. 212 behandelten Aufgabe hat. Es sei

$$(73)\quad \begin{cases} \Phi(\xi) = 0 & \text{für} \quad 0 < \xi < \alpha - 1 \quad \text{und} \quad \alpha + 1 < \xi < 2\alpha, \\ \Phi(\xi) = 1 & \text{für} \quad \alpha - 1 < \xi < \alpha + 1. \end{cases}$$

Dann erhalten wir aus (70) ähnlich wie oben bei c die folgende Formel:

$$(74)\qquad c = \frac{1}{\alpha} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-D\left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{2\alpha} \sin\frac{n\pi}{2\alpha} \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Für $t = \infty$ erhalten wir hier $c = 1/\alpha$, da die Substanz erhalten bleibt und sich im Gefäß gleichmäßig verteilt.

12. An der Oberfläche des Körpers findet äußere Leitung statt. Wir gehen nun dazu über, Probleme der Wärmeleitung zu behandeln, die der Bedingung unterliegen, daß an der Oberfläche der Leiter „äußere Wärmeleitung" gegen eine Umgebung von der Temperatur Null derart stattfindet, daß an der Grenze der Wärmeaustausch ausschließlich durch äußere Leitung zustande kommt. Die Oberflächenbedingung lautet dann nach § 1, (8)

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = hu. \tag{75}$$

Wir versuchen als erstes Beispiel wieder wie früher die Lösung für den Fall eines Körpers, der den positiven Halbraum $x > 0$ isotrop und homogen erfüllt. Wiederum soll der Zustand nur von der x-Koordinate abhängen. Für $t = 0$ sei die Temperatur durch $\Phi(x)$ gegeben für $x > 0$. Wir wollen hier wiederum versuchen, ob sich die Grenzbedingung für $x = 0$ nicht durch geeignete Fortsetzung der Funktion Φ ins negative Gebiet befriedigen läßt.

Gemäß § 2, (7) setzen wir die Lösung an in der Form

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \left(\Phi(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} + \Phi(-\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}}\right) d\alpha. \tag{76}$$

Bilden wir daraus $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty [\Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)]\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}} \frac{\alpha\, d\alpha}{2a^2t}$$

und

$$u(0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty [\Phi(\alpha) + \Phi(-\alpha)]\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}} d\alpha.$$

Das erste Integral formen wir durch partielle Integration um gemäß

$$\frac{1}{2a^2t}\int_0^\infty R(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}} \alpha\, d\alpha = -R(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty R'(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}} d\alpha$$

$$= R(0) + \int_0^\infty R'(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}} d\alpha.$$

Nehmen wir an, daß Φ im Punkte $x = 0$ stetig ist, so wird hier $R(0) = 0$ und wir erhalten durch Einsetzen in (75)

$$(77)\qquad \left\{ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2 t}} \left\{ \frac{d}{d\alpha}[\Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)] - \frac{h}{k}[\Phi(\alpha) + \Phi(-\alpha)] \right\} d\alpha = 0.$$

Damit dies für alle t verschwindet, muß der Ausdruck in der geschlungenen Klammer verschwinden, was für $\Phi^*(\alpha) = \Phi(-\alpha)$ die folgende Differentialgleichung ergibt

$$\frac{d\Phi^*(\alpha)}{d\alpha} + \frac{h}{k}\Phi^*(\alpha) = \Phi'(\alpha) - \frac{h}{k}\Phi(\alpha).$$

Ihre Lösung lautet nach 1. Bd., VI, § 2, 2

$$(78)\qquad \Phi^*(\alpha) = e^{-\frac{h}{k}\alpha}\left\{ \int_0^\alpha e^{\frac{h}{k}\xi}\left[\Phi'(\xi) - \frac{h}{k}\Phi(\xi)\right] d\xi + \text{konst} \right\},$$

worin für die Konstante wegen der Stetigkeit im Punkte $\alpha = 0$: $\Phi(0)$ zu setzen ist. Das Integral

$$\int_0^\alpha e^{\frac{h}{k}\xi}\Phi'(\xi)\, d\xi$$

formen wir durch partielle Integration um und erhalten

$$\int_0^\alpha e^{\frac{h}{k}\xi}\Phi'(\xi)\, d\xi = e^{\frac{h}{k}\xi}\Phi(\xi)\Big|_0^\alpha - \frac{h}{k}\int_0^\alpha \Phi(\xi)\, e^{\frac{h}{k}\xi}\, d\xi.$$

Dies in (78) eingesetzt, liefert für $\Phi(-\alpha)$ die Gleichung

$$(79)\qquad \Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha) - 2\frac{h}{k}e^{-\frac{h}{k}\alpha}\int_0^\alpha \Phi(\xi)\, e^{\frac{h}{k}\xi}\, d\xi.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (76) ein, so erhalten wir die gewünschte Lösung unseres Problems für einen beliebigen Anfangszustand.

Untersuchen wir auch hier wieder den Spezialfall $\Phi(\alpha) = C$, wo C eine Konstante ist, näher. Aus (79) folgt dann für $\Phi(-\alpha)$

$$\Phi(-\alpha) = C(2e^{-\frac{h}{k}\alpha} - 1),$$

also nach (76)

$$u = \frac{C}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha - \int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha + 2\int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2 t} - \frac{h}{k}\alpha}\, d\alpha \right\}$$

Zur Vereinfachung führen wir in diesen drei Integralen neue Variable ein, indem wir setzen: im ersten Integral

$$\frac{\alpha - x}{2a\sqrt{t}} = \xi,$$

im zweiten Integral

$$\frac{\alpha + x}{2a\sqrt{t}} = \xi.$$

Im letzten Integral ergänzen wir den Exponenten zu einem vollständigen Quadrat, so daß er die Gestalt annimmt

$$-\left\{\frac{1}{4a^2t}\left(\alpha + x + \frac{2a^2h}{k}t\right)^2 - \frac{a^2h^2}{k^2}t - \frac{h}{k}x\right\}$$

und setzen darin

$$\frac{\alpha + x + \frac{2a^2h}{k}t}{2a\sqrt{t}} = \xi.$$

Es reduzieren sich so alle Integrale auf das Fehlerintegral § 2, (11) und wir erhalten schließlich

$$(80)\quad u = C\left\{\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{a^2h^2}{k^2}t + \frac{h}{k}x}\left[1 - \psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \frac{ah}{k}\sqrt{t}\right)\right]\right\}.$$

Fig. 11 stellt in gewohnter Weise die Funktion (80) graphisch für eine Anzahl von Zeiten dar. Sie weist, wie man sieht, große Ähnlichkeiten mit Fig. 6 auf, unterscheidet sich aber von ihr namentlich in der Nähe von $x = 0$. Die Oberflächentemperatur erhält man daraus, indem man $x = 0$ setzt:

$$(81)\quad u(0) = Ce^{\frac{a^2h^2}{k^2}t}\left[1 - \psi\left(\frac{ah}{k}\sqrt{t}\right)\right].$$

Für große Werte des Argumentes kann man annähernd setzen

$$\sqrt{\pi}\,(1 - \psi(x)) = \frac{1}{x}e^{-x^2},$$

also

$$(82)\quad \lim_{t=\infty} u(0) = U = \frac{kC}{ah\sqrt{\pi t}}.$$

Nach genügend langer Zeit also verläuft die Temperatur an der Oberfläche umgekehrt proportional der Wurzel aus der Zeit, nimmt also immer langsamer ab.

Wir fragen noch nach der Größe des Temperaturgradienten an der Oberfläche. Aus der Grenzbedingung (75) entnehmen wir

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{h}{k}u(0),$$

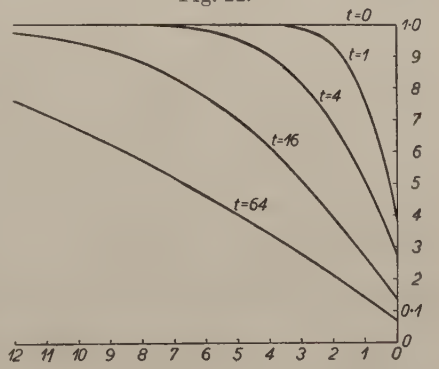
also wieder für den Grenzfall eines sehr großen t

$$U'_x = \frac{C}{a\sqrt{\pi t}}, \tag{83}$$

also ebenfalls umgekehrt proportional $\sqrt{t}$ und bemerkenswerterweise bloß abhängig vom Temperaturleitvermögen, nicht aber von der äußeren und inneren Wärmeleitfähigkeit.

Von Formel (83) hat Thomson eine einfache Anwendung gemacht, um auf das Alter der festen Erdkruste zu schließen. Solange sich die Erde im flüssigen Zustand befand, wurden die äußersten Schichten durch Strahlung abgekühlt und sanken, hierdurch schwerer geworden, in die Tiefe, wo sie sich wieder erwärmten. Auf diese Weise blieb die Temperatur der ganzen Erde konstant, bis zu dem Augenblick, wo an der Oberfläche Erstarrung eintrat. Die so gebildete feste Schicht mußte sehr rasch in die Tiefe wachsen und bald eine solche Dicke erlangen, daß für einen nicht zu großen Oberflächenbereich die Bedingungen dieses Abschnittes erfüllt waren. Da seit der Bildung einer festen Erdkruste sicher eine sehr lange Zeit verflossen ist, können wir die Formel (83) für den Gradienten der Temperatur an der Oberfläche anwenden. Dieser Gradient ist aus Messungen der Zunahme der Temperatur mit der Tiefe annähernd bekannt und beträgt ungefähr 1° C auf 25 m. Andererseits kennt man die Wärmeleitfähigkeit der Erdschichten ungefähr. Die Anfangstemperatur ist nach dem Obigen gleich der Schmelztemperatur der hauptsächlichsten Gesteine der Erdrinde und beträgt schätzungsweise 4000° C. So ergibt sich für die gesuchte Zeit größenordnungsgemäß 100 Millionen Jahre, was mit verschiedenen geologischen Schätzungen in gutem Einklang steht.

Fig. 11.



13. Diffusion durch ein Diaphragma. Wir können unsere Formeln (80) bis (83) auch zur Lösung eines interessanten Diffusionsproblems benutzen, das sich wie folgt formulieren läßt. Wir denken uns, wie in § 2, **1**, zwei Lösungen von den Konzentrationen C und 0 in einem unendlich langen Zylinder übereinandergeschichtet, aber so, daß sich die beiden Flüssigkeiten an der Ebene $x = 0$ nicht unmittelbar berühren, sondern dort durch eine poröse Wand voneinander getrennt

sind, welche dem Durchtreten der gelösten Substanz einen gewissen Widerstand entgegensetzt.

Infolge der Stetigkeit des Diffusionsflusses in der Ebene $x = 0$ müssen laut § 1, (19) und (23) die beiden Gleichungen bestehen

$$D\frac{\partial c_1}{\partial x} = D^*(c_1 - c_2) = -D\frac{\partial c_2}{\partial x}. \tag{84}$$

Es leuchtet aus Symmetriegründen ein, daß die Funktionen c_1 und c_2 um den Wert $C/2$ symmetrisch sein werden, also die Gleichung

$$c_2(x) = -c_1(x) + C$$

bestehen wird, was unseren Grenzbedingungen (84) entspricht, wenn wir setzen

$$\frac{\partial c_1}{\partial x} = \frac{D^*}{D}(2c_1 - C). \tag{85}$$

Diese Grenzbedingung ist aber formal identisch mit (75), wenn wir u durch $2c_1 - C$ und $\frac{h}{k}$ durch $2\frac{D^*}{D}$ ersetzen, und wir können daher die gesuchte Lösung aus Formel (80) unmittelbar entnehmen. Sie lautet

$$c_1 = \frac{C}{2}\left\{\psi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + e^{\frac{4D^{*2}}{D}t + \frac{2D^*}{D}x}\left[1 - \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} + \frac{2D^*}{\sqrt{D}}\sqrt{t}\right)\right]\right\} + \frac{C}{2}. \tag{86}$$

Wie zu erwarten war, hängt die Ausbreitung der Konzentration wesentlich von der Größe D^* der Durchlässigkeit der porösen Scheidewand ab. Machen wir die Wand ganz undurchlässig, also $D^* = 0$, so wird

$$c_1 = C \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad c_2 = 0 \quad \text{für} \quad x < 0,$$

wie zu erwarten war, da ja die beiden Flüssigkeiten völlig voneinander geschieden sind.

Ist im Gegenteil die Wand völlig durchlässig, so ist wegen (84) $D^* = \infty$. Man sieht leicht, daß in diesem Falle der zweite Term in der geschlungenen Klammer verschwindet und es bleibt

$$c_1 = \frac{C}{2}\left[1 + \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \text{ für } x > 0;\ c_2 = \frac{C}{2}\left[1 - \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \text{ für } x < 0,$$

was mit Formel (12), § 2, die für den Fall abgeleitet war, daß die Wand überhaupt fehlt, wie man sieht, völlig übereinstimmt.

Die durch die Wand pro Zeiteinheit hindurchtretende Substanzmenge ergibt sich aus $Q = D\left(\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)_{x=0}$ zu

$$Q = C.D^* e^{\frac{4D^{*2}}{D}t}\left[1 - \psi\left(\frac{2D^*}{\sqrt{D}}\sqrt{t}\right)\right] \tag{87}$$

und die an der Wand herrschende Konzentrationsdifferenz beträgt nach

$$(84)\quad (c_1 - c_2)_{x=0} = \frac{Q}{D^*}.$$

Für große t geht dieser Ausdruck über in

$$(88)\quad \lim_{t=\infty}(c_1 - c_2) = \frac{C}{2D^*}\sqrt{\frac{D}{\pi t}}.$$

14. Dasselbe Problem in zwei Dimensionen. Besprechen wir nunmehr das Problem von S. 234 in zwei Dimensionen. Wir denken uns den Körper etwa als Zylinder von sehr großer Länge und nehmen an, daß die Temperatur eine Funktion der Entfernung r des Aufpunktes von der Achse des Zylinders sei, wie wir es bereits in § 3, **1** angenommen hatten. Diesmal soll jedoch die Zylinderoberfläche durch äußere Wärmeleitung mit einer Umgebung von der Temperatur T in Verbindung stehen, ferner soll im Innern des Zylinders ständig Wärme erzeugt werden, und zwar pro Volumeneinheit überall die konstante Menge A pro Sekunde. Die Abhängigkeit von ϱ und σ von der Temperatur sei vernachlässigbar klein. Wir suchen die Lösung für den stationären Fall, der sich jedenfalls nach genügend langer Zeit von selbst einstellen wird, wie physikalisch einleuchtet.

Die Differentialgleichung lautet dann für diesen Fall gemäß (14), § 1

$$(89)\quad \Delta u + \frac{A}{k} = 0$$

oder wegen der Abhängigkeit von r allein

$$(90)\quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{A}{k} = 0.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung für du/dr, deren Lösung nach Teil I, Kap. VI, § 2, **2** allgemein lautet

$$(91)\quad \frac{du}{dr} = e^{-\int \frac{dr}{r}}\left(C - \int \frac{A}{k} e^{\int \frac{dr}{r}} dr\right).$$

Soll in der Achse der Temperaturgradient endlich bleiben, so muß $C = 0$ sein. Daraus erhalten wir

$$u = -\frac{A}{4k} r^2 + C',$$

wo C' nun so zu bestimmen ist, daß die Oberflächenbedingung

$$(92)\quad \frac{du}{dr} = \frac{h}{k}(u - U) \quad \text{für } r = R$$

erfüllt ist, also

$$C' = -\frac{A}{2h} R + \frac{A}{4k} R^2 + U$$

und schließlich

$$u = U - \frac{A}{2h} R + \frac{A}{4k} (R^2 - r^2). \tag{93}$$

Eine wichtige Anwendung dieser Formel ist die Berechnung der Temperaturverteilung in einem Draht, der als elektrischer Stromleiter dient und der daher durch Joulesche Wärme ständig erhitzt wird. Die Formel lehrt uns, welche Temperatur der Draht annimmt, wenn ein bestimmter Strom durch ihn hindurchgeht, und welche Temperatur er irgendwo im Innern, z. B. in der Achse besitzt, wenn die Temperatur an der Oberfläche bekannt ist. Die erstere ist natürlich immer die größere, und zwar, wie Formel (93) lehrt, um den Betrag $\frac{A}{4k} R^2$.

Wir schließen hieran gleich die Besprechung eines zweiten Beispiels stationärer Wärmeleitung, das folgendermaßen definiert sei: Ein unendlich langes zylindrisches Rohr vom inneren Radius R_1 und dem äußeren Radius R_2 werde innen auf der konstanten Temperatur C gehalten und möge außen gegen eine Umgebung von der Temperatur Null strahlen. Zu suchen ist die Temperaturverteilung innerhalb des Rohres und die pro Sekunde ausgestrahlte Wärmemenge.

Wir benutzen den obigen Ansatz (90), in dem $A = 0$ zu setzen ist und erhalten die allgemeine Lösung mit einem logarithmischen Potential

$$u = \lambda_1 \log r + \lambda_2. \tag{94}$$

Da wegen der Grenzbedingungen die Gleichungen

$$C = \lambda_1 \log R_1 + \lambda_2,$$

$$\frac{\lambda_1}{R_2} = \frac{h}{k} (\lambda_1 \log R_2 + \lambda_2)$$

gelten, lassen sich λ_1 und λ_2 bestimmen, und für u ergibt sich

$$u = C \left(1 + \frac{\log \frac{r}{R_1}}{\log \frac{R_1}{R_2} + \frac{k}{R_2 h}} \right). \tag{95}$$

Daraus bekommen wir die Oberflächentemperatur für $r = R_2$

$$u(R_2) = C \frac{1}{\frac{R_2 h}{k} \log \frac{R_1}{R_2} + 1} \tag{96}$$

und die pro Sekunde aus der Flächeneinheit der Oberfläche ausgestrahlte Wärmemenge

$$|\mathfrak{Q}| = h \cdot u(R_2) = \frac{hC}{\frac{R_2 h}{k} \log \frac{R_1}{R_2} + 1}. \tag{97}$$

Diese Formel kann unter anderem dazu dienen, die Wärmeausstrahlung von zylindrischen Heizkörpern bei Warmwasser- oder Dampfheizungen zu bestimmen, die im Innern durch die hindurchströmende Flüssigkeit auf konstanter Temperatur, der Heiztemperatur gehalten werden und nach außen gegen die Umgebung strahlen. C bedeutet dann die Temperaturdifferenz zwischen Heiztemperatur und Außentemperatur.

15. Wärmeleitung in einem Stab. Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Problem in drei Dimensionen über.

Eine sehr bemerkenswerte Vereinfachung dieser Aufgabe erhalten wir dann, wenn der Körper die Form eines Stabes hat, dessen Querschnittsdimensionen klein sind gegenüber seiner Länge, ein Fall, der praktisch sehr oft vorkommt. Wir brauchen uns dabei nicht auf einen geraden Stab zu beschränken, dieser kann vielmehr eine beliebige gekrümmte Form haben, er kann auch in sich geschlossen sein, also einen Ring bilden[1]).

Wir nehmen an, daß überall längs des Stabes der Querschnitt desselben die gleiche Größe und Gestalt habe; wir nennen die Größe des Querschnittes q und seinen Umfang p. Durch irgendwelche korrespondierende Punkte, beispielsweise die Schwerpunkte aller dieser Querschnitte legen wir eine Leitlinie für den Stab, auf der wir uns einen Maßstab aufgetragen denken. Wir nennen die Länge, gemessen an diesem Maßstab von irgend einem beliebigen Anfangspunkt aus, l, das Element dieser Länge dl. Äußere Wärmeleitung finde an der ganzen Oberfläche statt gegen eine Umgebung von der Temperatur Null. Wir wollen versuchen, diese äußere Leitung bereits in die Differentialgleichung der Wärmeleitung aufzunehmen.

Zu diesem Zweck schneiden wir uns aus dem Stab durch zwei Querschnitte im Abstand dl ein Stück heraus, dessen Volumen dann bis auf Größen, die klein von höherer Ordnung sein werden, gleich ist qdl. Die Mantelfläche dieses Elementarzylinders ist gleich pdl. Die Gleichung für die Wärmebilanz in diesem Volumenelement lautet dann analog zu § 1, 2

$$\varrho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}qdl = k\Delta u.qdl - hupdl$$

oder, wenn wir u als nur längs der Leitlinie veränderlich ansehen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} - b^2u, \quad \frac{k}{\varrho\sigma} = a^2, \quad \frac{hp}{\varrho\sigma q} = b^2. \tag{98}$$

Wir führen hier statt u die neue abhängige Veränderliche v ein durch die Beziehung

$$u = e^{-b^2t}.v. \tag{99}$$

[1]) Kirchhoff, „Vorlesungen über die Theorie der Wärme", S. 25 ff. Leipzig 1894.

Setzen wir dies in (98) ein, so erhalten wir für v die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial l^2}, \tag{100}$$

die mit (1) formal völlig identisch ist. Durch diesen Kunstgriff lassen sich also alle auf einen dünnen Stab mit äußerer Wärmeleitung bezüglichen Probleme nach den in den § 2, **1**; § 3, **1**, **3**, **4**, **5** entwickelten Methoden behandeln.

Besonders einfach erledigt sich das stationäre Problem. Setzen wir in (98) $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, so kommt es auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$a^2 \frac{d^2 u}{d l^2} - b^2 u = 0 \tag{101}$$

an, die mit der Gleichung der elastischen Schwingung identisch ist und die allgemeine Lösung

$$u = A e^{\beta l} + B e^{-\beta l} \tag{102}$$

besitzt, wenn wir zur Abkürzung $b^2/a^2 = \beta$ setzen. Die Konstanten ergeben sich aus den Grenzbedingungen. Soll z. B. für $l = 0$: $u = 0$ sein und für $l = L$: $u = U$, so erhalten wir

$$u = U \frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta L} - e^{-\beta L}} = U \frac{\mathfrak{Sin}\, \beta l}{\mathfrak{Sin}\, \beta L}. \tag{103}$$

Auf diese Formel gründet sich eine einfache Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit. Bringt man einen Stab aus dem zu untersuchenden Material an den beiden Enden durch Wasserdampf oder strömendes Wasser oder Eis auf konstante Temperaturen und mißt, nachdem eine entsprechend lange Zeit verflossen ist, die Temperatur längs des Stabes durch Thermometer oder Thermoelemente, so kann man mit Hilfe von Gl. (103) β und damit, wenn man h etwa durch anderweitige Versuche kennt, auch a und k bestimmen.

Wie bereits oben erwähnt, können wir auch annehmen, daß der Stab in sich geschlossen sei und haben dann das Problem der Wärmeleitung in einem sehr dünnen Ring von beliebiger Gestalt vor uns. Der Umfang des betrachteten Ringes sei, gemessen längs der Leitlinie l, gleich L. Wir brauchen dann bloß eine Lösung der Differentialgleichung (98) zu finden, welche die Eigenschaft haben muß, in l periodisch zu sein. Denn damit u eine eindeutige Funktion des Ortes auf dem Ring sei, muß beim Fortschreiten längs l um die Strecke L die Funktion immer wieder dieselben Werte annehmen.

In § 2, **1** haben wir die partikulären Lösungen

$$v' = A e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda l \quad \text{und} \quad v'' = B e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda l$$

der Differentialgleichung (100) kennengelernt, die, in (99) eingesetzt, für u liefern

$$u' = A e^{-\mu t} \sin \lambda l, \quad u'' = B e^{-\mu t} \cos \lambda l, \tag{104}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\mu = b^2 + a^2 \lambda^2. \tag{105}$$

Sollen diese Funktionen periodisch nach l mit der Periode L sein, so muß λ einem der Werte

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{L} \tag{106}$$

gleichgesetzt werden, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Aus (104) erhalten wir durch Einsetzung willkürlicher Werte für die A und B und Summation über n die entsprechende allgemeine Lösung

$$u = \sum_n e^{-\mu_n t} \{A_n \sin \lambda_n l + B_n \cos \lambda_n l\}. \tag{107}$$

Diese Lösung können wir in gewohnter Weise einer beliebigen Anfangsbedingung $u = \Phi(l)$ anpassen, indem wir die A_n und B_n entsprechend wählen, die, wie man sieht, nichts anderes sind als die Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $\Phi(l)$ nach einer Reihe von sin und cos. Damit haben wir also unser Problem in aller Allgemeinheit gelöst.

Für $t = \infty$ wird natürlich überall $u = 0$, da dann alle Wärme nach außen abgeleitet worden ist. Für sehr große t können wir in (107) alle Glieder gegen das nullte und das erste wegen des sehr starken Anwachsens des Exponenten $\mu_n t$ mit n vernachlässigen. Es wird also

$$\lim u = e^{-b^2 t} B_0 + e^{-\left(b^2 + \frac{4\pi^2 a^2}{L^2}\right) t} \left(A_1 \sin \frac{2\pi l}{L} + B_1 \cos \frac{2\pi l}{L}\right). \tag{108}$$

Mißt man die Temperatur u an zwei Stellen des Ringes, die um den halben Umfang voneinander entfernt sind, also z. B. an den Punkten $l = 0$ und $l = L/2$, so erhalten wir aus (108)

$$\begin{cases} \dfrac{u(0) + u\left(\frac{L}{2}\right)}{2} = B_0 e^{-b^2 t} \\ \dfrac{u(0) - u\left(\frac{L}{2}\right)}{2} = B_1 e^{-\left(b^2 + \frac{4\pi^2 a^2}{L^2}\right) t}. \end{cases} \tag{109}$$

Durch Messung der Zeitabhängigkeit dieser Ausdrücke kann man also die Exponenten der beiden e-Potenzen und damit a und b, also auch k und h, die äußere und innere Wärmeleitfähigkeit bestimmen.

16. Abkühlung eines Prismas. Hat der Stab einen rechteckigen Querschnitt, so kann man das Problem der Wärmeleitung in demselben auch ganz allgemein behandeln[1]), ohne die Vernachlässigungen von S. 241.

Der betrachtete Körper ist dann ein homogenes und isotropes Parallelepiped, dessen Kanten wir den drei Koordinatenachsen x, y, z parallel laufend annehmen. Wir haben also dann eine Lösung der Differentialgleichung (13), § 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{110}$$

zu suchen unter den Bedingungen

$$\begin{cases} u = \Phi(x, y, z) \quad \text{für} \quad t = 0 \\ \text{und} \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{h}{k} u \end{cases} \tag{111}$$

an der Oberfläche.

Wir versuchen, die Lösung anzusetzen in der Form

$$a = T . X . Y . Z, \tag{112}$$

wo T, X, Y, Z beziehungsweise Funktionen von t, x, y, z allein bezeichnen. Dann ist nach § 2, **1**

$$T = A e^{-a^2 \lambda^2 t} \tag{113}$$

und für X, Y, Z ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda^2, \tag{114}$$

die für alle Werte von x, y, z erfüllt sein soll. Das ist nur dann möglich, wenn jeder der drei Summanden auf der linken Seite der Gleichung einzeln gleich einer Konstanten ist, die wir bzw. $-\lambda_x^2$, $-\lambda_y^2$, $-\lambda_z^2$ nennen wollen. Zwischen den λ besteht die Relation

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = \lambda^2.$$

X muß also der Differentialgleichung genügen

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda_x^2 X = 0,$$

die wir gemäß 1. Bd., VI, § 2, **3** lösen in der Form

$$X = A_x \cos(\lambda_x . x) + B_x \sin(\lambda_x x). \tag{115}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für Y und Z.

[1]) Kirchhoff, „Vorlesungen über die Theorie der Wärme", S. 25 ff. Leipzig 1894.

Wir nehmen an, daß der eine Eckpunkt unseres Parallelepipeds im Koordinatenursprung liegt und die Kanten die Länge l_x, l_y, l_z haben. Dann gelten nach (111) folgende Grenzbedingungen:

$$\text{für} \quad x = 0 \quad \frac{dX}{dx} = \frac{h}{k} X,$$

$$\text{für} \quad x = l_x \quad \frac{dX}{dx} = -\frac{h}{k} X.$$

Dadurch wird (115) auf folgende Weise bestimmt:

$$X = A_x \left\{ \cos(\lambda_x . x) + \frac{h}{k\lambda_x} \sin(\lambda_x . x) \right\}, \tag{116}$$

wo A_x beliebig ist und λ_x eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg}(\lambda_x l_x) = \frac{2hk . \lambda_x}{k^2\lambda_x^2 - h^2} \tag{117}$$

ist. Analoge Ausdrücke gelten für Y und Z.

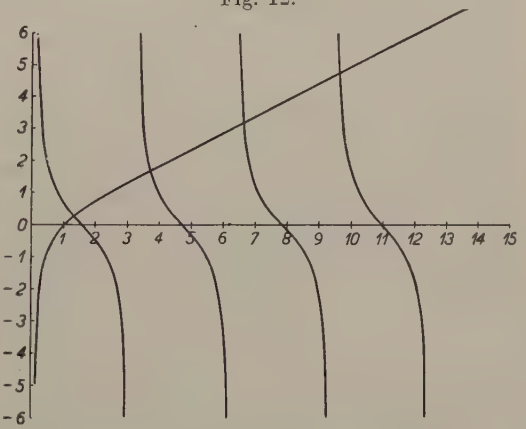
Die transzendente Gl. (117) hat unendlich viele reelle Wurzeln, was man am einfachsten mittels folgender geometrischer Überlegung einsieht, die auch zur Berechnung dieser Wurzeln dienen kann. Wir setzen

$$\mu_x = \operatorname{cotg}(\lambda_x l_x)$$

und $$\mu_x = \frac{k^2\lambda_x^2 - h^2}{2hk\lambda_x}$$

und tragen uns die beiden Funktionen μ_x und μ_x' von λ_x in einem und demselben Koordinatensystem als Kurven auf (Fig. 12). $\mu'(\lambda)$ ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und welche die beiden Asymptoten

Fig. 12.



$$\lambda_x = 0 \quad \text{und} \quad \mu_x' = \frac{k}{2h} \lambda_x$$

hat, und $\mu(\lambda)$ ist die bekannte tg-Kurve. Offenbar haben diese beiden Kurven unendlich viele Schnittpunkte, und zwar auf der negativen Seite dem Absolutwert nach die gleichen, wie auf der positiven Seite. Die zu diesen Schnittpunkten gehörigen λ_x sind die Wurzeln der transzendenten Gl. (117), von denen wir bloß, die positiven berücksichtigen, da, wie man aus Gl. (116) sieht, $X(-\lambda) = X(\lambda)$. Wir denken uns

die Wurzeln der Größe nach geordnet und bezeichnen sie mit $\lambda_x^{(1)}, \lambda_x^{(2)}, \ldots, \lambda_x^{(\nu)}, \ldots$ Analog erhält man die $\lambda_y^{(\nu)}$ und die $\lambda_z^{(\nu)}$.

Ein allgemeines Integral u von (110) erhalten wir nun in gewohnter Weise, indem wir in die Ausdrücke (113), (116) alle möglichen Werte von λ eingesetzt denken und die mit willkürlichen Koeffizienten versehenen dreifachen Summen von (112) bilden:

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} u = \sum_\iota \sum_\varkappa \sum_\nu A_{\iota\varkappa\nu}\, e^{-a^2\left(\lambda_x^{(\iota)2} + \lambda_y^{(\varkappa)2} + \lambda_z^{(\nu)2}\right)t} \\ \cdot\left[\cos\left(\lambda_x^{(\iota)} x\right) + \frac{h}{k\lambda_x^{(\iota)}} \sin\left(\lambda_x^{(\iota)} x\right)\right]\left[\cos\left(\lambda_y^{(\varkappa)} y\right) + \frac{h}{k\lambda_y^{(\varkappa)}} \sin\left(\lambda_y^{(\varkappa)} y\right)\right] \\ \cdot\left[\cos\left(\lambda_z^{(\nu)} z\right) + \frac{h}{k\lambda_z^{(\nu)}} \sin\left(\lambda_z^{(\nu)} z\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Nun hat man noch die Anfangsbedingungen zu erfüllen, was immer dann möglich sein wird, wenn sich die Funktion $\Phi(x, y, z)$ in eine Reihe von der Form

$$(119)\qquad \Phi(x, y, z) = \sum_\iota \sum_\varkappa \sum_\nu A_{\iota\varkappa\nu} X_\iota Y_\varkappa Z_\nu$$

entwickeln läßt. Die Koeffizienten A werden, falls diese Entwicklung möglich ist, nach einer der Fourierschen ganz ähnlichen Methode mit Hilfe einfacher Orthogonalitätseigenschaften berechnet.

Die Lösung dieses und ähnlich lautender Probleme der Abkühlung warmer Körper durch Strahlung erscheint für die Technik von großer Bedeutung. So z. B. kann man nach dem Obigen die Abkühlungsgeschwindigkeit in irgend einem Punkte eines parallelepipedischen Gußstückes berechnen. Für andere Formen stößt die analytische Behandlung jedoch im allgemeinen auf große Schwierigkeiten, bis auf den Fall der Kugel, der sich ähnlich behandeln läßt, wie in § 3, **1** gezeigt wurde. Auch auf das Ellipsoid wurde eine ähnliche Methode angewendet.

Siebentes Kapitel.

Erzwungene Wärmeleitung und Diffusion.

§ 1. Grundbegriffe und Differentialgleichungen.

1. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung mit Konvektionsströmung. Im vorigen Kapitel haben wir uns auf die Wärmeleitung in einem festen Körper beschränkt. Hier wollen wir die Annahme der Starrheit des Körpers fallen lassen und eine Bewegung der einzelnen Teile des Körpers gegeneinander zulassen, wie es in einer Flüssigkeit oder in einem Gase der Fall ist.

Infolge dieses Umstandes nun wird aber zu der Wärmeströmung infolge von Leitung, wie beim festen Körper, noch eine andere Wärmeströmung hinzukommen, dadurch, daß die strömende Materie infolge ihrer Wärmekapazität endliche Wärmemengen mit sich führt. Diesen Vorgang pflegt man gewöhnlich Wärmekonvektion zu nennen.

Diese Konvektion kann nun wiederum entweder äußere Ursachen haben, indem durch irgendwelche äußeren Kräfte die Flüssigkeit zum Strömen gebracht wird, es kann aber auch sein, daß durch die Verschiedenheiten der Temperatur in der Flüssigkeit und die dadurch bewirkten Dichteänderungen von Punkt zu Punkt Kräfte geweckt werden, die ihrerseits wieder eine Bewegung der Flüssigkeit und damit eine Wärmekonvektion hervorrufen.

Wir wollen nun die Differentialgleichung aufstellen, welche dem Vorgang der Wärmeleitung mit Konvektion entspricht. Es sei $\mathfrak{v}$ der Vektor der Stromgeschwindigkeit, der im allgemeinen eine Funktion des Ortes und der Zeit sein wird. Dann ist die Dichte des Materiestromes gleich $\varrho\,\mathfrak{v}$ und die von ihm fortgeführte Wärmemenge $\varrho\sigma u\,.\,\mathfrak{v}$. Der gesamte Wärmestrom $\mathfrak{Q}$ ist daher gleich

$$\mathfrak{Q} = -k\,\mathrm{grad}\,u + \varrho\sigma u\,.\,\mathfrak{v}, \tag{1}$$

was wir an Stelle von (4) in VI, § 1, 2 zu benutzen haben. Darin haben wir nun aber auch die Dichte ϱ als Funktion von Ort und Zeit zu betrachten. Wir erhalten

$$\sigma\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\mathfrak{Q} = \mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\,u) - \sigma\,\mathrm{div}\,(\varrho u\,.\,\mathfrak{v}). \tag{2}$$

Die innere Wärmeleitfähigkeit k betrachten wir wiederum als Konstante.

Nach einem bekannten Satze der Vektoranalysis [I. Teil, II, § 3, (26)] ist

$$\mathrm{div}\,(\varrho\mathfrak{v}\,.\,u) = u\,\mathrm{div}\,(\varrho\mathfrak{v}) + \varrho\mathfrak{v}\,.\,\mathrm{grad}\,u.$$

Berücksichtigen wir ferner die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik XVII, § 2, 2

$$\mathrm{div}\,(\varrho\mathfrak{v}) = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}$$

und die Identität

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} = \varrho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial\varrho}{\partial t},$$

so erhalten wir aus (2)

$$\sigma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u - \sigma\varrho\mathfrak{v}\,.\,\mathrm{grad}\,u. \tag{3}$$

Nennen wir wieder $\frac{k}{\varrho\sigma} = a^2$, so erhalten wir schließlich die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u - \mathfrak{v}\,.\,\mathrm{grad}\,u. \tag{4}$$

Hierzu treten nun noch, wie im Falle des festen Körpers, gewisse Oberflächenbedingungen. Betrachten wir ein kleines Stück der Grenzfläche zweier sich nicht mischender Flüssigkeiten oder einer Flüssigkeit und eines festen Körpers, so muß in der Richtung senkrecht auf dieses Flächenstück die Konvektion verschwinden, da die Stromlinien der Flüssigkeit dort parallel mit dem Flächenstück laufen. Es erfolgt also der Wärmeübergang dort ausschließlich durch einen Vorgang, der der äußeren Wärmeleitung an der Oberfläche eines festen Körpers analog ist. Wir wollen die naheliegende Hypothese machen, daß auch quantitativ dasselbe Gesetz wie dort, also die Formel VI, § 1, (7) gelten soll, wobei die Größe h, die wir hier Wärmeübergangszahl nennen wollen, als Körperkonstante der beiden Flüssigkeiten anzusehen ist. Die letztere Annahme ist allerdings in Wirklichkeit kaum exakt richtig, wahrscheinlich ist die Wärmeübergangszahl auch eine Funktion der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeiten an der Berührungsstelle. Bei vielen Problemen werden wir annehmen können, daß h gegenüber k eine große Zahl ist, so daß die Temperaturen der beiden Körper an der Berührungsfläche einander gleichgesetzt werden können. Im allgemeinen trifft dies aber nicht zu, es existiert ein endlicher Temperatursprung an der Grenze zwischen festem Körper und Flüssigkeit.

2. Die Differentialgleichung der Diffusion unter dem Einfluß äußerer Kräfte. In VI, § 1, 4 haben wir die Differentialgleichung für die Diffusion in einem ruhenden Medium abgeleitet. Wir wollen nun zulassen, daß über die Diffusionsströmung noch eine beliebige andere Strömung überlagert sei, der wir die vektorielle Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zuschreiben, die wir uns auch durch Einwirkung äußerer Kräfte auf die diffundierende Substanz erzeugt denken können.

Wir müssen dann zu dem durch den osmotischen Druck erzeugten Diffusionsstrom $-D \operatorname{grad} u$ noch den Konvektionsstrom $c\mathfrak{v}$ hinzufügen, so daß wir die Diffusionsgleichung nun in der Form erhalten:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D . \Delta c - \operatorname{div}(c\mathfrak{v}). \tag{5}$$

Formel (5) ist im Falle einer quellenfreien Strömung $\mathfrak{v}$ ($\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$) mit (4) formal identisch. Kommt speziell die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch Einwirkung von Kräften $\mathfrak{k}$ auf die Moleküle der gelösten Substanz zustande, derart, daß die Beziehung besteht

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{k} . B, \tag{6}$$

so ergibt sich aus (5) die folgende Differentialgleichung[1]):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D . \Delta c - B \operatorname{div}(\mathfrak{k} . c). \tag{7}$$

[1]) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **48**, 1105, 1915.

§ 2. Die Wärmeleitung und Diffusion bei aufgezwungener Konvektion.

1. Wärmeleitung bei reibungsloser Flüssigkeitsströmung. Abkühlung eines Körpers durch eine vorbeiströmende Flüssigkeit. Wir stellen uns das folgende Problem. In einer Flüssigkeit sei ein fester Körper, welcher durch irgendwelche Wärmequellen erhitzt wird, festgehalten. Die Flüssigkeit habe im Unendlichen die konstante Temperatur Null und bewege sich nach den Gesetzen der reibungslosen und inkompressiblen Flüssigkeiten. Die Wärmeübergangszahl an der Grenze zwischen festem Körper und Flüssigkeit sei so groß, daß wir die Temperaturen von festem Körper und Flüssigkeit an der Berührungsfläche immer gemäß § 1, **1** als gleich ansehen können. Der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit sei so klein, daß wir ϱ als Konstante betrachten können und daß wir daher mit geringem Fehler annehmen können, daß sich die Stromlinien der erwärmten Flüssigkeit nicht wesentlich von denen unterscheiden, die wir nach den Gleichungen der Hydrodynamik für die überall gleichtemperierte Flüssigkeit berechnen würden. Die obigen Annahmen sind durch entsprechende Experimente gut gestützt.

Gesucht wird die Temperaturverteilung im stationären Zustand und der Wärmeverlust des Körpers durch die vorbeiströmende Flüssigkeit. Wir beschränken uns hier auf das zweidimensionale Problem, d. h. wir nehmen an, daß der feste Körper die Gestalt eines sehr langen Zylinders mit beliebigem Querschnitt hat und daß die Flüssigkeit überall senkrecht zu dessen Achse fließt[1]).

Die Differentialgleichung (4), § 1 lautet für diesen Fall

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=v_x\frac{\partial u}{\partial x}+v_y\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1}$$

Wir wollen an Stelle von x und y neue Variable ξ und η einführen durch die Transformationsgleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=v_x, \quad -\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y}=v_y. \tag{2}$$

η ist nichts anderes als das Geschwindigkeitspotential, das längs der Äquipotentiallinien konstant bleibt, während ξ die „Stromlinienfunktion" ist, die längs der Stromlinien konstant bleibt. Dieses Koordinatensystem ist orthogonal und erfüllt, wie auch aus der Hydrodynamik bekannt ist, die Bedingungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0, \quad \Delta\xi=0, \quad \Delta\eta=0. \tag{3}$$

[1]) J. Boussinesq, Theorie analytique de la chaleur. Paris 1901.

Durch Einführung dieser neuen Variablen ergibt sich nun, wie man durch einfache Ausführung der Differentiation leicht sieht, gemäß (2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right), \quad v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = v^2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

also durch Einsetzen in (1)

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{4}$$

Wir wollen diese Gleichung noch weiter spezialisieren für den Fall, daß die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit genügend klein ist. Da in der Richtung von η die Wärmeleitung durch innere Wärmeleitung und durch Konvektion, in der Richtung von ξ dagegen nur durch die erstere erfolgt, können wir die innere Wärmeleitung in der Richtung η gegen die Konvektion vernachlässigen, also das Glied $\partial^2 u/\partial \eta^2$ in (4) weglassen und erhalten

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{5}$$

Wir wollen nun eine Lösung dieser Differentialgleichung geben, derart, daß an der Oberfläche des Körpers u eine vorgegebene Funktion des Ortes ist. Längs der Oberfläche des Körpers ist $\xi =$ konst. Da ξ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, können wir für die Oberfläche des Körpers $\xi = 0$ setzen. Es ist also für $\xi = 0$: $u = \Phi(\eta)$. Im Unendlichen soll überall $u = 0$ sein.

Die Differentialgleichung (5) ist formal identisch mit der Differentialgleichung VI, § 2, (1) für lineare Wärmeleitung in einem festen Körper, wenn wir ξ mit x und η mit t identifizieren. Übertragen wir unsere Randbedingungen auf diese Weise, so lauten sie so: Für $x = 0$ sei u eine vorgegebene Funktion $\Phi(t)$. Dieses Problem haben wir aber in VI, § 3, 3 ganz allgemein gelöst. Auf unseren Fall zurückübertragen lautet die Lösung gemäß Formel (61) dortselbst

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi/2a\sqrt{\eta}}^{\infty} \Phi\left(\eta - \frac{\xi^2}{4a^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2}\, d\alpha, \tag{6}$$

wobei der Anfangspunkt der Zählung von η den Nullpunkt der Temperatur darstellt.

Die Wärmemenge, die von dem Körper pro Zeit- und Oberflächeneinheit gegen die Flüssigkeit abgegeben wird, ist

$$|\mathfrak{Q}| = -k \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=0},$$

was nach Ausführung der Differentiation liefert

$$|\mathfrak{Q}| = -\sqrt{\frac{k\varrho\sigma}{\pi}} \cdot \frac{\Phi(\eta)}{\sqrt{\eta}}. \tag{7}$$

Die Formel lehrt also, daß der von der Flächeneinheit des Körpers ausgehende Wärmefluß der Temperatur Φ des Körpers an dieser Stelle einfach proportional ist. Es ist also die Abkühlung eines festen Körpers durch eine an ihm vorbeiströmende Flüssigkeit ein Vorgang, für den das Newtonsche Abkühlungsgesetz VI, § 1, (7) gilt. Wir sehen also, daß die Zugrundelegung dieses Gesetzes für die oberflächliche Abkühlung erwärmter fester Körper in Kapitel VI unter Umständen auch durch die exakte Theorie gerechtfertigt sein kann, wenn man die Wärmestrahlung vernachlässigt. Allerdings ist der Proportionalitätsfaktor h, den wir die äußere Wärmeleitung genannt haben, wie man sieht, keineswegs eine Materialkonstante, sondern er enthält noch das η, ist also von der Gestalt der Oberfläche und von der Geschwindigkeit der Strömung daselbst in nicht leicht angebbarer Weise abhängig, womit es sich erklärt, daß die experimentellen Bestimmungen von h außerordentlich verschiedene Resultate geben, je nach der angewandten Methode. Dieselben Überlegungen gelten natürlich auch für den Wärmeübergang an der Grenze zweier Flüssigkeiten.

Nehmen wir beispielshalber an, unser Körper sei ein Kreiszylinder mit dem Radius R. Im Unendlichen sei $v_x = -V$, $v_y = 0$. Dann lauten die Gleichungen der Stromlinien, wenn die Zylinderachse durch den Koordinatensprung hindurchgeht (vgl. XVII, § 3, **3**):

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 - V.\left(y - \dfrac{R^2 y}{r^2}\right), \\ \eta = \eta_0 - V.\left(x + \dfrac{R^2 x}{r^2}\right), \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8}$$

Dabei sind die Konstanten ξ_0, η_0 so zu bestimmen, daß für $r = R$ $\xi = 0$ wird, also $\xi_0 = 0$. Da infolge der geringen inneren Wärmeleitung der Flüssigkeit die Temperatur für positive x schon in sehr kleiner Entfernung von der Oberfläche nicht wesentlich von der Temperatur im Unendlichen verschieden sein wird, die wir zum Nullpunkt machen, so können wir mit geringer Vernachlässigung η_0 so wählen, daß für $x = R$, $y = 0 : \eta = 0$ wird, also $\eta_0 = 2RV$ und

$$\begin{cases} \xi = -V.\left(y - \dfrac{R^2 y}{r^2}\right), \\ \eta = +V\left(2R - x - \dfrac{R^2 x}{r^2}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Setzt man diese Werte in (6) ein, so erhält man die vollständige Lösung für den Fall des Kreiszylinders. Will man wissen, wieviel

Wärme der gesamte Zylinder pro Einheit seiner Länge pro Sekunde verliert, wenn seine Oberfläche überall auf der gleichen Temperatur U gehalten wird, so muß man (7) nach η um den ganzen Umfang integrieren, was wegen der Symmetrie liefert

$$Q = 2\sqrt{\frac{k\varrho\sigma}{\pi}}\,(\sqrt{\eta_2} - \sqrt{\eta_1})\,.\,U. \tag{10}$$

Darin sind η_1 und η_2 die Extremwerte von η an der Oberfläche, welche nach (9) gleich $4\,RV$ bzw. 0 sind. Also wird

$$Q = 4\sqrt{\frac{k\varrho\sigma RV}{\pi}}\,.\,U,$$

also pro Einheit der Oberfläche im Mittel

$$q = \frac{Q}{2R\pi} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k\varrho\sigma V}{\pi R}}\,.\,U = h\,.\,U, \tag{11}$$

woraus man entnimmt, daß in diesem Falle die äußere Wärmeleitfähigkeit dem Radius des Zylinders umgekehrt proportional ist, also unter sonst gleichen Umständen ein dünner Zylinder rascher abkühlt als ein dicker.

2. Endliche Wärmeübergangszahl. Ist die Wärmeübergangszahl nicht unendlich groß, so läßt sich die oben entwickelte Methode nicht mehr anwenden. Gewisse Aufgaben lassen sich aber auch unter dieser allgemeineren Annahme lösen. Wir wollen zunächst versuchen, das folgende Problem zu behandeln:

Durch ein kreiszylindrisches Rohr von sehr großer Länge und dem Radius R fließt reibungslos eine Flüssigkeit mit der für alle Punkte des Querschnitts gleichen Geschwindigkeit v hindurch. Im Rohranfang sei die Temperatur im ganzen Querschnitt überall gleich U. Die Temperatur des Rohres selbst sei überall gleich Null, die Ausdehnung der Flüssigkeit sei zu vernachlässigen. Die stationäre Temperaturverteilung ist zu suchen.

Führen wir Zylinderkoordinaten z und r ein und legen wir den Rohranfang nach $z = 0$, dann lautet die Differentialgleichung § 1, (4) infolge der Symmetrie um die Rohrachse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{v}{a^2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

welche wir zu lösen haben unter den Randbedingungen

$$u = U, \text{ für } z = 0;\ \frac{\partial u}{\partial r} = hu, \text{ für } r = R;\ u = 0, \text{ für } z = \infty. \tag{13}$$

Wir setzen in gewohnter Weise die Lösung als Produkt einer Funktion R von r allein und einer Funktion Z von z allein an, wo-

durch (12) sich in die beiden folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegen läßt:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \tag{14}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{v}{a^2}\frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z = 0, \tag{15}$$

wo λ^2 eine beliebige positive Konstante sein soll. Die Lösung von (15) lautet:

$$Z = Ae^{\xi_1 z} + Be^{\xi_2 z}, \tag{16}$$

wo A und B willkürliche Konstanten sind und ξ_1, ξ_2 die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\xi_{1,2} = \frac{v}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4a^4} + \lambda^2} \tag{17}$$

bezeichnen. Wegen der dritten Randbedingung (13) muß A verschwinden und ist in (17) das untere Vorzeichen zu nehmen.

Die Lösung von (14) lautet gemäß VI, § 2, **2**

$$R = J_0(\lambda r), \tag{18}$$

wenn J_0 die Besselsche Funktion von der nullten Ordnung darstellt. Wegen der zweiten Randbedingung (13) muß λ der transzendenten Gleichung

$$\lambda J_0'(\lambda R) = hJ_0(\lambda R)$$

oder

$$J_0(\lambda R) = -\frac{\lambda}{h} J_1(\lambda R) \tag{19}$$

Genüge leisten. Aus den Sätzen über die Nullstellen der Besselschen Funktionen (1. Bd., VIII, § 3, **10**) folgt sofort, daß diese Gleichung unendlich viele reelle und positive Wurzeln hat, die wir, der Reihe nach geordnet, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ nennen wollen. Die zu diesen λ gehörigen ξ mögen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, \ldots$ heißen.

Wegen der Linearität von (12) können wir die allgemeine Lösung als Summe über die Partikularlösungen (16), (18) mit willkürlichen Koeffizienten ansetzen in der Form

$$u = \sum_\nu B_\nu J_0(\lambda_\nu r) e^{\xi_\nu z}. \tag{20}$$

Wir suchen nun die B_ν so zu bestimmen, daß die erste Bedingung (13) befriedigt wird, d. h.

$$U = \sum_\nu B_\nu J_0(\lambda_\nu r). \tag{21}$$

Das ist eine Entwicklung nach Besselschen Funktionen, deren Koeffizienten sich nach 1. Bd., IX, § 3, 4 bestimmen lassen. Die einfache Rechnung liefert

$$B_\nu = \frac{2hU}{RJ_0(\lambda_\nu R)(\lambda_\nu^2 + h^2)}, \tag{22}$$

also schließlich das gesuchte u als Funktion von r und z

$$u = \frac{2hU}{R} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\left[\frac{v}{2a^2} - \sqrt{\frac{v^2}{4a^4} + \lambda_\nu^2}\right] z} \cdot J_0(\lambda_\nu r)}{(\lambda_\nu^2 + h^2) \cdot J_0(\lambda_\nu R)}. \tag{23}$$

3. Strömung durch enge Röhren. Der Kühler. Ist das verwendete Rohr genügend eng, so daß innerhalb jedes Querschnittes die Temperatur angenähert konstant angesetzt werden kann, so kann man die äußere Wärmeleitung ganz ähnlich, wie wir es in VI, § 3, 5 für dünne Stäbe gemacht haben, in die Differentialgleichung selbst hineinziehen, wobei wiederum der Querschnitt beliebige Form haben kann und das Rohr auch gekrümmt sein darf, da die Stromlinien jedenfalls parallel zur Rohrachse verlaufen werden und wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit v überall den gleichen Betrag besitzt.

Die Differentialgleichung nimmt dann die Form an

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} - b^2(u - U) - v\frac{\partial u}{\partial l}, \tag{24}$$

wo l einen längs der Rohrachse zu zählenden Parameter bedeutet, U die Umgebungstemperatur ist, und zur Abkürzung gesetzt ist

$$b^2 = \frac{hp}{\varrho\sigma q},$$

wo p den inneren Rohrumfang, q den Rohrquerschnitt bezeichnet.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Differentialgleichung wollen wir den „Kühler“ behandeln. Zwei konzentrische, zylindrische Rohre 1 und 2 mit nicht zu großen Querschnitten werden von zwei Flüssigkeiten im gleichen Sinne durchflossen. An der Eintrittsstelle bei $x = 0$ habe die erste Flüssigkeit (im Rohre 1) die Temperatur U_1 und die Geschwindigkeit v_1, die zweite Flüssigkeit (im Rohre 2) die Temperatur U_2 und die Geschwindigkeit v_2. Das äußere Rohr sei wärmeundurchlässig, das innere Rohr so dünnwandig, daß man sowohl seine Dicke als auch seine Wärmekapazität vernachlässigen und so rechnen kann, als ob die beiden Flüssigkeiten direkt aneinander vorbeigleiten würden. Zu bestimmen ist, auf welche Weise im stationären Zustand die kältere Flüssigkeit die wärmere abkühlt und umgekehrt.

Die Differentialgleichung (24), angewendet auf die beiden Flüssigkeiten, lautet

$$(25)\qquad \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - b_1^2 (u_1 - u_2) - v_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - b_2^2 (u_2 - u_1) - v_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

wobei die Randbedingungen gelten:

$$(26)\qquad \begin{cases} u_1 = U_1, \quad u_2 = U_2 & \text{für } x = 0, \\ u_1 \text{ und } u_2 \text{ endlich} & \text{für } x = \infty. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus den beiden Gleichungen (25) u_2, indem wir es beispielsweise aus der ersten Gleichung ausrechnen und in die zweite einsetzen, so erhalten wir eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(27)\qquad k \frac{d^4 u_1}{dx^4} + l \frac{d^3 u_1}{dx^3} + m \frac{d^2 u_1}{dx^2} + n \frac{du_1}{dx} = 0,$$

wo die Konstanten folgende Bedeutung haben:

$$(28)\qquad \begin{cases} k = -a_1^2 a_2^2, & l = a_1^2 v_2 + a_2^2 v_1, \\ m = a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - v_1 v_2, & n = -v_1 b_2^2 - v_2 b_1^2. \end{cases}$$

Ihre Lösung lautet nach 1. Bd., VI, § 5, **1**

$$(29)\qquad u = A_1 + B_1 e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_2 x} + D_1 e^{\lambda_3 x},$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der algebraischen Gleichung vom dritten Grade

$$(30)\qquad k z^3 + l z^2 + m z + n = 0$$

sind. Wegen $n/k > 0$ müssen von den drei Wurzeln dieser Gleichung entweder alle drei negativen Realteil haben oder es ist nur eine (die dann reell sein muß) negativ. Da ferner die Koeffizienten k, l, m, n von (30) nach (28) nicht alle gleiches Vorzeichen haben, können nicht alle drei Wurzeln negativen Realteil haben[1]). Daraus und aus dem Obigen schließen wir, daß die Gleichung (30) nur eine (und daher reelle) Wurzel mit negativem Realteil $(-\lambda)$ besitzt. Wegen (26) müssen aber in (29) die Koeffizienten der Exponentialfunktionen, deren λ_j keinen negativen Realteil hat, verschwinden und wir erhalten

$$(31)\qquad u_1 = A_1 + B_1 e^{-\lambda x}.$$

Eliminieren wir auf diese Weise u_1 aus (25), so erhalten wir wiederum (27), so daß wir schreiben müssen:

$$(32)\qquad u_2 = A_2 + B_2 e^{-\lambda x}.$$

[1]) Denn sonst wäre (30) im Sinne von 1. Bd., III, §, 4, **3** eine Hurwitzsche Gleichung, für die in der Bezeichnung des zitierten Paragraphen alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ wenn sie reell sind, gleiches Vorzeichen haben müssen.

Darin sind nun aber die Koeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2 nicht mehr ganz willkürlich. Durch Einsetzen in (25) erhalten wir

$$[a_1^2\lambda^2 B_1 - b_1^2(B_1 - B_2) + v_1\lambda B_1]e^{-\lambda x} = b_1^2(A_1 - A_2),$$
$$[a_2^2\lambda^2 B_2 - b_2^2(B_2 - B_1) + v_2\lambda B_2]e^{-\lambda x} = b_2^2(A_2 - A_1),$$

welche für jedes x erfüllt sein sollen. Das kann aber nur sein, wenn beide Seiten der Gleichungen einzeln verschwinden, also

$$(33)\quad A_1 = A_2,\quad \frac{B_1}{B_2} = \left(1 - \frac{\lambda^2 a_2^2}{b_2^2} - \frac{v_2\lambda}{b_2^2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2 a_1^2}{b_1^2} - \frac{\lambda v_1}{b_1^2}} = \varrho.$$

Daß der zweite und der dritte Term in obigem Ausdruck einander in der Tat gleich sind, ist eine Folge des Umstandes, daß λ eine Wurzel der Gleichung (30) ist, wie man unmittelbar sieht. Haben wir λ und somit ϱ gefunden, so erhalten wir nunmehr eindeutig aus (26), (31), (32) und (33)

$$(34)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{1-\varrho}\{U_1 - \varrho U_2 - \varrho(U_1 - U_2)e^{-\lambda x}\}, \\ u_2 = \dfrac{1}{1-\varrho}\{U_1 - \varrho U_2 + \quad (U_1 - U_2)e^{-\lambda x}\}. \end{cases}$$

Die Temperatur im Heizrohr fällt und die im Kühlrohr sinkt also exponentiell, bis sich schließlich die Ausgleichstemperatur

$$U_0 = \frac{U_1 - \varrho U_2}{1 - \varrho}$$

einstellt, die von der Wärmeleitfähigkeit und den Geschwindigkeiten der beiden Flüssigkeiten und von der Gestalt des Kühlrohres abhängt.

Ähnlich kann man auch den „Rückflußkühler" behandeln, in dem die beiden Flüssigkeiten in entgegengesetzter Richtung strömen.

4. Diffusion in strömenden Gasen und unter Einwirkung gegebener äußerer Kräfte. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf eindimensionale Probleme und nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{v}_x = v$, $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0$; dann vereinfacht sich die Differentialgleichung § 1, (5) in

$$(35)\quad \frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Wir können sofort die stationäre Lösung dieser Gleichung angeben. Wir haben dann zu setzen $\dfrac{\partial c}{\partial t} = 0$ und erhalten

$$(36)\quad D\frac{d^2 c}{dx^2} - v\frac{dc}{dx} = 0,$$

eine Gleichung, deren Lösung lautet

$$c = A\, e^{\frac{v}{D}(x - x_0)}. \tag{37}$$

Die Konzentration wird sich also in der Richtung der Geschwindigkeit nach einer Exponentialfunktion verteilen, welche die Geschwindigkeit und den Diffusionskoeffizienten enthält. Auf der letzteren Tatsache gründet sich ein neuerdings angegebenes Verfahren zur Trennung von Gasgemischen durch Diffusion[1]). Läßt man nämlich ein Gemisch aus zwei Gasen in ein drittes Gas, das mit der konstanten Geschwindigkeit v strömt, diffundieren, so werden sich die beiden Bestandteile, jeder für sich, gemäß (37) nach einer Exponentialfunktion der x verteilen. Sind nun die Diffusionskoeffizienten der beiden Gase in das dritte Gas voneinander verschieden, so wird die Steilheit des Anstieges von c für die beiden Gase verschieden sein und daher das Mischungsverhältnis der beiden Gase mit dem dritten eine Funktion von x. Durch geeignete Wahl von v und x läßt sich so jedes beliebige Mischungsverhältnis erzielen, d. h. die beiden Gase können in beliebigem Maße voneinander geschieden werden. Um zu verhindern, daß die beiden in Frage stehenden Gase durch das dritte, strömende, fortgeführt werden, wählt man als letzteres einen Dampf, z. B. Wasserdampf, den man hinter der betreffenden Stelle x wieder kondensieren kann, so daß die reinen Gase gewonnen werden können.

Eine Formel von der gleichen Gestalt wie (37) müssen wir gemäß § 1, **2** erhalten, wenn wir die Diffusion im ruhenden Medium vor sich gehen lassen, dafür aber annehmen, daß auf die Teilchen der diffundierenden Substanz eine konstante Kraft in der Richtung x wirkt. Die Geschwindigkeit v ist dann jene Geschwindigkeit, mit welcher die Teilchen der Lösung gleichmäßig sich in der Richtung der Kraft bewegen würden, wenn keine Diffusion wirksam wäre.

Ist diese Kraft z. B. die Schwerkraft, dann gibt die Formel (37) das bekannte aerostatische Gesetz, das die Dichteverteilung in einer der Schwere ausgesetzten Lösung erfahrungsgemäß wiedergibt[2]), ebenso wie die Dichteverteilung in der freien Atmosphäre, bei deren Zustandekommen es sich im Grunde genommen ebenfalls um eine Art Diffusionsvorgang handelt.

5. Sedimentation und Brownsche Bewegung im Schwerefeld. Gehen wir nun auf das allgemeine Problem der Lösung von (35) unter bestimmten Randbedingungen über. Wir können diese Aufgabe durch

[1]) G. Hertz, Zeitschr. f. Phys. **19**, 35, 1923.
[2]) J. Perrin, Die Atome, S. 82ff. Leipzig 1914.

Einführung einer neuen abhängig Veränderlichen in (35) erledigen, wie wir es bereits in VI, § 3, **5** gemacht haben, indem wir setzen:

$$c = c^* . e^{\frac{v}{2D}(x - x_0) - \frac{v^2 t}{4D}}. \tag{38}$$

Es ergibt sich dann für c^* die Differentialgleichung

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2}, \tag{39}$$

welche für die Diffusion im ruhenden Medium Geltung hat. Die Grenzbedingungen werden dadurch natürlich geändert, und zwar tritt an Stelle von $c = 0$ die Bedingung $c^* = 0$ und an Stelle von $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ die Bedingung $c^* + \frac{2D}{v} \frac{\partial c^*}{\partial x} = 0$.

Wir machen von dem Obigen eine Anwendung auf eine in einem hohen Gefäß eingeschlossene Lösung, die unter der Wirkung der Schwere steht. Der Gefäßboden sei horizontal und „klebrig“ [vgl. VI, § 3, **1**][1]). Unsere Randbedingung lautet dann gemäß S. 210 $c^* = 0$ für $x = 0$, wenn der Boden sich in dieser Ebene befindet. Für $t = 0$ sei $\int c\, dx = 1$, wenn das Integrationsgebiet den Wert $x = \alpha$ enthält; $\int c\, dx = 0$, wenn das nicht der Fall ist. Wir können dann wegen der formalen Identität dieses Problems mit dem S. 210 behandelten die Lösung direkt hinschreiben, indem wir für c^* den Ausdruck VI, § 3, (8) einsetzen. Sie lautet mit Benutzung von (38)

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{v^2 t}{4D} + \frac{v}{2D}(x - \alpha)} \left\{ e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4Dt}} \right\}. \tag{40}$$

Berechnen wir hier, dem Gedankengang von VI, § 3, **1** folgend, die auf die Bewegung eines Einzelteilchens übertragene „Wahrscheinlichkeit“ einer Erstpassage der Ebene $x = 0$ zwischen t und $t + dt$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} M(t)\, dt &= D \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=\sigma} dt = \frac{\alpha\, dt}{2\sqrt{\pi D t^3}} \cdot e^{-\frac{v^2 t}{4D} - \frac{v\alpha}{2D} - \frac{\alpha^2}{4Dt}} \\ &= \frac{\alpha\, dt}{2\sqrt{\pi D t^3}} e^{-\frac{(\alpha + vt)^2}{4Dt}}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

woraus sich unschwer durch Ausführung der Integrationen folgende Mittelwerte der Passagezeiten entwickeln lassen:

$$\bar{t} = \int_0^\infty t . M(t)\, dt = -\frac{\alpha}{v}, \quad \left(\frac{\bar{1}}{t}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot M(t)\, dt = \frac{2D}{\alpha^2} - \frac{v}{\alpha}. \tag{42}$$

[1]) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. **16**, 318, 1915; E. Schrödinger, ebenda **16**, 289, 1915.

Durch Kombination beider erhält man die einfache Formel

$$\alpha^2 \left\{ \left(\frac{\bar{1}}{t}\right) - \frac{1}{\bar{t}} \right\} = 2D, \tag{43}$$

welche man zur Bestimmung von D zu benutzen pflegt, wenn man die Brownsche Bewegung von schweren Partikeln in vertikaler Richtung beobachtet[1]). Sie spielt eine große Rolle bei der Methode von Ehrenhaft-Millikan[2]).

Wenn hingegen der Boden des Gefäßes die Teilchen „reflektiert", so muß die Grenzbedingung so lauten, daß die gesamte Strömung durch die Ebene $x = 0$ verschwindet, also

$$D\frac{\partial c}{\partial x} - vc = 0 \tag{44}$$

oder nach (38)

$$\frac{\partial c^*}{\partial x} - \frac{v}{2D} c^* = 0.$$

Auch hier können wir die allgemeine Lösung für c^* nach VI, § 3, **5** sofort hinschreiben[3]), wenn wir annehmen, daß für $t = 0$ und für ein den Punkt $x = x_0$ enthaltendes Integrationsintervall $\Phi(\alpha)\, d\alpha = 1$ sonst $\int \Phi(\alpha)\, d\alpha = 0$ ist.

Nach Formel (79) dortselbst haben wir zu setzen

$$\Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha) - \frac{v}{D} e^{-\frac{v}{2D}\alpha} \int_0^{\alpha} \Phi(\xi)\, e^{\frac{v}{2D}\xi}\, d\xi. \tag{45}$$

Dies gibt, in VI, § 3, (76) eingesetzt, unter den obigen Bedingungen nach einfacher Rechnung

$$c^* = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left\{ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} - \frac{v}{D} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4Dt} - \frac{v\alpha}{2D} + \frac{vx_0}{2D}}\, d\alpha \right\}. \tag{46}$$

Führen wir in dem letzten Integral als Integrationsvariable $z = \dfrac{\alpha + x + vt}{2\sqrt{Dt}}$ ein, so läßt es sich auf die Funktion ψ [VI, § 2, (11)] zurückführen und man erhält schließlich für c mit Benutzung von (38)

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right) e^{\frac{v}{2D}(x-x_0) - \frac{v^2 t}{4D}} \\ \quad - \dfrac{v}{2D} e^{\frac{v}{D}x} \left[1 - \psi\left(\dfrac{x + x_0 + vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]. \end{cases} \tag{47}$$

[1]) E. Weiss, Wiener Ber. **120** (2a), 1021, 1911.

[2]) Vgl. u. a. F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. **56**, 1, 1918; R. A. Millikan, „Das Elektron". Braunschweig 1922.

[3]) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **43**, 1107, 1915.

Für sehr große t und $v < 0$ reduziert sich diese Formel auf

$$\lim_{t=\infty} c = -\frac{v}{D} e^{\frac{v}{D} x}, \tag{48}$$

also eine stationäre Verteilung, die, wie es von vornherein zu erwarten war, einen Spezialfall der allgemeinen Lösung (37) darstellt und von uns auf S. 257 eingehend diskutiert wurde.

6. Zusammenhang mit einem Satz der statistischen Mechanik. Ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bzw. die Kraft $\mathfrak{k}$ nicht konstant, so kann man in einigen Spezialfällen Lösungen von (5) bzw. (7), § 1 angeben. Wir wollen zunächst zeigen, daß sich die Differentialgleichung (7), § 1 ganz allgemein lösen läßt unter der Voraussetzung der Stationarität. Wir können dann nämlich wegen $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ schreiben

$$\operatorname{div}\{D \operatorname{grad} c - B(\mathfrak{k} c)\} = 0. \tag{49}$$

Der Vektor der Teilchenbewegung ist also quellenfrei. Sind nun die Kräfte $\mathfrak{k}$ wirbelfrei, d. h. lassen sie sich von einem Potential ableiten, so folgt aus energetischen Gründen, daß jedenfalls im stationären Fall die Flüssigkeitsströmung auch wirbelfrei sein muß, weil sonst infolge der Reibungskräfte in der Flüssigkeit ständig Wärme erzeugt werden müßte, für die von außen kein Äquivalent an mechanischer Arbeit zugeführt würde. Es muß also der Vektor der Gesamtströmung verschwinden, d. h.:

$$D \operatorname{grad} c - B c \mathfrak{k} = 0 \tag{50}$$

oder

$$\operatorname{grad}(\log c) = \frac{B}{D} \mathfrak{k},$$

die Kräfte $\mathfrak{k}$ stehen also überall senkrecht auf den Flächen gleicher Konzentration.

Bilden wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung das Linienintegral zwischen zwei Punkten A und B, so ist die linke Seite bekanntlich vom Wege unabhängig und nur abhängig von dem Werte von c in den Punkten A und B. Die Größe $\int \mathfrak{k}_s \, ds$ ist nun nichts anderes als die dabei von den Kräften $\mathfrak{k}$ geleistete Arbeit $\chi(s)$, die gleich der Abnahme des Potentials dieser Kraft zwischen A und B ist, also

$$c = K . e^{-\frac{B}{D} \chi(s)}, \tag{51}$$

wobei K die Konzentration im Anfangspunkt des Weges bedeutet. Benutzen wir für D die Formel VI, § 1, (20), so gibt das weiter

$$c = K . e^{-\frac{N}{RT} \chi(s)}. \tag{52}$$

In dieser Form ist das Gesetz ein Spezialfall des bekannten $e^{-h\chi}$-Satzes der statistischen Mechanik von Boltzmann über die Verteilung einer Schar gleichartiger Systeme, die von einem einzigen „sichtbaren" Parameter s abhängen, als Funktion dieses s. Aus der obigen Entwicklung sieht man, daß dieser Satz bis auf die Festlegung des Koeffizienten von χ auch aus der klassischen Diffusionstheorie gefunden werden kann.

Im Falle einer konstanten Kraft in der Richtung der x erhalten wir daraus sofort wieder (37).

Ist hingegen die Kraft z. B. eine elastische in der Richtung von x, die gegen den Punkt $x = 0$ hinzieht, also von der Form $|\mathfrak{k}| = -\beta x$, so ist $\chi(x) = \frac{\beta x^2}{2}$, und wenn man setzt $\beta B = \alpha$, schließlich

$$c = K e^{-\frac{\alpha}{2D} x^2}, \tag{53}$$

eine Formel, die übrigens formal und auch inhaltlich eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Gaußschen Fehlergesetz hat[1]).

7. Diffusion von Elektrolyten. Wir wollen schließlich von der Differentialgleichung (7), § 1 noch eine wichtige Anwendung auf die Diffusion von Elektrolyten[2]) machen.

Wir machen uns gewöhnlich die Vorstellung, daß die Moleküle eines gelösten Elektrolyten in „Ionen" zerlegt seien, die zum Teil positive und zum Teil negative elektrische Ladungen tragen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß wir einen „binären" Elektrolyten vor uns haben, der aus zwei Bestandteilen, einem positiv geladenen Kation und einem negativ geladenen Anion besteht, deren Ionen in gleicher Anzahl vorhanden sind, und die alle die gleiche Ladung tragen. Die beiden Ionenarten sollen aber nicht die gleiche „Beweglichkeit" besitzen. Wir versehen die auf das Kation bezüglichen Größen mit dem Index 1 und die auf das Anion bezüglichen mit dem Index 2. Es werden dann durch die verschieden schnelle Diffusion der beiden Bestandteile elektrische Kräfte wachgerufen werden, die sich als Gradienten eines Potentials φ darstellen lassen.

Nach § 1, (7) erhalten wir für die beiden Ionenarten die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_1}{\partial t} = B_1[P.\Delta c_1 + e.\operatorname{div}(c_1 \operatorname{grad}\varphi)], \\ \dfrac{\partial c_2}{\partial t} = B_2[P.\Delta c_2 - e\operatorname{div}(c_2 \operatorname{grad}\varphi)], \end{cases} \tag{54}$$

[1]) M. v. Smoluchowski, Bull. int. Acad. Cracovic, Math.-naturw. Klasse A, S. 418, 1913.

[2]) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 613, 1888.

wo P eine konstante Größe ist und φ die Poissonsche Gleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi e(c_1 - c_2)N}{\varepsilon} \tag{55}$$

befriedigen muß. ε bedeutet darin die Dielektrizitätskonstante der Flüssigkeit und N die Loschmidtsche Zahl.

Wir setzen zunächst $c_1 = c_2 = c$ und schauen nach, ob es eine dieser Bedingung entsprechende Lösung von (54) gibt. Durch Subtraktion der zweiten Gleichung (54) von der ersten erhalten wir

$$(B_1 - B_2)P.\Delta c + e(B_1 + B_2)\operatorname{div}(c.\operatorname{grad}\varphi) = 0, \tag{56}$$

also

$$\operatorname{div}(c.\operatorname{grad}\varphi) = -\frac{P(B_1 - B_2)}{e(B_1 + B_2)}\Delta c,$$

und dies, in eine der beiden Gleichungen eingesetzt, liefert

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D.\Delta c, \tag{57}$$

wenn wir die Abkürzung einführen:

$$D = 2P\cdot\frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2}. \tag{58}$$

Das heißt, die Elektrolyte gehorchen beide der gewöhnlichen Diffusionsgleichung (22), VI, § 1 mit einem Diffusionskoeffizienten (58). Nun müssen wir noch sehen, ob sich Gleichung (57) so befriedigen läßt, daß gemäß (55) $\Delta\varphi = 0$ ist. Aus (56) folgt

$$\operatorname{div}\{P(B_1 - B_2)\operatorname{grad} c + e(B_1 + B_2)c.\operatorname{grad}\varphi\} = 0.$$

Aus derselben Überlegung heraus, wie S. 260, müssen wir nun wieder daraus auf das Verschwinden der geklammerten Größe schließen oder

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{P(B_1 - B_2)}{e(B_1 + B_2)}\cdot\frac{\operatorname{grad} c}{c} \tag{59}$$

und

$$\Delta\varphi = -\frac{P(B_1 - B_2)}{e(B_1 + B_2)}\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} c}{c}\right) = -\frac{P(B_1 - B_2)}{e(B_1 + B_2)}\Delta(\log c). \tag{60}$$

Dieser Ausdruck wird aber nun im allgemeinen keineswegs verschwinden, woraus hervorgeht, daß die Annahme $c_1 = c_2$ im allgemeinen nicht zutreffend ist. Rechnet man sich aber für irgend einen in der Praxis vorkommenden Fall die rechte Seite von (60) aus, so wird man sie sehr klein finden, da die Größe $\log c$ sich mit dem Orte nur sehr wenig ändern kann, also $\Delta(\log c)$ klein bleibt und der Koeffizient dieser Größe im absoluten Maß sicher kleiner als 10^{-4} ist; andererseits ist aber in der Gleichung (55) der Faktor von $c_1 - c_2$ auf der rechten Seite von der Größenordnung 10^{13}, so daß in allen praktisch vor-

kommenden Fällen $c_1 - c_2$ gegen c_1 bzw. c_2 von verschwindend kleiner Größenordnung bleiben wird.

Damit haben wir also unsere obige Annahme nachträglich mit großer Annäherung gerechtfertigt. Gehen wir nun von irgend einem Anfangszustand aus, wo $c_1 = c_2$ ist, was der Natur der Sache entspricht, so wird nach dem Obigen auch später immer sehr angenähert $c_1 = c_2$ bleiben, da ja durch die Differentialgleichung (57) jeder spätere Zustand eindeutig durch den Anfangszustand bestimmt ist und wir gezeigt haben, daß die Annahme $c_1 = c_2$ für alle t eine sehr angenähert richtige Lösung darstellt.

Genau kann allerdings niemals $c_1 = c_2$ sein, da einerseits die Diffusionskoeffizienten der beiden Ionenarten voneinander verschieden sind, andererseits ein Feld überhaupt nicht entstehen könnte, wenn nicht irgendwelche Ladungen entständen, was wieder nur dann eintreten kann, wenn die Anzahl der positiven und negativen Ionen nicht überall gleich groß ist.

Aus (59) erhalten wir durch Integration sofort die Beziehung

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{P(B_1 - B_2)}{e(B_1 + B_2)} \log \frac{c_1}{c_2}. \tag{61}$$

Dieser Ausdruck bestimmt die elektromotorische Kraft eines Konzentrationselementes, wenn die Konzentrationen der beiden Teile bekannt sind.

§ 3. Spontane Konvektionsströmung unter Einwirkung äußerer Kräfte.

Wird in einem zylindrischen Gefäß eine Flüssigkeit vom Boden aus erwärmt, so tritt bekanntlich ein Temperaturausgleich in der Weise ein, daß zunächst die dem Boden unmittelbar benachbarte Schicht erwärmt wird und sich dadurch ausdehnt. Sie steigt wegen ihrer spezifischen Leichtigkeit hinauf, während die kältere und schwerere Flüssigkeit herabsinkt, am Boden wieder erwärmt wird, wieder aufsteigt usw. Es stößt auf sehr große Schwierigkeiten, diesen Vorgang analytisch zu fassen, und zwar aus hydrodynamischen Gründen, da dieses Auf- und Absteigen der Flüssigkeit im Gefäß keine regelmäßige Zirkulation darstellt, sondern im allgemeinen in Form von „Schlieren“ erfolgt. Außerdem spielt dabei noch die Diffusion der wärmeren in die kältere Flüssigkeit mit, ein Problem, das wir hier nicht behandeln wollen.

Einen besonders einfachen Fall spontaner Konvektionsströmung jedoch können wir ohne weiteres nach den oben entwickelten Prinzipien behandeln als Muster einer Reihe ähnlicher Aufgaben. Als Beispiel für die anzuwendende Methode wählen wir das folgende:

Wir nehmen ein in sich geschlossenes Rohr von der Form eines Rechtecks mit der Höhe H und der Länge L, dessen Ecken abgerundet

seien, damit dort die Strömung keine Wirbel bildet. Das Rohr sei mit der Flüssigkeit oder dem Gas völlig gefüllt, werde mit der Seite H vertikal aufgestellt und längs des unteren horizontalen Stückes irgendwie derart erwärmt, daß bei A eine konstante Temperatur U herrscht. Es wird dann die Flüssigkeit längs AB in die Höhe steigen, wie oben auseinandergesetzt, wobei sie sich durch Wärmeabgabe an das Rohr und von da nach außen allmählich abkühlt, dann weiter längs des horizontalen Stückes BC fließen, dann zwischen CD hinabsinken und von D an längs DA wieder erwärmt werden, bis sie schließlich, in A angelangt, wieder die Temperatur U annimmt.

Im stationären Falle wird also die Flüssigkeit in dem Rohre zirkulieren und es ist nun die Aufgabe, die Geschwindigkeit dieser Strömung und die Temperaturverteilung längs des Rohres zu suchen. Wir nehmen an, daß das Rohr so eng ist, daß wir mit der Differentialgleichung (24), § 2 operieren können, also längs des ganzen Querschnitts die gleiche Temperatur herrscht. Ferner soll die Strömung noch hydrodynamisch vereinfacht werden. Wir nehmen nämlich an, daß alle Stromlinien parallel zur Rohrachse verlaufen und die Geschwindigkeit überall im Querschnitt die gleiche ist. Eine Reibung längs der Rohrwandung lassen wir zu, sie soll der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeitsströmung gegen die Wand direkt proportional und ihr entgegengesetzt gerichtet, ferner direkt proportional der Größe der aufeinanderreibenden Flächen sein. Die infolge der Reibung entwickelte Wärmemenge sei so klein, daß die dadurch hervorgerufenen Temperaturänderungen zu vernachlässigen sind. Die Temperatur des Außenraumes sei gleich Null gesetzt.

Die Differentialgleichung § 2 (24) für den stationären Fall lautet dann folgendermaßen, wenn x eine längs des Rohres über $ABCD$ gezählte Länge bedeutet und bei A $x = 0$ gesetzt ist:

$$k\frac{d^2u}{dx^2} - v\varrho\sigma\frac{du}{dx} - \frac{hp}{q} = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung gilt nur mit Ausnahme des Gebietes der Wärmequellen, also für das Stück $ABCD$.

Aus Gründen der Kontinuität muß für alle x das Produkt ϱv eine Konstante sein. Wir haben daher in (1) eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor uns, deren Lösung wir sogleich hinschreiben können. Sie lautet:

$$u = Ae^{\xi_1 x} + Be^{\xi_2 x}, \tag{2}$$

worin ξ_1 und ξ_2 die beiden Wurzeln der charakteristichen Gleichung

$$\xi_{1,2} = \frac{v\varrho\sigma}{2k} \pm \sqrt{\frac{v^2\varrho^2\sigma^2}{4k^2} + \frac{hp}{kq}} \tag{3}$$

sind. Da für sehr große H und L jedenfalls u beliebig klein werden muß, so kann von diesen beiden Wurzeln jedenfalls bloß die mit dem unteren Vorzeichen in Betracht kommen, die wir einfach ξ nennen wollen. Da außerdem für $x = 0$ $u = U$ sein soll, muß gelten

$$u = U e^{\xi x}. \tag{4}$$

Damit ist die Temperaturverteilung eindeutig bestimmt, wenn es uns noch gelingt, die Größe v zu bestimmen. Diese folgt nun aber aus der Bedingung, daß für den stationären Zustand die Summe aller auf die strömende Flüssigkeit wirkenden Kräfte verschwinden muß. Diese setzen sich aus folgenden drei Teilen zusammen: 1. aus der Schwere der Flüssigkeitssäule AB, die der Geschwindigkeit entgegenwirkt, 2. aus der Schwere der Flüssigkeitssäule CD, die im Sinne der Strömung wirkt, und schließlich 3. aus der Reibungskraft im Rohre, die ebenfalls in dem der Strömung entgegengesetzten Sinne wirkt. Bezeichnet g die Beschleunigung der Schwere und η die Reibungskonstante, so lautet also die Gleichgewichtsbedingung

$$qg\left[-\int_0^H \varrho\, dx + \int_{H+L}^{2H+L} \varrho\, dx\right] - 2(H+L)\, p\, v\, \eta = 0. \tag{5}$$

Die Änderung der Dichte mit der Temperatur folgt dem bekannten Ausdehnungsgesetz

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}(1 + \alpha u), \tag{6}$$

wo α eine Konstante ist und ϱ_0 die Dichte bei der Temperatur $u = 0$ bedeutet. Auch die Reibungskonstante η ändert sich mit der Temperatur; zur Vereinfachung der Aufgabe können wir, allerdings mit einer gewissen Willkür, η und ϱ einander proportional setzen, also

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{\eta_0}{\varrho_0}. \tag{7}$$

Wir finden aus (4) und (6)

$$\int \varrho\, dx = \varrho_0 \int \frac{dx}{1 + \alpha u} = \varrho_0 \int \frac{dx}{1 + \alpha U . e^{\xi x}}.$$

Setzen wir als neue Variable $y = e^{\xi x}$, so gibt das weiter

$$\left\{\begin{aligned} \int \varrho\, dx &= \frac{\varrho_0}{\xi} \int \frac{dy}{y(1 + \alpha U y)} = \frac{\varrho_0}{\xi} \log \frac{y}{1 + \alpha U y} + \text{Konst} \\ &= \varrho_0 x - \frac{\varrho_0}{\xi} \log (1 + \alpha U e^{\xi x}) + \text{Konst}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Setzen wir aus (7) und (8) in (5) ein, so folgt

$$\log \frac{(1 + \alpha U e^{\xi H})(1 + \alpha U e^{\xi (H+L)})}{(1 + \alpha U e^{\xi (2H+L)})(1 + \alpha U)} = \frac{2 (v \varrho)\, p (L + H)\, \eta_0\, \xi}{\varrho_0^2\, q\, g}. \tag{9}$$

Diese Gleichung enthält außer der Größe $(v\varrho)$ nur mehr bekannte Größen, und man kann daher $(v\varrho)$ aus ihr bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist.

Gleichung (9) vereinfacht sich wesentlich, wenn, wie es ja meistens der Fall sein wird, α nicht sehr groß ist. Durch Entwicklung des linken Termes nach der kleinen Größe α erhält man

$$(10) \qquad e^{\xi H} + e^{\xi(H+L)} - e^{\xi(2H+L)} - 1 = \frac{2(v\varrho)\xi p(L+H)\eta_0}{\varrho_0^2 q . g \alpha U}.$$

Für $v = 0$ wird gemäß (3) $\xi < 0$ endlich und von Null verschieden, die linke Seite der Gleichung bleibt endlich, es muß also $U = 0$ sein. Für $v = \infty$ wird $\xi = -\frac{hp}{v\varrho\sigma q} = 0$ und $v\xi$ bleibt endlich, die linke Seite der Gl. (10) wird Null, also muß $U = \infty$ sein. Man sieht weiter leicht, daß für alle dazwischen liegenden Werte von U der Wert von v stetig von Null bis Unendlich wächst. Wir erhalten also das von vornherein zu erwartende Resultat, daß für $U = 0$ die Zirkulation aufhört und bei steigender Heiztemperatur immer rascher wird.

Lehrbücher zu Kapitel VI und VII.

1. Fourier, Analytische Theorie der Wärme. Berlin 1884.
2. G. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme. Leipzig 1894.
3. H. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Paris 1895.
4. J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1901.
5. Weber und Gans, Repertorium der Physik. 1. Bd., 2. Hälfte. Leipzig und Berlin 1916.
6. H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Berlin 1921.
7. H. S. Carslaw, Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids. London 1921.

III. Abschnitt.

Das stationäre (und quasistationäre) elektromagnetische Feld.

Achtes Kapitel.

Elektrostatik.

§ 1. Formulierung des mathematischen Problems.

1. Physikalische Erfahrungen und Vorstellungen. Die Elektrostatik ist neben der Schwere dasjenige Gebiet der theoretischen Physik, an dem sich die Gedanken und Methoden der Potentialtheorie (1. Bd., XIV, XVI, XVII) hauptsächlich entwickelt haben, so daß sie in ihrer jetzigen Gestalt direkt als eine Anwendung dieser Methoden erscheint. Was hier von der Elektrostatik gesagt wird, gilt, mutatis mutandis, auch von der Magnetostatik. Die Grundlagen sind folgende Gesetze:

a) Das Coulombsche Gesetz: Zwei punktförmige elektrische Ladungen, e_1, e_2, die die Entfernung r voneinander in einem homogenen Medium haben, stoßen sich ab mit einer Kraft, deren Vektor in die Verbindungslinie der beiden Ladungen hineinfällt, und deren Größe

$$P = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}$$

ist. ε ist hier eine vom Maßsystem abhängige Konstante des Zwischenmediums. Die Ladungen e_1 und e_2 können positives und negatives Vorzeichen haben, und die Abstoßung geht in eine Anziehung über, wenn die beiden Vorzeichen verschieden sind. Man kann dieses Gesetz in folgende beiden Teile zerlegen:

α) Eine elektrische Ladung e_1 erzeugt in ihrer Umgebung ein „Feld“ mit der radial nach außen gerichteten Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{e_1}{\varepsilon r^2}.$$

β) Eine Ladung e_2 erfährt von der Feldstärke $\mathfrak{E}$ eine ihr gleichgerichtete Kraft von der Größe

$$P = e_2 \mathfrak{E}.$$

Die Funktion

$$U_1 = -\int_{\infty}^{r} \mathfrak{E}(r)\,dr = \frac{e_1}{2r}$$

mißt infolgedessen die Arbeit, die die Verlegung einer Ladung $e_2 = 1$ aus dem Unendlichen auf die Kugelfläche mit dem Radius r erfordert. Sie heißt die „Potentialfunktion" dieses elektrischen Feldes.

b) Die Konstante ε heist nach Faraday die „Dielektrizitätskonstante" des betreffenden homogenen Zwischenmediums. Die „absoluten elektrostatischen Einheiten" der Ladung und Feldstärke werden so gewählt, daß die Konstante ε in Luft (oder genauer im materiefreien Raume) zu 1 wird. In vielen anderen Körpern, speziell den als Isolatoren verwendeten, wird dann $\varepsilon > 1$, man bezeichnet sie als „Dielektrika". Körper, für die $\varepsilon < 1$ wäre, sind nicht bekannt.

c) Das Feld mehrerer Ladungen, z. B. auch räumlich verteilter, setzt sich aus den von Einzelladungen durch Superposition vektoriell zusammen. Die zugehörigen Potentialfunktionen setzen sich daher skalar zusammen.

d) Es gibt Körper, in denen sich positive und negative elektrische Ladungen bilden und frei bewegen, sobald ein elektrisches Feld auf sie einwirkt. Sie heißen „Leiter der Elektrizität". Gleichgewicht ist in Leitern nur möglich, wenn in ihrem Innern kein elektrisches Feld herrscht und daher auch keine Ladungen vorhanden sind.

e) Wenn ein elektrisches Feld auf ein System von miteinander verbundenen Leitern wirkt, so stellt sich in denselben durch Bildung positiver und negativer Ladungen ein Gleichgewichtszustand her. In einem abgeschlossenen System solcher Leiter aber, das also nach außen hin keine leitende Verbindung mehr hat, ist die Summe aller Ladungen unabhängig von dem auf das System einwirkenden elektrischen Felde, also eine vorgebbare Konstante des Systems.

f) In dem Raume außerhalb der Leiter (Dielektrikum) existieren nur die vorgegebenen Ladungen; durch elektrische Felder werden hier keine Ladungen erzeugt, auch dann nicht, wenn das Dielektrikum sich aus Gebieten verschiedener Dielektrizitätskonstanten zusammensetzt. Die vorgegebenen Ladungen im Dielektrikum und die auf der Oberfläche der Leiter sich ansammelnden heißen die „wahren" elektrischen Ladungen.

g) In einem aus mehreren Dielektriken zusammengesetzten inhomogenen Medium kann nicht mehr das Coulombsche Gesetz in der Form a) gelten. Nach Faraday kann man sich vorstellen, daß im Dielektrikum viele kleine abgeschlossene Leiter vorhanden sind. Diese beeinflussen die Gesamtsumme der wahren Ladungen im Felde nicht, schirmen aber durch die auf ihnen sich bildenden positiven und negativen Teilladungen das Feld in ihrem Innern ab, während es stetig

nach dem Coulombschen Gesetz in dem Raume zwischen den gedachten Leitern und in dem umschließenden Luftraum verläuft. Mit dem elektrostatischen Felde im obigen Sinne ist aber nicht dieses unregelmäßig verteilte Feld, sondern das durch Mittelbildung über kleinere Volumelemente entstehende „mittlere Feld" zu identifizieren, das allein der Messung zugänglich ist. Es ist im Verhältnis $1:\varepsilon$ gegenüber dem erregenden Luftfeld verkleinert. Dieses mittlere Feld wird gleichfalls, da die Summe der in den gedachten Leitern induzierten Ladungen verschwindet, im Dielektrikum nur die vorgegebenen wahren Ladungen enthalten. Längs der Grenze zweier Dielektrika aber verhält es sich so, als ob hier Ladungen (die „freien" Ladungen nach Helmholtz) verteilt wären. Sie sind, unter sonst gleichen Verhältnissen, proportional mit der Differenz der Dielektrizitätskonstanten ε_1, ε_2 der beiden Medien. Im übrigen besitzt auch das mittlere Feld, weil aus Coulombschen Feldern zusammengesetzt, eine Potentialfunktion $U(x, y, z)$.

h) Die Potentialfunktion U gibt die Arbeit an, die gegen die Kräfte des elektrostatischen Feldes zu leisten ist, um eine Ladung 1 aus dem Unendlichen an die Stelle x, y, z des Feldes zu bringen. Die potentielle Energie E des Gesamtfeldes entspricht einer solchen Arbeitsleistung, wenn man sich die felderzeugenden Ladungen allmählich aufgebaut, d. h. aus dem Unendlichen herangebracht denkt. Zunächst sollen nun die Ladungen $e_1, e_2, \ldots$ auf einzelne Leiter verteilt angenommen werden, und die Potentialwerte dieser Leiter seien entsprechend $U_1, U_2, \ldots$ Wenn dann die Ladung e_i um den Betrag Δe_i vermehrt wird, so entspricht nach der Definition dieser Vorgang einer Erhöhung der vorhandenen Energie um den Betrag $\Delta E = U_i \Delta e_i$, woraus für eine stetige Veränderung der Ladung $U_i = \partial E / \partial e_i$ folgt. Nun sind hierin nach c) die Werte U_i selbst lineare homogene Funktionen der Ladungen e_k, und daher, nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen, E eine homogene Funktion zweiten Grades der Ladungen e_k, und zwar:

$$(1) \qquad E = \tfrac{1}{2} \Sigma e_i \frac{\partial E}{\partial e_i} = \tfrac{1}{2} \Sigma U_i e_i,$$

wobei die Summe über alle Leiter zu erstrecken ist. Man kann jetzt unmittelbar auf den Fall übertragen, daß die Ladungen mit der Dichte ϱ räumlich verteilt sind über ein Volumen v oder flächenhaft mit der Dichte σ über eine Fläche f. Dann wird analog zu (1):

$$(1') \qquad E = \tfrac{1}{2} \int_v U(x\,y\,z)\, \varrho(x\,y\,z)\, dv + \tfrac{1}{2} \int_f U(x\,y\,z)\, \sigma(x\,y\,z)\, df.$$

2. Mathematische Feldgleichungen. Die Potentialtheorie (1. Bd., XIV) formt nun diese Gesetze in folgende Nahewirkungsgesetze um, die auch ihrerseits die Elektrostatik aufzubauen gestatten:

a) In jedem elektrostatischen Felde besteht eine skalare Potentialfunktion $U(x, y, z)$, derart, daß sich der Vektor der Feldstärke als ihr negativer Gradient darstellen läßt. Es ist die Feldstärke [1])

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U, \tag{2}$$

d. h.

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2'}$$

b) Im homogenen Medium mit der Dielektrizitätskonstante ε, in dem Ladungen etwa mit der Ladungsdichte ϱ räumlich verteilt seien, ist:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} &= \varepsilon\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) = -\varepsilon \Delta U \\ &= -\varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = 4\pi\varrho. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Insbesondere ist in ladungsfreien Gebieten

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\Delta U = 0. \tag{3'}$$

c) Im Innern von Leitern ist immer $\mathfrak{E} = 0$, also $U = \text{konst.}$ Diese Konstanten haben denselben Wert in einem System von Leitern, die miteinander leitend verbunden sind. Wenn dagegen das System aus verschiedenen, für sich abgeschlossenen Teilen besteht, so ist in jedem Teile für sich ein anderer Wert der Konstanten anzunehmen.

d) Ist eine Ladung mit der Flächendichte σ auf eine Fläche konzentriert, so wählen wir eine positive Richtung ihrer Flächennormalen, n, und kennzeichnen Funktionswerte auf der positiven Seite durch den Index $+$ oder a, auf der negativen durch den Index $-$ oder i. Im Falle einer geschlossenen Fläche bedeutet immer a die äußere, i die innere Seite. Dann folgt (vgl. 1. Bd., XIV, § 2, 6) statt (3):

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+ + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_- = \mathfrak{E}_{n+} - \mathfrak{E}_{n-} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma. \tag{4}$$

Die Normalkomponente der Feldstärke ist also in diesem Maße unstetig, während die Existenz der Potentialfunktion aussagt, daß die tangentiale Komponente stetig bleibt.

Ist insbesondere die geladene Fläche die Oberfläche eines Leiters, der an ein Dielektrikum mit der Konstanten ε angrenzt, so ist im Innern des Leiters nach c) $\mathfrak{E}_i = 0$. Also gilt dann für die Ladungsdichte auf der Oberfläche:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_{na} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a. \tag{5}$$

e) Im Dielektrikum ist die Ladungsdichte überall eine vorgegebene Funktion des Ortes. Wenn zwei homogene dielektrische Medien von

[1]) Vgl. die Vektorbezeichnungen 1. Bd., II, § 3.

den Dielektrizitätskonstanten ε_i, ε_a längs einer Fläche aneinandergrenzen, so bildet sich der Gleichgewichtszustand nach der Faradayschen Vorstellung so aus, als ob diese Grenzfläche eine dünne, in der Querrichtung leitende Schicht wäre. Auf ihren beiden Seiten bilden sich also Ladungen, aber so, daß die Summe ihrer Flächendichtigkeiten σ_i, σ_a an jeder Stelle verschwindet: $\sigma_i + \sigma_a = 0$. Wenn wieder n die nach der Seite a hin gerichtete Normale bedeutet, so ist also nach (5):

$$\varepsilon_a \mathfrak{E}_{na} - \varepsilon_i \mathfrak{E}_{ni} = -\varepsilon_a \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a + \varepsilon_i \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i = 0. \tag{6}$$

Die Normalkomponente des Vektors

$$\varepsilon \mathfrak{E} = \mathfrak{D}$$

ist also an der Grenzfläche stetig, während die Tangentialkomponente $\mathfrak{E}_s$ des Vektors $\mathfrak{E}$ selbst stetig bleibt wegen der Stetigkeit der Potentialfunktion U längs der Grenzfläche, d. h.

$$\mathfrak{D}_{na} - \mathfrak{D}_{ni} = 0, \quad \mathfrak{E}_{sa} - \mathfrak{E}_{si} = 0. \tag{7}$$

Der mit $\mathfrak{E}$ gleichgerichtete Vektor $\mathfrak{D}$ heißt die elektrische Verschiebung, der Vektor $\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}$ die elektrische Polarisation.

f) Ist die Dielektrizitätskonstante ε selbst eine stetige Funktion des Ortes, so folgt aus der gleichen Vorstellung wie unter e), daß der Vektor $\mathfrak{D}$ quellenfrei verteilt ist bzw. seine Quellen die im Felde vorgegebenen Ladungen sind. Es ist dann also:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 4\pi\varrho. \tag{8}$$

Längs einer mit Flächenladung belegten Fläche ist dagegen

$$\mathfrak{D}_{na} - \mathfrak{D}_{ni} = 4\pi\sigma, \tag{8'}$$

längs einer leitenden Oberfläche wegen $\mathfrak{D}_i = 0$

$$\mathfrak{D}_{na} = \varepsilon_a \mathfrak{E}_{na} = -\varepsilon_a \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a = 4\pi\sigma, \tag{9}$$

während wie oben $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$ bestehen bleibt. Ferner wird

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi} \Delta U = \varrho^* \tag{10}$$

bzw.

$$\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_{na} - \mathfrak{E}_{ni}) = \frac{1}{4\pi}\left[-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i\right] = \sigma^* \tag{10'}$$

als die Raumdichte bzw. Flächendichte der freien Ladung bezeichnet.

g) Wenn räumlich und flächenhaft verteilte Ladungen vorhanden sind, so ist die potentielle Energie des Feldes nach (1):

$$E = \frac{1}{2}\int_v U\varrho\, dv + \frac{1}{2}\int_f U\sigma\, df, \tag{11}$$

wobei wir annehmen wollen, daß die Ladungsdichten ϱ und σ nach dem Unendlichen hin genügend zu 0 abnehmen, daß die Gesamtladung endlich bleibt. Wir setzen hier für ϱ, σ ihre Werte aus (8), (8′) ein und wenden den Greenschen Satz (1. Bd., II, § 3, 3) an in der Form:

$$\int_f U \mathfrak{D}_n df = \int_v \mathfrak{D} \operatorname{grad} U \, dv + \int_v U \operatorname{div} \mathfrak{D} \, dv.$$

Als Oberfläche des betrachteten Raumes müssen dabei einerseits die beiden Seiten der mit Flächenladung belegten Flächen, andererseits eine das Ganze umschließende Kugelfläche von sehr großem Radius angesehen werden. Das Integral $\int U \mathfrak{D}_n df$ über diese Kugelfläche geht aber mit wachsendem Radius R derselben zu 0, da nach der Voraussetzung U proportional mit R^{-1} und $\mathfrak{D}_n$ proportional mit R^{-2} zu 0 geht. Also bleibt

$$(12) \quad E = -\frac{1}{8\pi} \int_v \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathfrak{D}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathfrak{D}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathfrak{D}_z \right) dv = \frac{1}{8\pi} \int_v (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) \, dv.$$

In solchem Sinne ist nun die Energie des Systems nicht mehr an die Ladungen gebunden, sondern sie ist über den ganzen vom Felde erfüllten Raum verteilt. Diese Vorstellung, die zunächst für die Elektrostatik noch formal erscheint und mit der früheren Vorstellung der Energieverteilung ganz gleichwertig ist, hat sich für die spätere Entwicklung der Elektrodynamik als äußerst fruchtbar erwiesen.

§ 2. Fundamentalaufgaben; Spiegelung und elektrische Bilder.

1. Homogene Grundaufgaben. Die Grundaufgaben der Elektrostatik zerfallen in zwei Gruppen, die mathematisch als homogene und als inhomogene Aufgaben zu unterscheiden sind. Die einfachste der ersten Art ist die: Ein abgeschlossener elektrischer Leiter, der in ein Dielektrikum eingebettet ist, erhält eine bestimmte Gesamtladung. Im Gleichgewichtszustand verteilt sich diese nach § 1 so über die Oberfläche, daß im Innern kein Feld besteht, also $U =$ konst wird. Gesucht wird die Verteilung der Ladung über die Oberfläche und das Potential, das der Leiter gegenüber dem Unendlichen bzw. gegenüber der Erde oder anderen sehr fernen Leitern annimmt. Nach § 1, (5) ist die Ladungsverteilung bestimmt, wenn das elektrische Feld bzw. seine Potentialfunktion im Äußeren des Leiters bekannt ist.

Ganz elementar liegen die Verhältnisse im Falle eines kugelförmigen Leiters vom Radius a, der in einem Dielektrikum von der Konstanten ε liegt. Die Potentialfunktion genügt im Äußeren der Gleichung $\Delta U = 0$ und muß in diesem Falle Kugelsymmetrie haben, d. h. nur vom Abstand r vom Mittelpunkt abhängen. Nach 1. Bd., VIII, § 2 ist, abgesehen

von einer additiven willkürlichen Konstanten, die einzige diesen Bedingungen genügende Funktion

$$U = m/r, \tag{1}$$

mit einer zu bestimmenden Konstanten m. Die Ladungsdichte an der Oberfläche ist nach § 1, (5) in diesem Falle $\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dU}{dr} = \frac{\varepsilon m}{4\pi r^2}$ für $r = a$. Die Gesamtladung ist also $e = 4\pi a^2\sigma = \varepsilon m$. Ist e vorgegeben, so ist damit m bestimmt. Im Innern der Kugel nimmt das Potential den konstanten Wert $U_0 = m/a$ an (vgl. auch 1. Bd., XIV, § 2, **1**). Denkt man sich den Potentialwert U_0 vorgegeben, so wird die Ladung: $e = \varepsilon m = \varepsilon a U_0$. Das Verhältnis $K = e : U_0$ heißt die Kapazität des Leiters gegen das Unendliche und nimmt im vorliegenden Falle den Wert $K = \varepsilon a$ an.

Eine allgemeinere homogene Aufgabe liegt vor, wenn zwischen zwei oder mehreren für sich abgeschlossenen Leitern, die in ein Dielektrikum eingebettet sind, die Spannung vorgegeben ist und die entsprechende Ladung gesucht wird. Das einfachste Beispiel ist hier der Kugelkondensator, d. h. zwei konzentrische metallische Hohlkugeln, zwischen denen der Potentialunterschied U_0 sei. Das Zwischenmedium erstrecke sich vom Radius $r = a$ bis $r = b$ und habe die Dielektrizitätskonstante ε.

Die in diesem Zwischenraum kugelsymmetrische Potentialfunktion hat die Form:

$$U = \frac{m}{r} + n.$$

Es ist also

$$U_0 = U(a) - U(b) = \frac{m}{a} - \frac{m}{b} = m\,\frac{b-a}{ab}.$$

Die Ladungsdichte auf der inneren Kugel wird $\sigma_a = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial r}\,(r = a)$ $= \frac{\varepsilon m}{4\pi a^2}$, die auf der äußeren $\sigma_b = +\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\varepsilon m}{4\pi b^2}$, wobei der Vorzeichenunterschied daher rührt, daß auf der Kugelfläche b die nach dem Felde hin gerichtete Normale die Richtung abnehmender r hat. Die Gesamtladung auf jeder der beiden Kugelflächen nimmt also die Werte $\pm\varepsilon m = \pm\varepsilon\frac{ab}{b-a}U_0$ an, so daß $K_{ab} = \varepsilon\frac{ab}{(b-a)}$ als „gegenseitige Kapazität“ der beiden Kugelschalen zu betrachten ist. Mit abnehmendem Abstand $b - a$ der beiden Kugeln wächst sie unbegrenzt an.

2. Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoid. Die unter 1 gestellte homogene Aufgabe ist für den Fall eines Ellipsoids bereits in den Formeln vom 1. Bd., XIV, § 2, **4**, **5** gelöst. Die Achsen des Ellipsoids

seien a, b, c, die gesamte Ladung e. Dann erfüllt, wie l. c. (21), (23) bewiesen, eine Belegung, die mit der Flächendichtigkeit

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} \tag{2}$$

auf der Oberfläche verteilt ist, die Bedingung, daß ihr Potential im Innern des Ellipsoids konstant ist, und ergibt die richtige Gesamtladung e.

Als Grenzfall folgt daraus die Verteilung auf einer elliptischen Scheibe, wenn wir c zu 0 übergehen lassen. Da hierbei aber zugleich z auf der Oberfläche zu 0 übergeht, so müssen wir zunächst z mittels der Gleichung des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ eliminieren. Wir schreiben also (2) in der Form:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi ab\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)}} \tag{3}$$

und schließlich für $c=0$:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi ab\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}. \tag{3'}$$

Diese Ladungsdichte befindet sich aber nun auf jeder der beiden Seiten der Scheibe und die Dichte pro Flächeneinheit der Scheibe ist daher das Doppelte:

$$\sigma^* = \frac{e}{2\pi\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}$$

und speziell für die Kreisscheibe ($a=b$), mit $r^2=x^2+y^2$:

$$\sigma^* = \frac{e}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}}. \tag{4}$$

Am Rande der elliptischen bzw. Kreisscheibe wird diese Dichte unendlich, während ihr Flächenintegral über die Scheibe durch elementare Integration sich in der Tat zu e ergibt.

Berechnet man die zu dieser Ladungsverteilung gehörigen Äquipotentialflächen, so findet man eine Schar konfokaler, abgeflachter Rotationsellipsoide, deren Brennkurve eben die Berandung der Kreisscheibe ist. Man überzeugt sich davon durch direkte Integration oder allgemeiner durch Einführung elliptischer Koordinaten; vgl. hierüber IX, § 3, **3.** Da jede Äquipotentialfläche selbst als ein Leiter aufgefaßt werden kann, so findet man damit auch gleichzeitig das zu abgeflachten Rotationsellipsoiden gehörige Potentialfeld.

In ähnlicher Weise läßt sich das Feld für verlängerte Rotationsellipsoide einfach berechnen. Wir nehmen zunächst $b = c$, $y^2 + z^2 = r^2$, so wird nach (2)

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{r^2}{b^4}}}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1.$$

Für den Fall $b = 0$, in dem das Ellipsoid auf ein gerades Linienstück zusammenschrumpft, wird dann:

$$\lim_{b \to 0} \sigma = \lim_{b \to 0} \frac{e}{4\pi a b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{e}{4\pi a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{e}{4\pi a r},$$

und folglich ist in diesem Falle die Ladung pro Längeneinheit der Achse $2\pi r\sigma = e/2a$ konstant. Wir haben also den Fall gleichförmiger Ladungsbelegung eines Stückes der x-Achse zwischen $-a$ und $+a$ mit der Gesamtladung e. Das Potential dieser Ladungsverteilung im Punkte x, r ist durch elementare Integration:

$$U = \frac{e}{2a} \int_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 + (x - \xi)^2}} = \frac{e}{2a} \left(\operatorname{Ar\,Sin} \frac{a - x}{r} + \operatorname{Ar\,Sin} \frac{a + x}{r} \right).$$

Setzt man $u = \operatorname{Cof}\left(\frac{2a}{e} U\right)$, so findet man durch Umrechnung die Äquipotentialflächen in der Form:

$$\frac{u - 1}{2} r^2 + \frac{u - 1}{u + 1} x^2 = a^2,$$

und das ist, da $\frac{u + 1}{u - 1} - \frac{2}{u - 1} = 1$, in der Tat eine Schar konfokaler verlängerter Rotationsellipsoide mit der gemeinsamen Brennlänge a. Man kann also das zu einem solchen Ellipsoid gehörige Feld dadurch berechnen, daß man die Ladung e gleichmäßig auf die Verbindungsstrecke der Brennpunkte verteilt.

Über die Darstellung durch elliptische Koordinaten, auch für den Fall dreiachsiger Ellipsoide, s. Heine, Handbuch der Kugelf., Bd. 2, II, Kap. 3.

3. Inhomogene Grundaufgaben. Wenn Leiter in ein gegebenes elektrisches Feld gebracht werden, so werden in denselben Ladungen induziert, also ein Zusatzfeld erregt, das so beschaffen ist, daß es das ursprünglich vorgegebene im Innern der Leiter gerade aufhebt. Die Summe der induzierten Ladungen muß dabei, nach dem Grundsatz e) in § 1, verschwinden, wenn die Leiter abgeschlossen sind. Zu suchen ist dann das Potential, das jeder der Leiter annimmt, und die Verteilung der Ladung auf seiner Oberfläche. Erstreckt sich aber ein Leiter ins Un-

endliche, so ist sein Potential vorgegeben gleich dem des Unendlichfernen, das der Definition gemäß als 0 angenommen werden muß[1]). Der gleiche Fall liegt auch dann vor, wenn ein Leiter durch einen dünnen Draht mit der als fern gedachten Erde verbunden ist, wobei im übrigen die Wirkung des Drahtes vernachlässigt werden kann. In diesem zweiten Falle ist also das Potential eines Leiters vorgegeben; gesucht ist die Summe und die Verteilung der Ladungen auf ihm. Natürlich sind mannigfache Kombinationen dieser beiden Aufgaben möglich, die z. B. vorliegen, wenn einige Leiter abgeschlossen, andere geerdet sind.

Das gegebene elektrische Feld sei $\mathfrak{E}_0$, seine Potentialfunktion U_0. Wir suchen dann die Lösung in der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1, \quad U = U_0 + U_1, \tag{5}$$

wobei das Zusatzfeld $\mathfrak{E}_1$ im Gebiet außerhalb der Leiter ladungsfrei sein soll. Es ist also nach (3) von § 1:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_1 = -\Delta U_1 = 0 \tag{6}$$

außerhalb der Leiter.

Im Innern jedes Leiters und daher auch längs seiner Oberfläche nimmt das Potential einen konstanten Wert c_i an, so daß hier

$$U_0 + U_1 = c_i. \tag{7}$$

Sei es nun, daß diese Konstante vorgegeben ist oder erst aus den Bedingungen der Aufgabe (Gesamtladung) sich ergibt; jedenfalls folgt aus dem Verschwinden der Feldstärke im Innern des Leiters wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente nach (7) von § 1, daß auch für das äußere Feld die Tangentialkomponente längs der Oberflächen der Leiter verschwinden muß:

$$\mathfrak{E}_{0s} + \mathfrak{E}_{1s} = 0. \tag{8}$$

Dies ist die Randbedingung für das zu suchende äußere Feld $\mathfrak{E}_1$, die auch in der äquivalenten, wegen der Stetigkeit auf das Außengebiet übertragbaren Form (7) geschrieben werden kann. Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß in unendlicher Entfernung das Zusatzfeld verschwinden muß, da es aus den auf dem Leiter im Endlichen induzierten Ladungen gebildet ist. Da in (8) $\mathfrak{E}_{0s}$ oder in (7) U_0 eine vorgegebene Funktion ist, so ist diese Randwertaufgabe eine inhomogene.

Ein sehr einfaches Beispiel ist der Fall einer ungeladenen leitenden Kugel in einem elektrischen Parallelfeld, der analytisch mit der im 1. Bd., XVII, § 3, 2 behandelten Strömungsaufgabe nahezu übereinstimmt.

---

[1]) Mit Ausnahme der Fälle, in denen die felderzeugenden Quellen selbst im Unendlichen anzunehmen sind, wie z. B. bei einem Parallelfeld.

Die Kugel habe den Radius a und es sei in auf ihren Mittelpunkt bezogenen Koordinaten

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = r\cos\vartheta.$$

Das gegebene Parallelfeld habe die Richtung der x-Achse und seine Stärke sei $\mathfrak{E}_0$. Seine Potentialfunktion ist also:

$$U_0 = -\mathfrak{E}_0 x = -\mathfrak{E}_0 r\cos\vartheta. \tag{9}$$

Das gesuchte Zusatzpotential U_1 muß nun die Gl. (6) erfüllen, für $r = \infty$ zu 0 abnehmen und längs der Kugeloberfläche $r = a$ nach (7) ergeben:

$$U_1(a) = c + \mathfrak{E}_0 a\cos\vartheta.$$

So wie bei der zitierten Strömungsaufgabe ist, bis auf die hier unbestimmt bleibende Konstante c, die einzige Funktion, die diesen Bedingungen genügt:

$$U_1(x, y, z) = \frac{\mathfrak{E}_0 a^3\cos\vartheta}{r^2}, \tag{10}$$

so daß im ganzen sich als Lösung ergibt:

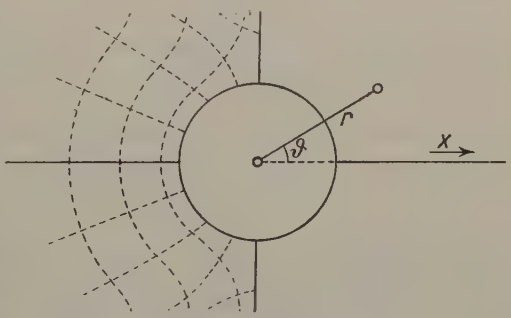
$$U = -\mathfrak{E}_0\cos\vartheta\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right).$$

Die Ladungsdichte längs der Oberfläche wird

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial r}\,(r=a) = \frac{\mathfrak{E}_0}{4\pi}\cos\vartheta\left(1 + 2\,\frac{a^3}{r^2}\right)_{r=a} = \frac{3\,\mathfrak{E}_0\cos\vartheta}{4\pi},$$

woraus ersichtlich ist, daß, in der Richtung des Feldes gesehen, auf der Vorderseite negative, auf der Rückseite positive Ladung induziert wird. Der konstante Wert des Potentials auf der Kugelfläche $r = a$ wird hier $U(a, \vartheta) = 0$, welchen Wert das Potential auch längs der ganzen Ebene $\vartheta = \pi/2$ annimmt, die senkrecht auf dem gegebenen Parallelfeld steht (vgl. Fig. 13).

Fig. 13.



4. Spiegelung und elektrische Bilder. Elektrostatische Aufgaben der vorbesprochenen Art, die sich auf Ebenen oder Kugeln als Begrenzungsflächen beziehen, können häufig durch Spiegelungsverfahren behandelt werden, die den im 1. Bd., III und XVI besprochenen mathematischen Verfahren entsprechen. Wenn z. B. ein Raumgebiet, in dem ein elektrisches Feld untersucht werden soll, von einer leitenden Ebene, etwa

der Erdoberfläche oder einer ebenen Metallfläche, begrenzt ist, so muß das Potential U des Feldes längs dieser Ebene einen konstanten Wert annehmen. Diese Bedingung läßt sich durch Spiegelung an der Ebene erfüllen, wodurch die Aufgabe, die ursprünglich nur für den von der Ebene begrenzten Halbraum gestellt war, in eine ähnliche für den ganzen Raum verwandelt wird. Physikalische Realität behält aber nur das Feld in dem gegebenen Halbraum, der der „physikalische Raum" heißen soll.

Die leitende Grenzebene sei die Ebene $z = 0$ und der physikalische Raum das Gebiet $z > 0$. Es sei dann irgend eine Potentialfunktion U_0 bekannt, die außer von den unabhängigen Koordinaten x, y, z noch von Parametern ξ_i, η_i, ζ_i, z. B. von den Koordinaten der felderzeugenden Quellen, abhängt. Sie genügt der Gleichung $\Delta U_0 = -4\pi\varrho$, wenn ϱ die vorgegebene Ladungsdichte als Funktion von x, y, z. Dann genügt die gespiegelte Funktion:

$$U_1(x, y, z) = -U_0(x, y, -z) \tag{11}$$

der Potentialgleichung

$$\Delta U = +4\pi\varrho(x, y, -z);$$

man erhält sie, indem man die Quellpunkte ξ_i, η_i, ζ_i selbst an der Ebene spiegelt und das Feld dieser gespiegelten Ladungsverteilung bildet. Längs der Ebene $z = 0$ ist damit $U_0 + U_1 = 0$; die Potentialfunktion $U = U_0 + U_1$ erfüllt somit längs der Ebene $z = 0$ die gestellte Bedingung (7), und wenn die Quellen des Feldes U_0 im physikalischen Raum lagen, so liegen die von U_1 außerhalb desselben, so daß im physikalischen Raum $\Delta U_1 = 0$, wie zu fordern ist.

Sei z. B. eine einzelne Punktladung e im Punkte ξ, η, ζ $(\zeta > 0)$ gegeben, und ihre Induktion auf die leitende Ebene $z = 0$ gesucht. Man erhält dann die Lösung:

$$\left\{\begin{aligned} U = U_0 + U_1 = &\frac{e}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \\ &- \frac{e}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

für den Halbraum $z > 0$. Für den Halbraum $z < 0$ dagegen gilt $U = 0$. Die induzierte Ladung ist in Wahrheit längs der Oberfläche $z = 0$ verteilt. Ihre Dichte berechnet sich zu

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)_{z=0} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{z=0} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{e}{4\pi}\frac{\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}^3}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Um die Summe dieser verteilten Ladungen zu berechnen, setzen wir $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\mathfrak{r}^2$ und finden elementar:

$$2\pi\int_0^\infty \sigma(\mathfrak{r})\,\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r} = -e\xi\int_0^\infty \frac{\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}}{(\mathfrak{r}^2+\xi^2)^{3/2}} = -e.$$

Sie ist also entgegengesetzt gleich der induzierenden Ladung, wie man auch mittels des Gaußschen Satzes unmittelbar aus (12) ableiten könnte.

Wenn der physikalische Raum nicht durch eine Ebene, sondern durch eine Kugelfläche begrenzt ist, so führt die „Spiegelung an der Kugel“ (vgl. 1. Bd., XVII, § 2, 7) zu einer direkten Verallgemeinerung dieses Verfahrens. Allgemein kommt es darauf an, daß der Raum durch eine Fläche in zwei Teile eingeteilt ist und nun zwei Funktionen U_0, U_1 gesucht werden, die längs der Grenzfläche entgegengesetzt gleiche Werte annehmen, und von denen die eine in einem, die andere in dem anderen Teilgebiet eine reguläre Potentialfunktion ist. Die Kugel ist vor anderen Flächen dadurch ausgezeichnet, daß jede der Funktionen U_0, U_1 in geschlossener Form aus der anderen ermittelt werden kann.

Wenn a der Radius der Kugel ist, und r, φ, ϑ räumliche, auf ihren Mittelpunkt bezogene Polarkoordinaten bedeuten, so kann man aus einer gegebenen Potentialfunktion U_0 nach Gl. (16), l. c., immer eine andere U_1 und umgekehrt gewinnen durch die reziproke Beziehung:

$$(14)\qquad \begin{cases} U_1(r,\varphi,\vartheta) = -\dfrac{a}{r}\,U_0\left(\dfrac{a^2}{r},\varphi,\vartheta\right), \\ U_0(r,\varphi,\vartheta) = -\dfrac{a}{r}\,U_1\left(\dfrac{a^2}{r},\varphi,\vartheta\right). \end{cases}$$

Hierdurch ist der Funktionswert U_0 im Punkte r, φ, ϑ in Beziehung gebracht zu dem Funktionswert U_1 im „Spiegelpunkt“ a^2/r, φ, ϑ, der dem ersteren Punkt nach der Transformation mit reziproken Radien zugeordnet ist, und außerdem ist offensichtlich $U_0+U_1=0$ längs der Kugelfläche $r=a$. Die beiden so zugeordneten Potentialfunktionen bezeichnen wir selbst als ihre Spiegelbilder in bezug auf die Kugel vom Radius $r=a$.

Ein Beispiel hierzu ist das bereits im 1. Bd. XIV, § 2, 3 behandelte „Potential der Influenzladung“. Eine ungeladene leitende Kugel soll in das Feld einer punktförmigen elektrischen Ladung e gebracht werden, die sich außerhalb der Kugel im Punkt A befindet. a, r, φ, ϑ sollen in bezug auf die Kugel die gleiche Bedeutung haben wie oben, und R sei der Abstand der Punktladung vom Kugelmittelpunkt, die außerdem auf dem Strahl $\vartheta=0$ liegen möge. $\mathfrak{r}(r,\vartheta)$ sei der Abstand eines Raumpunktes P von dieser Ladung (vgl. Fig. 14).

Dem Punkte P ist dann nach der Transformation mit reziproken Radien der Punkt P' mit den Koordinaten $r' = a^2/r$, φ, ϑ zugeordnet und dessen Abstand vom Punkte A sei $\mathfrak{r}'$. Es ist somit:

$$(15) \quad \mathfrak{r} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}, \quad \mathfrak{r}' = \sqrt{R^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2R\frac{a^2}{r}\cos\vartheta}.$$

Das ursprüngliche Feld der Ladung hatte die Potentialfunktion

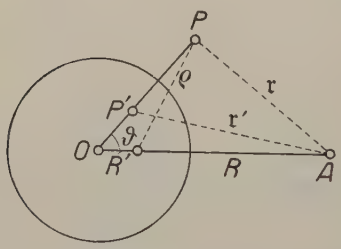
$$(16) \qquad U_0 = \frac{e}{\mathfrak{r}}.$$

Das Spiegelbild dieser Funktion, im obigen Sinne, wird

$$(17) \quad \begin{cases} U_1 = -\dfrac{a}{r}\dfrac{e}{\mathfrak{r}'} = -\dfrac{ae}{r\sqrt{R^2 + \dfrac{a^4}{r^2} - 2R\dfrac{a^2}{r}\cos\vartheta}} \\ \qquad = -\dfrac{ae}{R\sqrt{r^2 + \dfrac{a^4}{R^2} - 2\dfrac{a^2}{R}r\cos\vartheta}} = -\dfrac{ae}{R.\varrho}. \end{cases}$$

Hier bedeutet ϱ, die Wurzel im Nenner der letzten Formel, den Abstand des Punktes P vom Punkte A', dem Spiegelbild zu A in bezug auf den Kreis. Das heißt aber: die gespiegelte Funktion U_1 ist wie die ursprüngliche U_0 gleichfalls eine einfache Polfunktion; ihr Pol ist selbst der Spiegelpunkt zu dem gegebenen Pol, nämlich der Punkt $R' = a^2/R$, $\vartheta = 0$, und ihre Ladung ist $e' = -ae/R$. Da sich die allgemeinste Potentialfunktion aus solchen Polfunktionen (Coulombschen Feldern) zusammensetzen läßt (vgl. § 1), so kann diese Rechnung übrigens auch als einfachster Beweis für die Spiegelungsregel betrachtet werden.

Fig. 14.



Die Funktion U_1 ist im physikalischen Raum ($r > a$) aufzufassen als Feld einer über die Kugeloberfläche verteilten Ladungsdichte, deren Summe nach dem Gaußschen Satz (1. Bd., II, § 3) gleich der fingierten Ladung e' wird. Das 4π-fache der wahren Ladungsdichte längs der Oberfläche wird

$$(18) \quad \begin{cases} 4\pi\sigma = -\dfrac{\partial(U_0 + U_1)}{\partial r}_{(r=a)} \\ \qquad = \dfrac{e(r - R\cos\vartheta)}{\mathfrak{r}^3} - \dfrac{a}{R}\dfrac{e(r - R'\cos\vartheta)}{\varrho^3}. \end{cases}$$

Aus den obigen Definitionen folgt aber, wenn $r = a$, die für die Spiegelung bekannte geometrische Beziehung: $\varrho : \mathfrak{r} = a : R$, und ferner

ist $RR' = a^2$. Mittels dieser Gleichungen fallen in (19) die Glieder mit dem Faktor $\cos\vartheta$ fort und es bleibt die Ladungsdichte:

$$4\pi\sigma = -\frac{ea\left(\frac{a}{R}-1\right)}{r^3}, \tag{19}$$

die aussagt, daß die Ladungsdichte der dritten Potenz des Abstands von dem felderzeugenden Pol A umgekehrt proportional ist (vgl. l. c.).

Die Funktion $U^* = U_0 + U_1$ erfüllt die geforderten elektrostatischen Bedingungen im Außenraum und am Rande der Kugel; diese Lösung entspricht aber noch nicht dem Falle der ungeladenen Kugel, sondern der Bedingung, daß das Potential sowohl auf der Kugeloberfläche als auch im Unendlichen verschwindet, also dem Falle der geerdeten Kugel. Die induzierte Ladung der Kugel wurde hier zu $e' = -ea/R$ berechnet. Um nun das Feld der ungeladenen Kugel zu finden, bilden wir die Potentialfunktion

$$U = U^* - \frac{e'}{r} = U_0 + U_1 + \frac{ae}{rR}, \tag{20}$$

die durch einen zusätzlichen Pol im Kugelmittelpunkt mit der Ladung $-e'$ aus U^* hervorgeht. Da längs der Kugelfläche $U^* = 0$, so wird jetzt längs der Kugeloberfläche

$$U(a, \varphi, \vartheta) = -\frac{e'}{a} = \frac{e}{R}, \tag{21}$$

also gleich dem Wert der ursprünglichen Potentialfunktion U_0 an der Stelle des Kugelmittelpunkts. Diesen konstanten Wert nimmt das Potential im Innern der Kugel an.

§ 3. Elektrostatisches Gleichgewicht auf zwei geladenen Kugeln.

1. Aufgabe und Prinzip der Lösung[1]**).** Mit Hilfe des in § 2, 4 besprochenen Spiegelungsprinzips läßt sich die Aufgabe lösen: zwei metallische Kugeln werden auf vorgegebene Potentiale — sie sollen U_a und U_b heißen — geladen. Gesucht ist die Größe der Ladungen und ihre Verteilung auf der Oberfläche beider Kugeln, sowie das Feld im umgebenden Raum.

Diese Aufgabe läßt sich zunächst in zwei Schritte zerlegen und dadurch vereinfachen: Der erste ist der spezielle Fall, daß nur U_a von 0 verschieden, aber $U_b = 0$ ist, der vorliegt, wenn die zweite

[1]) Die Anwendung des Spiegelungsverfahrens auf diese Aufgabe rührt von W. Thomson her, die unten folgende analytische Durchführung im Prinzip von Riemann in Riemann-Hattendorf, Vorlesungen über Schwere, Elektrizität und Magnetismus. Hannover 1876.

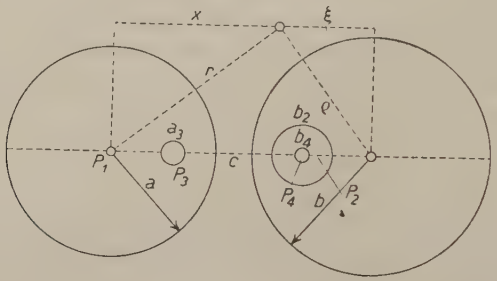
Kugel geerdet ist. Der zweite ist der umgekehrte: $U_a = 0$, aber U_b von 0 verschieden, der der Erdung der ersten Kugel entspricht. Der allgemeine Fall wird durch lineare Superposition der beiden Spezialfälle gewonnen; wir können uns daher auf die Durchführung des ersten beschränken.

Der Radius der ersten Kugel (vgl. Fig. 15) sei a, der der zweiten b, der gegenseitige Abstand der Mittelpunkte c, und es werde

$$c > a + b$$

vorausgesetzt, so daß die beiden Kugeln sich nicht berühren. Wir legen die x-Achse in die Verbindungslinie beider Mittelpunkte; um diese

Fig. 15.



Achse wird das Feld Rotationssymmetrie haben. x, y, z seien Koordinaten, bezogen auf den ersten Mittelpunkt, und ξ, y, z diejenigen auf den zweiten Mittelpunkt, und zwar x und ξ so gezählt, daß

(1) $$x + \xi = c.$$

Ferner sei

(2) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}.$$

Für die gesuchte Potentialfunktion wird gefordert:

(3a) $U = U_a$ für $r = a$, (3b) $U = 0$ für $\varrho = b$.

Wir gehen nun aus von der einfachsten Potentialfunktion, die nur die Bedingung (3a) erfüllt:

(4) $$U_1 = \frac{aU_a}{r}$$

und wenden ein alternierendes Verfahren sukzessiver Spiegelungen an den beiden Kugelflächen an. Um die Bedingung (3b) zu erfüllen, müssen wir eine durch Spiegelung an der Kugel b gebildete Funktion U_2 hinzufügen. Zu dem Zwecke bezeichnen wir allgemein die durch den Radius r und auf den ersten Mittelpunkt bezogene Polarkoordinaten (sie mögen φ_a, ϑ_a heißen) ausgedrückten Funktionen durch die Buchstaben U_i, dagegen die nämlichen Funktionen, wenn sie durch den Radius ϱ und auf den zweiten Mittelpunkt bezogene Polarkoordinaten

(φ_b, ϑ_b) ausgedrückt sind, durch den Buchstaben W. Die durch Spiegelung an b entstehende Funktion ist dann (diese Transformation heiße kurz Spiegelung b):

$$(5) \qquad U_2(r, \varphi_a, \vartheta_a) = W_2(\varrho, \varphi_b, \vartheta_b) = -\frac{b}{\varrho} W_1\left(\frac{b^2}{\varrho}, \varphi_b, \vartheta_b\right).$$

Da U_1 (bzw. W_1) in (4) als eine einfache Polfunktion angenommen ist, so wird nach § 2, **3** auch U_2 eine einfache Polfunktion mit veränderter Lage und Stärke des Pols.

Die Funktion $U_1 + U_2$ erfüllt jetzt die Bedingung (3 b), aber nicht mehr die Bedingung (3 a). Um auch diese wieder zu erfüllen, müssen wir wieder die aus U_2 durch Spiegelung an der Kugel a (kurz: Spiegelung a) entstehende Funktion

$$U_3(r, \varphi_a, \vartheta_a) = -\frac{a}{r} U_2\left(\frac{a^2}{r}, \varphi_a, \vartheta_a\right)$$

hinzufügen, die gleichfalls wieder eine einfache Polfunktion ist, und haben dann in $U_1 + U_2 + U_3$ eine Funktion, die wieder die Bedingung (3 a) aber nicht mehr (3 b) erfüllt. Die Fortsetzung dieses alternierenden Verfahrens muß, falls es konvergiert, schließlich die gesuchte Lösung in Form einer unendlichen Funktionenfolge ergeben.

2. Durchführung der Lösung. Die Funktion U_1 hat einen Pol von der Stärke $a\,U_a$ im Anfangspunkt $r = 0$ (Punkt P_1 in Fig. 15). Daher hat die Funktion U_2 ihren Pol in dem durch die Spiegelung b aus $r = 0$ entstehenden Punkte, der P_2 heißen möge und im Innern der Kugel b liegt. Durch Spiegelung a geht diese wieder in die einfache Polfunktion U_3, mit einem Pol P_3 im Innern der Kugel a, über usw.

Um die Lage der Pole näher zu erkennen, beachten wir, daß die Kugel a durch die Spiegelung b in eine ganz im Innern von b gelegene Kugel b_2 übergeht, die den Mittelpunkt $\varrho = 0$ ausschließt. Im Innern dieser Kugel liegt P_2. Durch die Spiegelung a geht diese in eine ganz im Innern von a gelegene Kugel a_3 über, die ihrerseits den Punkt P_1 $(r = 0)$ ausschließt. In ihrem Innern liegt P_3. Durch die nochmalige Spiegelung b geht die Kugel a_3 in eine im Innern von b_2 gelegene Kugel b_4 über, die ihrerseits den Punkt P_2 ausschließt und in ihrem Innern liegt P_4, usw. Durch Fortsetzung erkennt man, daß im Innern von a eine Reihe ineinandergeschachtelter Kugeln entsteht, $a_3, a_5, \ldots$, und zwischen je zwei aufeinanderfolgenden, die Kugel a selbst mitgerechnet, liegen sukzessive die Pole $P_1, P_3, P_5 \ldots$ Ebenso entstehen im Innern von b die ineinandergeschachtelten Kugeln $b_2, b_4 \ldots$, und zwischen je zweien derselben liegen sukzessive die Pole $P_2, P_4, \ldots$ Die beiden Reihen von Polen müssen sich daher schließlich je einem festen Punkt, $P_{a\infty}$ bzw. $P_{b\infty}$, annähern. Diese beiden Punkte sind dadurch ausgezeichnet, daß sie wechselseitig sowohl

durch Spiegelung a als auch durch Spiegelung b auseinander hervorgehen. Die nächste Aufgabe ist daher die, diese beiden sich gegenseitig entsprechenden Punkte zu ermitteln.

Wir betrachten zu dem Zwecke den Verlauf der Polfunktionen U_i bzw. W_i nur längs der die Kugelmittelpunkte verbindenden x-Achse. Die Funktionen U_i mit ungeradem Index $i = 2k-1$, deren Pole im Innern der Kugel a liegen, schreiben wir hier:

$$U_{2k-1} = \frac{U_a}{p_{2k-1}\frac{x}{a} + q_{2k-1}}. \tag{6}$$

Von diesem Ausdruck ist, um die Funktion längs der ganzen x-Achse darzustellen, der absolute Betrag zu wählen. Um hieraus W_{2k} zu erhalten, ist nach (2) zu schreiben:

$$W_{2k-1} \equiv U_{2k-1} = \frac{U_a}{p_{2k-1}\frac{(c-\xi)}{a} + q_{2k-1}}.$$

Sodann nach der Spiegelungsregel b:

$$W_{2k} = \frac{-bU_a}{\xi\left[p_{2k-1}\left(\frac{c-b^2/\xi}{a}\right)+q_{2k-1}\right]} = \frac{-bU_a}{\left(p_{2k-1}\frac{c}{a}+q_{2k-1}\right)\xi - p_{2k-1}\frac{b^2}{a}}. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck sei nun gesetzt:

$$W_{2k} = \frac{U_a}{p_{2k}\frac{\xi}{b} + q_{2k}}. \tag{7'}$$

Die Größen p_{2k-1}, q_{2k-1} können hier als homogene Koordinaten der ungeradzahligen, die Größen p_{2k}, q_{2k} analog als homogene Koordinaten der geradzahligen Pole aufgefaßt werden. Für sie erhält man aus (7), (7') die Rekursionsformeln:

$$p_{2k} = -\frac{c}{a}p_{2k-1} - q_{2k-1}; \quad q_{2k} = \frac{b}{a}p_{2k-1}. \tag{8}$$

Genau ebenso, wie die Funktionen U_{2k} aus U_{2k-1}, nur unter Vertauschung der beiden Kugeln (Spiegelung a statt b), entsteht nun die Funktion U_{2k+1} aus U_{2k}. Die Koeffizienten der entsprechenden Formeln entstehen also auch aus (8) durch Vertauschung von a mit b, und so findet man:

$$p_{2k+1} = -\frac{c}{b}p_{2k} - q_{2k}; \quad q_{2k+1} = \frac{a}{b}p_{2k}. \tag{9}$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) ergeben sich schließlich die Rekursionsformeln für die Koordinaten der ungeradzahligen Pole P_{2k+1} allein:

$$(10)\qquad \begin{cases} p_{2k+1} = \dfrac{c^2-b^2}{ab}\, p_{2k-1} + \dfrac{c}{b}\, q_{2k-1}, \\ q_{2k+1} = \dfrac{c}{b}\, p_{2k-1} - \dfrac{a}{b}\, q_{2k-1}. \end{cases}$$

Diese Rekursionsformeln sind nun noch unabhängig von der Wahl des ersten Poles, von dem die Reihe ausgeht. Sie bestimmen daher zugleich auch die Koordinaten p, q der oben definierten, durch gegenseitige Spiegelung an a und b sich selbst entsprechenden Punkte $P_{a\infty}$, $P_{b\infty}$ in folgender Form:

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha p = \dfrac{c^2-b^2}{ab}\, p + \dfrac{c}{b}\, q, \\ \alpha q = -\dfrac{c}{b}\, p - \dfrac{a}{b}\, q. \end{cases}$$

Für das Transformationsverhältnis α ergibt sich hieraus nach Elimination von p, q die quadratische Gleichung

$$(11')\qquad \alpha^2 + \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\,\alpha + 1 = 0,$$

und deren beide Wurzeln α_1, α_2 ergeben, in (11) eingesetzt, je einen der beiden gesuchten Punkte $P_{a\infty}$, $P_{b\infty}$. Daß die beiden Wurzeln reell und voneinander verschieden sind, folgt durch Bildung der Diskriminante:

$$\Delta = \left(\frac{c^2-(a^2+b^2)}{ab}\right)^2 - 4 = \frac{(c^2-(a+b)^2)\,(c^2-(a-b)^2)}{a^2b^2},$$

die > 0 ist wegen der Voraussetzung $c > a+b$. Es sei deshalb mit Rücksicht auf $\alpha_1 . \alpha_2 = 1$ etwa $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 < 1$ gewählt, und die aus (11) folgenden homogenen Koordinaten seien für den ersten der beiden ausgezeichneten Punkte (α_1):

$$(12)\qquad q^{(1)} = 1;\quad p^{(1)} = -\frac{a+\alpha_1 b}{c}\, q^{(1)} = -\frac{a+\alpha_1 b}{c};$$

für den zweiten Punkt (α_2):

$$(12')\qquad q^{(2)} = 1;\quad p^{(2)} = -\frac{a+\alpha_2 b}{c}\, q^{(2)} = -\frac{a+\alpha_2 b}{c}.$$

Die allgemeine Lösung der Rekursionsformeln (10) können wir nun unter Einführung zweier Konstanten $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ linear aus diesen beiden „partikulären“ Lösungen zusammensetzen, indem wir die Anfangswerte p_1, q_1 ansetzen:

$$(13)\qquad p_1 = c^{(1)}\, p^{(1)} + c^{(2)}\, p^{(2)};\quad q_1 = c^{(1)}\, q^{(1)} + c^{(2)}\, q^{(2)}.$$

Dann ergeben die Rekursionsformeln (10), unter Berücksichtigung von (11), zunächst für $k = 1$:

$$p_3 = c^{(1)}\alpha_1 p^{(1)} + c^{(2)}\alpha_2 p^{(2)}; \quad q_3 = c^{(1)}\alpha_1 q^{(1} + c^{(2)}\alpha_2 q^{(2)}.$$

und allgemein:

(14) $p_{2k-1} = c^{(1)}\alpha_1^{k-1} p^{(1)} + c^{(2)}\alpha_2^{k-1} p^{(2)}; \quad q_{2k-1} = c^{(1)}\alpha_1^{k-1} q^{(1)} + c^{(2)}\alpha_2^{k-1} q$.

Es bleiben also, um die Lösung anzugeben, nur noch die beiden Konstanten $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ aus (13) zu bestimmen. Nun war die Polfunktion, von der wir ausgingen, die Funktion U_1 nach Gl. (4), oder längs der x-Achse: $U_1 = \dfrac{a\,U_a}{|x|}$. Deshalb ist $p_1 = 1$, $q_1 = 0$. Setzt man diese Zahlen in (13) ein und benutzt die Werte (12), (12'), so ergibt die Auflösung:

$$c^{(1)} = -\,c^{(2)} = \frac{c}{b(\alpha_2 - \alpha_1)}, \tag{15}$$

und die Gl. (14) nehmen die explizite Form an:

$$\begin{cases} p_{2k-1} = \dfrac{a}{b}\,\dfrac{\alpha_1^{k-1} - \alpha_2^{k-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + \dfrac{\alpha_1^k - \alpha_2^k}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ q_{2k-1} = -\dfrac{c}{b}\,\dfrac{\alpha_1^{k-1} - \alpha_2^{k-1}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{cases} \tag{16}$$

Derjenige Teil der gesuchten Potentialfunktion U [bzw. ihres Verlaufs $U(x)$ längs der x-Achse], der aus den im Innern der Kugel a gelegenen Polen P_{2k-1} entsteht, lautet also:

$$U^{(a)} = \frac{a\,U_a}{|x|} + U_a(\alpha_1 - \alpha_2)\sum_2^\infty{}^k \frac{1}{\left|(\alpha_1^{k-1} - \alpha_2^{k-1})\left(\dfrac{x}{b} - \dfrac{c}{b}\right) + (\alpha_1^k - \alpha_2^k)\dfrac{x}{a}\right|}. \tag{16'}$$

Aus dieser Summenformel ist die Konvergenz des angewandten Verfahrens ersichtlich. Denn wegen der oben angegebenen Bestimmungen $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 < 1$ überwiegen im Nenner mit wachsendem Index immer mehr die Glieder mit dem Faktor α_1^k über die mit dem Faktor α_2^k, und die Reihe konvergiert wie eine geometrische.

Jedes einzelne Glied der Reihe (16') vertritt eine einfache Polfunktion, die man räumlich erhält, indem man statt

$$U_i(x) = \frac{U_a}{\left|p_i\dfrac{x}{a} + q_i\right|} = \frac{a\,U_a}{p_i\left(x + \dfrac{q_i a}{p_i}\right)}$$

setzt:

$$U_i = \frac{a\,U_a}{p_i\sqrt{\left(x + \dfrac{q_i a}{p_i}\right)^2 + y^2 + z^2}}; \tag{17}$$

die zugehörige Teilladung ist also $e_i = a\,U_a/p_i$. Die gesamte (in Wirklichkeit auf der Oberfläche verteilte) Ladung der Kugel a ergibt sich als Summe dieser fiktiven Ladungen der einzelnen Pole zu:

$$e_a = U_a\left[a + (\alpha_1 - \alpha_2)\,a\,b\sum_2^\infty{}^k \frac{1}{a(\alpha_1^{k-1} - \alpha_2^{k-1}) + b(\alpha_1^k - \alpha_2^k)}\right],$$

über deren Konvergenz das gleiche gilt wie oben.

Um noch den Teil $U^{(b)}$ der gesuchten Funktion U zu finden, der aus den Polen im Innern der Kugel b entsteht, benutzen wir die Übergangsformeln (8), die mittels (16) ergeben:

$$p_{2\,k} = -\frac{c}{a}\,\frac{\alpha_1^k - \alpha_2^k}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$q_{2\,k} = \frac{\alpha_1^{k-1} - \alpha_2^{k-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{b}{a}\,\frac{\alpha_1^k - \alpha_2^k}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Also ist nach (7′)

$$(18)\quad \begin{cases} U^{(b)} = \sum_1^\infty{}^k W_{2\,k} \\ \qquad = U_a(\alpha_1 - \alpha_2)\sum_1^\infty{}^k \dfrac{1}{\left|(\alpha_1^{k-1} - \alpha_2^{k-1}) + (\alpha_1^k - \alpha_2^k)\left(-\dfrac{c\,\xi}{a\,b} + \dfrac{b}{a}\right)\right|}. \end{cases}$$

Über die Konvergenz dieser Reihe gilt das nämliche wie oben für die Reihe (16′). Der Verlauf der gesuchten Funktion längs der x-Achse ist damit in der Form $U(x) = U^{(a)} + U^{(b)}$ dargestellt, und in dieser Summe von lauter einfachen Polfunktionen geht man ohne Schwierigkeit nach (17) wieder zu der räumlichen Funktion $U(x, y, z)$ über. Hieraus erhält man für die gesamte Ladung der Kugel b den Ausdruck:

$$(19)\qquad e_b = \sum_k \frac{b\,U_a}{p_{2\,k}} = -U_a(\alpha_1 - \alpha_2)\,\frac{a\,b}{c}\sum_1^\infty{}^k \frac{1}{(\alpha_1^k - \alpha_2^k)}.$$

Die Wiederholung der ganzen Aufgabe, unter den veränderten Bedingungen:

$$U = 0 \text{ für } r = a; \quad U = U_b \text{ für } \varrho = b,$$

ergibt ferner den zweiten Teil der Potentialfunktion, der vom Potential der Kugel b herrührt. Der Grenzfall, daß beide Kugeln sich berühren und infolgedessen $U_a = U_b$ sein muß, läßt sich dann durch Grenzübergang (es wird jetzt $\alpha_1 = \alpha_2$) aus den obigen Formeln gleichfalls gewinnen, worauf wir aber nicht weiter eingehen wollen.

3. Kapazitätskoeffizienten. Für den speziellen Fall $U_b = 0$ ergaben sich im vorangehenden die Ladungen der beiden Kugeln in der Form:

$$e_a = C_{a\,a}\,U_a; \quad e_b = C_{a\,b}\,U_a.$$

Bei Berücksichtigung von U_b allein ($U_a = 0$) würde sich analog ergeben:

$$e_a = C_{ba} U_b; \quad e_b = C_{bb} U_b,$$

und im allgemeinen Falle der Überlagerung ist

$$(20) \quad \begin{cases} e_a = C_{aa} U_a + C_{ba} U_b = (C_{aa} + C_{ba}) U_a + C_{ba}(U_a - U_b), \\ e_b = C_{ab} U_a + C_{bb} U_b = C_{ab}(U_a - U_b) + (C_{ab} + C_{bb}) U . \end{cases}$$

Dabei gilt immer die Symmetriebeziehung:

$$C_{ab} = C_{ba},$$

wie aus der errechneten Form des Koeffizienten C_{ab} in (19) hervorgeht. Denn diese ist zunächst, soweit a und b explizite vorkommen, symmetrisch in diesen Größen. Ferner sind aber auch die Faktoren $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1^k - \alpha_2^k}$ symmetrische Funktionen von α_1, α_2, also nach Gl. (11') ebenfalls symmetrische Funktionen von a und b.

Die Gleichungen (20) sind Kapazitätsgleichungen, insofern sie die Ladungen e_a, e_b aus den gegebenen Spannungen U_a, U_b bestimmen, und zwar ist, wie die zweite Schreibweise der rechten Seite zeigt, $C_{ab} = C_{ba}$ als gegenseitige Kapazität, $C_{aa} + C_{ba}$ bzw. $C_{ab} + C_{bb}$ als Eigenkapazität der Kugel a bzw. b aufzufassen. Alle diese Koeffizienten hängen von der gegenseitigen Lage der beiden Kugeln ab. Die umgekehrte Aufgabe der Bestimmung der Potentiale bei gegebenen Ladungen wird durch Auflösung der Gl. (20) gelöst.

§ 4. Zylindrische Felder. Darstellung durch Funktionen komplexer Veränderlicher.

1. Logarithmisches Potential, koaxiale Kreiszylinder. Die allgemeinen elektrostatischen Aufgaben für räumliche Gebiete, von denen einige in den vorangehenden Paragraphen gelöst sind, lassen sich zwar im Prinzip mittels der Entwicklungen behandeln, zu denen die Potentialtheorie und schließlich die Theorie der Integralgleichungen in allgemeinster Weise führte. Spezielle Methoden, die eine genauere Erfassung der Feldverteilungen ermöglichen, sind aber nur in wenigen Fällen in den Mitteln der heutigen Analysis enthalten. Unter diesen Umständen ist es von Wichtigkeit, daß solche Aufgaben viel leichter zugänglich werden, wenn man sich auf ein zweidimensionales Gebiet beschränkt, eine Vereinfachung, die für viele physikalische Aufgaben ohne großen Fehler möglich ist. Das ist immer dann der Fall, wenn die in der Aufgabe vorkommenden Körper für das in Betracht kommende Gebiet als Zylinder aufgefaßt werden können, die etwa in der z-Richtung unendlich ausgedehnt sein mögen, und wenn das Feld in dieser Richtung wenig ver-

änderlich ist. Man sieht dann also von der Wirkung der Zylinderenden ab; an Stelle der Begriffe der räumlichen Potentialtheorie treten damit die der ebenen (vgl. 1. Bd., XIV, § 1, 2).

Eine punktförmige Ladung e erzeugte nach § 1 im Raume das radial gerichtete Coulombsche Feld mit der Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{R^2}. \tag{1}$$

Denken wir uns nun eine unendliche Gerade, etwa die z-Achse, mit Ladung belegt von der konstanten Dichte q pro Längeneinheit, so daß $e = q\,d\zeta$ die Ladung des Längenelements $d\zeta$ ist, so erzeugt jedes solche Element eine Feldverteilung nach (1), wobei für den Aufpunkt x, y, z wird: $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}$. Die Zusammensetzung dieser Felder ergibt ein ebenes, senkrecht zur z-Achse radial gerichtetes Feld, und zwar berechnet sich im Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der z-Achse elementar:

$$\mathfrak{E}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\,d\zeta \,.\cos(rR)}{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{q\cos\vartheta \,.\, d\vartheta}{r}\,^{1}) = \frac{2q}{r}. \tag{2}$$

Die zugehörige Potentialfunktion zu dieser Feldverteilung ist

$$U(xy) = 2q \ln \frac{r_0}{r}, \tag{3}$$

mit einer willkürlichen Konstanten r_0, die durch Angabe eines Zylinders bestimmbar ist, dessen Potential verschwinden soll, aber weder zu 0 noch zu ∞ gewählt werden kann.

Ferner genügt nach (3) von § 1 das Potential U einer mit der Dichte $\varrho(xyz)$ räumlich verteilten Ladung der Potentialgleichung

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\varrho. \tag{4}$$

Im zylindrischen Falle kann die Ladung gleichfalls als räumlich verteilt angesehen werden, aber ihre Dichte ist unabhängig von der Koordinate z. Die Dichte pro Längeneinheit der z-Richtung und pro Flächeneinheit der x, y-Ebene bezeichnen wir dann als Flächendichte σ. Ihr Potential ergibt sich, wenn jetzt $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ gesetzt wird, nach (3) durch Integration über die mit Ladung belegte x, y-Ebene in der Form

$$U(xy) = 2\int \sigma(\xi, \eta) \ln \frac{r_0}{r}\, d\xi\, d\eta, \tag{5}$$

[1]) Mit $\cos\vartheta = \cos(rR) = r : R$; $z - \zeta = r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$.

und dieses „logarithmische Potential“ der Flächendichte σ [vgl. 1. Bd., XIV, § 1, (15′)] genügt der zweidimensionalen Potentialgleichung:

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4\pi\sigma. \tag{6}$$

Dieses Potential einer zylindrisch verteilten Ladung kann, im Gegensatz zum Newtonschen Potential, nicht ins Unendliche fortgesetzt werden, da es hier zu $-\infty$ abnehmen würde. Ist aber die Summe der Ladungen oder, bei kontinuierlicher Verteilung, die Summe der Flächendichten:

$$\int \sigma\, d\xi\, d\eta = 0, \tag{7}$$

so heben sich die unendlichen Glieder auf, und man kann dann schreiben:

$$U(xy) = 2\int \sigma(\xi, \eta) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta. \tag{8}$$

Diese Funktion verschwindet im Unendlichen wegen (7), und zwar in gleicher Ordnung mit $1/r$ (während das Newtonsche Potential bei verschwindender Ladungssumme mit $1/R^2$ zu 0 geht). In den Anwendungen spielt nur dieser Fall eine Rolle.

Wegen der besprochenen Eigentümlichkeit des logarithmischen Potentials kann man nicht von der Kapazität eines einzelnen geladenen Drahtes schlechthin sprechen, wie es bei der Kugel zulässig ist, wenn man die Kapazität gegen das Unendlichferne meint. Man kann sich aber z. B. den Draht von einer koaxialen zylindrischen leitenden Fläche umgeben denken und die Kapazität gegen diese bestimmen. Zwei Zylinder von den Radien a, b, die die z-Achse als gemeinsame Achse haben, seien also geladen und ihr Potentialunterschied sei U_{ab}. Die Potentialfunktion des Feldes zwischen den Zylindern hat dann die allgemeine Form:

$$U = 2q \ln \frac{r_0}{r}$$

mit 2 Konstanten q und r_0. Daraus folgt der gegebene Potentialunterschied

$$U_{ab} = U(a) - U(b) = 2q \ln \frac{b}{a}.$$

Der Faktor

$$C = \frac{q}{U_{ab}} = \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

heißt hier die gegenseitige Kapazität pro Längeneinheit der Zylinder; die Ladungsdichte auf den Zylinderflächen wird:

$$\eta_a = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial r}\,(r = a) = \frac{q}{2\pi a}, \text{ bzw. } \eta_b = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial r}\,(r = b) = -\frac{q}{2\pi b}.$$

2. Spiegelung, exzentrische Kreiszylinder. Die Aufgabe der Ladungsverteilung auf zwei exzentrischen Kreizylindern, die gegebene Spannung gegeneinander haben, läßt sich in ähnlicher Weise wie oben (§ 2) für zwei Kugeln, aber viel einfacher als dort, behandeln. Dieser Lösung liegt die „Spiegelung an einem Kreise“ (1. Bd., III, § 2, **1**) zugrunde.

Analog zu der räumlichen Spiegelungsregel findet man diese am besten dadurch, daß man die Gleichung $\Delta U = 0$ auf ebene Polarkoordinaten transformiert [1. Bd., II, § 3, (43) mit $\partial^2 U/\partial z^2 = 0$]:

$$(9) \qquad r^2 \Delta U \equiv r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \equiv \frac{\partial}{\partial \ln r}\left(\frac{\partial U}{\partial \ln r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Diese Gleichung bleibt aber unverändert, wenn man nun r durch a^2/r ersetzt, da in ihr r nur im Differentiationsprozeß $\partial/\partial(\ln r)$, und zwar zweimal, vorkommt.

Hieraus folgt die wichtige Spiegelungsregel: Wenn $U_0(r, \varphi)$ eine Potentialfunktion ist, so ist immer

$$(10) \qquad U_1 = -U\left(\frac{a^2}{r}, \varphi\right)$$

ebenfalls eine Potentialfunktion, und beide nehmen längs des Kreises $r = a$ entgegengesetzt gleiche Werte an. Sie sollen gegenseitig als ihre Spiegelbilder am Kreise $r = a$ bezeichnet werden.

Wir wählen nun, wie bei der analogen Aufgabe in § 2, für U_0 diejenige Potentialfunktion, die im Punkte P (vgl. oben Fig. 12 und setze dort φ statt ϑ) einen logarithmischen Pol der Ladungsdichte q hat, also

$$(11) \qquad U_0 = -2q \ln \mathfrak{r} = -2q \ln \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi},$$

und gehen zu der gespiegelten Funktion über:

$$(12) \qquad \begin{cases} U_1 = 2q \ln \mathfrak{r}' = 2q \ln \sqrt{\dfrac{a^4}{r^2} + R^2 - 2\dfrac{a^2}{r} R\cos\varphi} \\ \quad = 2q \ln\left(\dfrac{R}{r}\sqrt{\dfrac{a^4}{R^2} + r^2 - 2r\dfrac{a^2}{R}\cos\varphi}\right) = 2q \ln \dfrac{R}{r}\varrho \\ \quad = 2q(\ln R + \ln \varrho - \ln r). \end{cases}$$

Da hier ϱ den Abstand PA' des Aufpunktes P von dem Spiegelpunkt A' zu A bezeichnet, so ist ersichtlich, daß U_1 in der Tat wieder eine Potentialfunktion darstellt. Wählen wir ferner für U_0 das logarithmische Potential, das aus zwei mit entgegengesetzt gleicher Dichte q geladenen parallelen Drähten A_1, A_2 (vgl. Fig. 16) hervorgeht, wobei alle Größen in den vorangehenden Bezeichnungen durch Index 1 und 2 unterschieden werden sollen. Es ist also jetzt

$$(13) \qquad U_0 = -2q \ln \mathfrak{r}_1 + 2q \ln \mathfrak{r}_2 = 2q \ln \frac{\mathfrak{r}_2}{\mathfrak{r}_1}$$

und nach (12) wird die gespiegelte Funktion

$$(14)\quad \begin{cases} U_1 = 2q(\ln R_1 + \ln \varrho_1 - \ln r) - 2q(\ln R_2 + \ln \varrho_2 - \ln r) \\ \quad = 2q\left(\ln \dfrac{R_1}{R_2} + \ln \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right). \end{cases}$$

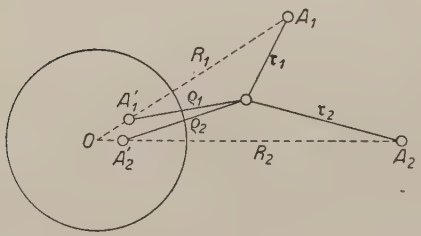
Bis auf eine additive Konstante hat also jetzt die gespiegelte Funktion U_1 die nämliche Gestalt wie die ursprüngliche Funktion U_0, ihre Pole sind die Spiegelbilder zu den ursprünglichen Polen.

Liegen endlich die beiden Punkte A_1, A_2 selbst spiegelbildlich in bezug auf den Kreis, so stimmt weiter ϱ_1 mit r_2 und ϱ_2 mit r_1 überein. Folglich ist dann

$$(14')\qquad U_0 = 2q \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad U_1 = 2q\left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Das Zusatzpotential U_1, das zusammen mit U_0 längs des Kreises $U = U_0 + U_1 = 0$ ergibt, stimmt also bis auf eine additive Konstante mit U_0 selbst überein, woraus hervorgeht, daß schon das Potential U_0 längs des Kreises einen konstanten Wert ergibt, also als eine zu diesem Kreise gehörige Potentialfunktion betrachtet werden kann. Es ist dann nämlich

Fig. 16.



$$(15)\quad \begin{cases} 0 = U_0 + U_1 \\ \quad = 4q \ln \dfrac{r_2}{r_1} + 2q \ln \dfrac{R_1}{R_2}. \end{cases}$$

Daß in der Tat $r_2 : r_1 = \text{konst}$, und zwar $= \sqrt{R_2 : R_1}$, wenn A_1 und A_2 Spiegelpunkte in bezug auf den Kreis sind, folgt auch aus elementargeometrischen Sätzen (Apollonische Kreise).

Mittels dieser Ansätze ist es nun leicht, eine Potentialfunktion zu bestimmen, die längs zweier exzentrischer Kreise konstante Werte annimmt und im Gebiet außerhalb beider Kreise überall regulär ist. Man wähle nämlich für die Punkte A_1, A_2 dasjenige, schon in § 3, 2 bestimmte Punktepaar, das die Eigenschaft hat, in bezug auf beide Kreise spiegelbildlich zu liegen. Die Kreise mögen die Radien a, b und den Mittelpunktsabstand $c > a + b$ haben, so berechnen sich die Abstände dieser Punkte R_1, R_2 vom Mittelpunkt des Kreises a aus den Gleichungen, die die Spiegelungseigenschaft an beiden Kreisen ausdrücken:

$$(16)\qquad R_1 R_2 = a^2, \quad (c - R_1)(c - R_2) = b^2$$

zu

$$\left.\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\right\} = \frac{c}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2c} \mp \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 2(a^2 + b^2) + \left(\frac{a^2 - b^2}{c}\right)^2}.$$

Die Potentialfunktion

$$U = 2q \ln \frac{r_2}{r_1} \tag{17}$$

nimmt nun nach (15) längs des Kreises a den konstanten Wert an:

$$U_a = 2q \ln \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

und analog längs des Kreises b den konstanten Wert

$$U_b = 2q \ln \sqrt{\frac{c - R_2}{c - R_1}},$$

so daß die Potentialdifferenz beider Kreise wird:

$$U_a - U_b = 2q \ln \sqrt{\frac{R_2 (c - R_1)}{R_1 (c - R_2)}}, \tag{18}$$

woraus die gegenseitige Kapazität der beiden Kreisleiter

$$C_{ab} = \frac{q}{U_a - U_b} = \frac{1}{2 \ln \sqrt{\frac{R_2 (c - R_1)}{R_1 (c - R_2)}}} \tag{19}$$

folgt. Für praktische Berechnungen ist meist c groß im Vergleich zu a und zu b. In diesem Falle ist noch eine etwas andere Form der Kapazität zweckmäßig. Die Gl. (16) lassen sich nämlich auch so umformen:

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{a - R_1}{R_2 - a}\right)^2, \quad \frac{c - R_1}{c - R_2} = \left(\frac{c - R_1 - b}{b - c + R_2}\right)^2 \tag{16'}$$

und hiernach

$$C_{ab} = \frac{1}{2 \ln \frac{(R_2 - a)(c - R_1 - b)}{(a - R_1)(b - c + R_2)}}. \tag{19'}$$

Wenn nun c über a und b stark überwiegt, so nähert sich R_1 dem Werte 0 und R_2 dem Werte c und man erhält dann aus (19') den Näherungsausdruck

$$C_{ab} = \frac{1}{2 \ln \frac{c^2}{ab}}, \tag{17'}$$

der bei technischen Rechnungen meist zugrunde gelegt wird.

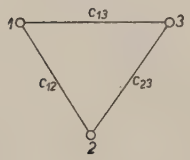
Zur Ableitung dieses Näherungsausdruckes geht man dabei von der vereinfachten Vorstellung aus, daß die Ladungen gleichförmig über die Zylinderoberflächen verteilt seien, was natürlich nur bis auf Fehler der Größenordnung a/c bzw. b/c zutrifft; das Potentialfeld des ersten Leiters sei dann $2q \ln \frac{r_0}{r_a}$, das des zweiten $-2q \ln \frac{r_0}{r_b}$ geschrieben (r_a und r_b

bedeuten die Abstände von den bezüglichen Mittelpunkten, r_0 eine Konstante), und beide Potentialfelder superponieren sich. Längs der Oberfläche des ersten Leiters ist dann zu setzen: $r_a = a$, $r_b = c$ (bis auf Fehler $\approx a/c$), längs der Oberfläche des zweiten Leiters ebenso $r_b = b$, $r_a = c$ (bis auf Fehler $\approx b/c$). Es wird also die Potentialdifferenz

$$U_a - U_b = 2q\left(\ln\frac{r_0}{a} - \ln\frac{r_0}{c} + \ln\frac{r_0}{b} - \ln\frac{r_0}{c}\right) = 2q\ln\frac{c^2}{ab},$$

was mit (17′) übereinstimmt.

Fig. 17.



Diese Näherung hat den Vorteil, daß sie auf den Fall von mehr als zwei Leitern übertragen werden kann, während ein strenges Verfahren hier nicht mehr durchführbar ist. Seien also (vgl. Fig. 17) 1, 2, 3 solche Leiter, q_1, q_2, q_3 ihre Ladungen, a_1, a_2, a_3 ihre Radien und c_{12}, c_{23} usw. die gegenseitigen Abstände. So setzt man das Potential der Leiter an zu:

$$(20)\quad \begin{cases} U_1 = 2q_1\ln\dfrac{r_0}{a_1} + 2q_2\ln\dfrac{r_0}{c_{12}} + 2q_3\ln\dfrac{r_0}{c_{13}}, \\ U_2 = 2q_1\ln\dfrac{r_0}{c_{12}} + 2q_2\ln\dfrac{r_0}{a_2} + 2q_3\ln\dfrac{r_0}{c_{23}}, \\ U_3 = 2q_1\ln\dfrac{r_0}{c_{13}} + 2q_2\ln\dfrac{r_0}{c_{23}} + 2_3q\ln\dfrac{r_0}{a_3} \end{cases}$$

usw.

Diese Gleichungen werden als die Maxwellschen Kapazitätsgleichungen bezeichnet. Um mit bestimmten Potentialwerten rechnen zu können, muß, wie oben in (8), für die Ladungen noch die Beziehung

$$(20')\quad 0 = q_1 + q_2 + q_3 \cdots$$

angenommen werden. Man kann dann aus (20) die Differenz von je zwei der Gleichungen bilden, wodurch die willkürliche Konstante r_0 fortfällt, z. B.

$$U_1 - U_2 = 2q_1\ln\frac{c_{12}}{a_1} + 2q_2\ln\frac{a_2}{c_{12}} + 2q_3\ln\frac{c_{23}}{c_{13}},$$

und hat somit, zusammen mit (20′), gerade die richtige Anzahl von Gleichungen, um q_1, q_2, ... usw. durch die Potentialdifferenzen der Leiter, $U_1 - U_2$ usw., auszudrücken.

3. Felddarstellung durch Funktionen von komplexen Variablen. Der enge Zusammenhang, der zwischen der Gleichung

$$(21)\quad \Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

und den Funktionen einer komplexen Variablen besteht (vgl. 1. Bd., III, XVI), wird naturgemäß auch für die zweidimensionalen elektrostatischen Aufgaben von größter Bedeutung sein. Die gesuchten Potentialfunktionen können nämlich immer als Realteil oder Imaginärteil einer komplexen Funktion des Arguments $z = x + iy$ betrachtet werden.

Es sei in diesem Sinne gesetzt:

$$f(z) = f(x + iy) = T(xy) + iU(xy). \tag{22}$$

Die elektrostatische Bedingung, der die Potentialfunktion U genügen mußte, war immer ihre Konstanz längs der Leiteroberflächen. Das besagt, daß die Funktion $f(z)$, die als die komplexe Potentialfunktion bezeichnet war, für die Leiteroberflächen konstanten Imaginärwert annehmen soll, oder mit anderen Worten: Betrachtet man die Gl. (22) als konforme Abbildung der $z = x + iy$-Ebene auf die $f = T + iU$-Ebene, so sollen die Leiteroberflächen, die durch gewisse Kurven in der z-Ebene dargestellt sind, durch die Abbildung in Gerade $U = c$, d. h. Parallele zur reellen Achse, übergehen. Dazu kommen noch Bedingungen für das Verhalten im Unendlichen der z-Ebene, die aber von Fall zu Fall verschieden sind.

Wenn eine einzelne geschlossene Kurve vorliegt, auf der die im Gleichgewicht befindliche Elektrizitätsverteilung gesucht wird, so kann die Aufgabe auch noch anders formuliert werden. Da nämlich für einen Kreis diese Aufgabe ohne weiteres gelöst werden kann, so genügt es auch, die gegebene Kurve auf einen Kreis so abzubilden, daß das Außengebiet in dessen Außengebiet (und zwar der unendlich ferne Punkt wieder in denselben), und das Innengebiet in dessen Innengebiet übergehen. Ist etwa $w(z) = u(z) + iv(z)$ die Abbildung, die diese Aufgabe leistet, so ist dann im wesentlichen durch $\ln \sqrt{u^2 + v^2}$ die gesuchte Potentialfunktion gegeben.

Für die in **1** und **2** angegebenen Lösungen lassen sich leicht ihre komplexen Formen aufstellen. Für zwei konzentrische Kreiszylinder hatte die Potentialfunktion die Gestalt

$$U = 2q \ln \frac{r_0}{r}.$$

Die entsprechende komplexe Funktion ist

$$f(z) = 2iq \ln \frac{r_0}{z}, \tag{22a}$$

die in der Tat die Kreise der z-Ebene auf horizontale Gerade der f-Ebene abbildet (vgl. 1. Bd., III, § 1).

Für zwei exzentrische Kreiszylinder hatte die Potentialfunktion die Form:

$$U = 2q \ln \frac{r_1}{r_2},$$

wobei r_1 und r_2 Abstände von zwei festen Punkten waren. Die entsprechende komplexe Funktion ist

$$f(z) = 2\,i\,q \ln \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

wenn z_1, z_2 die komplexen Koordinaten der beiden Fixpunkte bedeuten.

Weiter hängt die komplexe Funktion $f(z)$ auch unmittelbar mit dem Vektor der Feldstärke $\mathfrak{E}$ im elektrostatischen Felde zusammen. Es ist nämlich nach § 1

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{23}$$

und ferner

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} = 0. \tag{24}$$

Deshalb lassen sich $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ auch darstellen durch eine Funktion $\overline{T}$, nämlich:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}. \tag{23'}$$

Aus (23), (23') folgt aber:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen stimmen, in entsprechender Bezeichnung, mit den Riemannschen [1. Bd., S. 97, (16)] für den Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion überein, und folglich fällt die eben eingeführte Funktion $\overline{T}$ mit dem Realteil T der komplexen Funktion

$$f(z) = T + iU$$

zusammen. (In Anlehnung an die Bedeutung in der Hydrodynamik nennt man T die Stromfunktion. Sie ist konstant längs der Kraftlinien des elektrischen Feldes.) Man kann nun zusammenfassen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}_x - i\,\mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} + i\frac{\partial U}{\partial y} \\ &= \frac{\partial (T + iU)}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{df(z)}{dz}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

In dieser Weise läßt sich der Vektor der Feldstärke direkt durch komplexe Differentiation aus $f(z)$ gewinnen und kann in dem Sinne als komplexer Gradient der komplexen Potentialfunktion $f(z)$ aufgefaßt werden. Endlich ist auch unmittelbar die Ladungsdichte an der Oberfläche eines Leiters durch $f(z)$ anzugeben. Da sich nämlich die Ladungsdichte hier nach § 1, (5) durch die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ ausdrückt und die Tangentialkomponente verschwindet, so wird

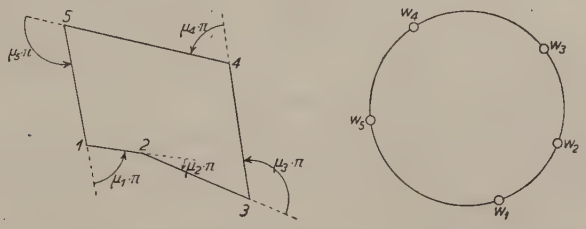
$$4\pi\sigma = \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2} = |f'(z)|, \tag{26}$$

sie drückt sich also durch den Betrag des komplexen Gradienten aus, und ihr Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem die Feldstärke an der Oberfläche nach außen oder nach innen gerichtet ist.

§ 5. Das Feld prismatischer Leiter.

1. Anwendung des Schwarzschen Verfahrens. Von den Methoden der konformen Abbildung, die in der Elektrostatik Verwendung finden, ist am wichtigsten das Schwarzsche Abbildungsverfahren (vgl. 1. Bd., XVI, § 32) und seine Erweiterungen. Unmittelbar können wir es auf folgenden Fall anwenden: Ein zylindrischer Leiter, dessen Querschnitt durch ein geschlossenes Polygon gegeben ist, sei mit einer be-

Fig. 18.



stimmten Elektrizitätsmenge pro Längeneinheit geladen. Ihre Verteilung und das von ihr erzeugte elektrische Feld wird gesucht. Man kann sich dabei als Gegenpol für die von dem Prisma ausstrahlenden Kraftlinien einen großen, dasselbe umschließenden Kreiszylinder vorstellen.

Die Schwarzsche Abbildung verwendet man hier am unmittelbarsten in folgender Form: Die Zahl der Ecken des in der z-Ebene gelegenen Polygons (Fig. 18) sei n und ihre Außenwinkel seien

$$\mu_1\pi,\ \mu_2\pi,\ \ldots,\ \mu_n\pi. \tag{1}$$

Positive Werte von μ bedeuten ausspringende, negative einspringende Ecken des Polygons. Da es im Endlichen geschlossen sein soll, so muß nach dem Außenwinkelsatz die Winkelsumme $= 2\pi$, also

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n = 2 \tag{2}$$

sein. Die komplexen Koordinaten der Eckpunkte seien

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n.$$

Dieses in der z-Ebene gelegene Polygon soll nun auf den Einheitskreis einer w-Ebene so abgebildet werden, daß das Außengebiet des Polygons dem Außengebiet des Kreises eindeutig entspricht, und zwar

der unendlich ferne Punkt der z-Ebene dem unendlich fernen der w-Ebene, woselbst eine Entwicklung der Form gelten soll:

$$z = a w + a_0 + \frac{a_{-1}}{w} + \frac{a_{-2}}{w^2} + \cdots \tag{3}$$

Die gesuchte komplexe Potentialfunktion wird dann schließlich nach § 4, 3 die Form

$$f(z) = 2 i q \ln \frac{w_0}{w} \tag{4}$$

annehmen, worin q die gegebene Ladung pro Längeneinheit des Zylinders und w_0 eine willkürliche Konstante bedeutet. Denn diese Funktion hat ja die Eigenschaft, daß ihr Imaginärteil U längs des Kreises $|w| = 1$, also in der z-Ebene längs des Polygons, konstant ist, und mittels der Entwicklung (3) folgt, daß sich U bis auf eine additive Konstante für genügend große z wie $-2\,\mathrm{q} \ln |z|$ verhält, was der geforderten Ladung pro Längeneinheit des Zylinders entspricht.

Die komplexen Werte w_k, die die Funktion w an den Eckpunkten des Polygons annimmt, können wir, da sie auf dem Einheitskreis der w-Ebene liegen sollen, schreiben:

$$w_1 = e^{i\vartheta_1},\ w_2 = e^{i\vartheta_2}, \ldots, w_n = e^{i\vartheta_n}. \tag{5}$$

Wir machen nun in der w-Ebene einen Umlauf auf einem den Einheitskreis von außen umschließenden, ihm unmittelbar benachbarten Kreis. In der z-Ebene entspricht dem ein Umlauf in einer dem Polygon unmittelbar benachbarten, dasselbe von außen umschließenden stetigen Linie. Damit ihre Tangente in der Umgebung der Ecke z_1 sich um den Winkel $\mu_1 \pi$ dreht, muß das Differential dz hier von der Form sein:

$$dz = dw (w - w_1)^{\mu_1} P_1(w) \tag{6}$$

worin $P_1(w)$ eine in der Umgegend von w_1 regulär analytische Funktion bezeichnet. Durch analogen Ansatz auch an den anderen Ecken erhält man:

$$\frac{dz}{dw} = (w - w_1)^{\mu_1} (w - w_2)^{\mu_2} \ldots (w - w_n)^{\mu_n} P(w), \tag{7}$$

und $P(w)$ bezeichnet jetzt eine längs des ganzen Einheitskreises regulär-analytische Funktion von w. Für große z und w muß ferner nach (3) die Entwicklung von dz/dw sein:

$$\frac{dz}{dw} = a - \frac{a_{-1}}{w^2} - \frac{2\,a_{-2}}{w^3} - \cdots, \tag{8}$$

während z auch im ganzen übrigen Außengebiet singularitätenfrei ist. Setzen wir $P(w) = a/w^2$, so erhält man demnach mit Rücksicht auf (2):

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dw} = a\dfrac{(w-w_1)^{\mu_1}(w-w_2)^{\mu_2}\dots(w-w_n)^{\mu_n}}{w^2} \\ \qquad = a\left(1-\dfrac{w_1}{w}\right)^{\mu_1}\left(1-\dfrac{w_2}{w}\right)^{\mu_2}\cdots\left(1-\dfrac{w_n}{w}\right)^{\mu_n} \end{cases}$$

oder entwickelt

$$(9') \quad \frac{dz}{dw} = a\left[1-\frac{\mu_1 w_1+\mu_2 w_2+\cdots\mu_n w_n}{w}-\frac{\cdots}{w^2}-\cdots\right].$$

Damit dies mit (8) übereinstimmt, muß noch das Glied mit der negativ-ersten Potenz von w verschwinden, also für die w_n die Bedingung:

$$(10) \quad \mu_1 w_1+\mu_2 w_2+\cdots\mu_n w_n = 0$$

erfüllt sein. Sie drückt aus, daß die Funktion

$$(11) \quad z-z_0 = a\int^{w}\left(1-\frac{w_1}{w}\right)^{\mu_1}\left(1-\frac{w_2}{w}\right)^{\mu_2}\cdots\left(1-\frac{w_n}{w}\right)^{\mu_n}dw$$

im Unendlichen kein logarithmisches Residuum enthält, also beim Umlauf um das Polygon eindeutig bleibt.

Die Zuordnung zwischen Kreis und Polygon selbst erhält man, indem man $w = e^{i\vartheta}$ längs des Kreises und für die w_k die Werte (5) einsetzt, nach einfachen Umformungen, unter Berücksichtigung von (2), in der durchsichtigen Form:

$$(11') \quad \begin{aligned} z-z_0 = &-4\,i\,a\,e^{1/2\,i(\mu_1\vartheta_1+\mu_2\vartheta_2+\cdots\mu_n\vartheta_n)} \\ &\times\int^{\vartheta}\sin^{\mu_1}\frac{\vartheta_1-\vartheta}{2}\sin^{\mu_2}\frac{\vartheta_2-\vartheta}{2}\cdots\sin^{\mu_n}\frac{\vartheta_n-\vartheta}{2}\,d\vartheta, \end{aligned}$$

die ohne weiteres erkennen läßt, daß die Richtung der Abbildungskurve beim Durchlaufen je eines der Werte ϑ_n sich um den vorgegebenen Winkel $\mu_k\pi$ dreht und im übrigen geradlinig verläuft.

In der Funktion (11) steht nun die komplexe Konstante a und die komplexe Integrationskonstante z_0 zur Verfügung, ferner die n reellen Konstanten $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$, die aber durch die komplexe, mit zwei reellen Bedingungen äquivalente Gl. (10) eingeschränkt sind, also im ganzen $n+2$ verfügbare reelle Konstanten. Das Polygon enthält im ganzen $2n$, nach Abzug der $n-1$ unabhängig vorgegebenen Winkel noch $n+1$ Bestimmungsstücke, denen die obigen $n+2$ Konstanten angepaßt werden können. Daß eine Konstante unbestimmt bleibt, entspricht dem Umstand, daß der Einheitskreis noch um einen beliebigen Winkel ϑ_0 in sich gedreht werden kann, d. h. daß Multiplikation der w_k mit einem gemeinsamen Faktor $e^{i\vartheta_0}$ möglich bleibt.

Aus der Potentialfunktion (4)

$$f(z) = 2\,i\,q \ln \frac{w_0}{w}$$

ergibt sich nach Gl. (26) von § 4 die Ladungsdichte an der Oberfläche des Prismas ihrem Betrag nach zu:

$$|\sigma| = \frac{1}{4\pi}|f'(z)| = \frac{q}{2\pi}\left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right|. \tag{12}$$

Wegen der Abbildung auf den Einheitskreis hat hierin $w(z)$ längs der Oberfläche Werte vom absoluten Betrag 1. Daher ergibt sich nach (9)

$$|\sigma| = \left|\frac{q}{2\pi\, dz/dw}\right| = \frac{q/2\pi}{|(w-w_1)^{\mu_1}(w-w_2)^{\mu_2}\ldots(w-w_n)^{\mu_n}|},$$

ein Ausdruck, der unendlich wird an allen Ecken, für die μ positiv, dagegen Null an den Ecken, an denen μ negativ ist. D. h. an den ausspringenden Ecken wird die Ladungsdichte unendlich, an den einspringenden verschwindet sie. Die erstere Erscheinung wird in der Physik als Spitzenwirkung, die zweite als Abschirmung bezeichnet.

Als Beispiel sei das Polygon als ein Quadrat von der Seitenlänge s angenommen, dessen Seiten parallel zur x- und y-Achse liegen mögen. Aus Symmetriegründen kann gefolgert werden, daß dann auch die Werte w_k die Ecken eines dem Einheitskreis eingeschriebenen Quadrats in der w-Ebene bilden; sie seien z. B. als die vierten Wurzeln aus -1 angenommen: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$. Wegen der rechten Winkel sind die μ_k sämtlich $= {}^1/_2$. Dann wird aus (11)

$$z - z_0 = a\int^{w} \frac{\sqrt{1+w^4}}{w^2}\,dw. \tag{13}$$

In (4) setzen wir die willkürliche Konstante $w_0 = 1$, ferner ist $dw/w = i\,df/2q$, $w = e^{if/2q}$, so daß schließlich kommt:

$$z - z_0 = \frac{a\,i}{2\,q}\int^{f}\sqrt{w^2 + \frac{1}{w^2}}\,df = \frac{a\,i}{2\,q}\int^{f}\sqrt{2\cos\frac{f}{q}}\,df. \tag{13'}$$

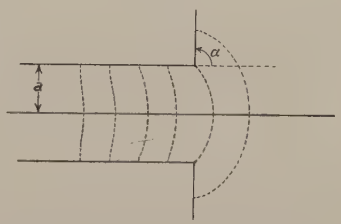
Integriert man längs des Einheitskreises der w-Ebene, so ist der Winkel $\vartheta = -i\ln w = f/2q$, und die Seite des Quadrats wird:

$$\left\{\begin{aligned} s &= -a\,i\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{2\cos 2\vartheta}\,d\vartheta = a\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\sqrt{2\cos 2\vartheta}\,d\vartheta \\ &= a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos\tau}\,d\tau. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Hiernach ist die Konstante a durch die Seitenlänge s bestimmt; das Integral ist ein elliptisches und läßt sich durch vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung (harmonischer Fall, vgl. 1. Bd., S. 137) ausdrücken.

2. Zwei unendliche prismatische Leiter. Während bei der vorangehenden Anwendung des Schwarzschen Verfahrens ein Polygon auf den Einheitskreis oder die reelle Achse einer zweiten komplexen Ebene abgebildet wurde, wodurch die statische Verteilung elektrischer Ladung auf diesem Polygon gefunden wurde, löst eine Verallgemeinerung des Verfahrens die Aufgabe der Feldberechnung zwischen zwei prismatischen Leitern. Am einfachsten ist hier der Fall, wenn die Querschnitte beider Leiter sich ins Unendliche erstrecken, so daß das Zwischengebiet ein einfach zusammenhängendes ist. Zwischen beiden Leitern sei der Spannungsunterschied U_0 vorgegeben, das Potential sei also 0 bzw. U_0 auf den beiden Berandungen; mit anderen Worten: die durch die komplexe Potentialfunktion $f = T + iU$ vermittelte konforme Abbildung soll die eine Berandung auf die reelle Achse, die andere auf eine Parallele dazu im Abstand U_0 abbilden. Wir betrachten der Einfachheit halber die Funktion $w = t + iu = \pi f/U_0$, für die die parallele Gerade den Abstand π hat.

Fig. 19.



Erstes Beispiel sei das der Fig. 19 (s. auch Fig. 20), für das die Spur des ersten Leiters die Gerade $y = 0$, die des zweiten Leiters ein Winkel $\alpha = \mu\pi$, dessen einer Schenkel dem ersten Leiter parallel ist und den Abstand a von ihm habe. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt durch Spiegelung auch das Feld zwischen zwei spiegelbildlich zur x-Achse liegenden Winkeln, wie in den Figuren angedeutet ist. Wir bilden nun wieder den Ausdruck $dz/dw = F(w)$, worin $F(w)$ eine Funktion sein muß, die längs der reellen Achse $u = 0$ reell, längs der parallelen Geraden $u = \pi$ dagegen zum Teil reell, zum Teil imaginär mit dem durch den Außenwinkel $\alpha = \mu\pi$ bestimmten Argument sein muß. Da ferner für große negative Werte von x das Feld in ein Parallelfeld übergeht, muß dort dz/dw sich einer Konstanten, und zwar a/π, nähern.

Man genügt diesen Bedingungen, indem man F als geeignete Funktion von $v = e^w$ wählt, da v sowohl für $u = 0$ als auch für $u = \pi$ reell ist. Man kann das auch so deuten, daß durch die Funktion v der Streifen der w-Ebene auf die obere Hälfte der v-Ebene abgebildet wird und damit die Abbildung auf das Schwarzsche Verfahren zurückkommt. Wenn der Ecke A der Punkt $w = i\pi$ ent-

sprechen soll, so wird, nach analogen Überlegungen, wie unter **1**, den Forderungen genügt durch

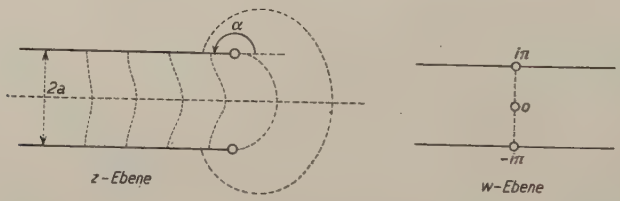
$$\frac{dz}{dw} = F(w) = \frac{a}{\pi}(e^w + 1)^\mu. \tag{15}$$

Denn diese Abbildung ergibt für $w = i\pi$, d. i. $e^w = -1$, die verlangte Ecke, und für $w = -\infty$, d. i. $e^w = 0$, nähert sich dz/dw dem geforderten Wert a/π. (15) gibt also eine Lösung und mit Rücksicht auf Eindeutigkeitssätze (1. Bd., XIV, § 4) die einzige Lösung des gestellten Problems.

In folgenden beiden Fällen ist die Rechnung weiter durchführbar und auch von Interesse für physikalische Anwendungen:

a) Kante von unendlich breiten Kondensatorplatten. Wenn der Winkel $\alpha = \pi$, also $\mu = 1$ ist (Fig. 20), so wird durch die Aufgabe das Feld zwischen zwei Kondensatorplatten dargestellt, die senkrecht

Fig. 20.



zur Zeichenebene unendlich und deren Breite auch in der negativen x-Richtung als unendlich ausgedehnt betrachtet wird. In Wirklichkeit wird dadurch das Feld in der Nähe der Kanten für Platten von endlicher Breite dargestellt. Von Helmholtz ist diese Aufgabe in hydrodynamischer Formulierung behandelt worden. Man erhält aus (15) und durch nachherige Wiedereinführung von $f = U_0 w/\pi$:

$$\text{(16)} \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dw} = \dfrac{a}{\pi}(e^w + 1), \\ z - z_0 = \dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int^w (e^w + 1)\,dw = \dfrac{a}{\pi}(w + e^w) = \dfrac{a}{U_0} f + \dfrac{a}{\pi} e^{\pi f/U_0}. \end{cases}$$

Für Werte von $f = T + iU$ mit negativ großem Realteil überwiegt hier das erste Glied und stellt ein Parallelfeld dar, das bei negativ großen x zwischen den Platten senkrecht verläuft; für positiv großen Realteil T überwiegt das zweite Glied: $e^{\pi T/U_0} e^{i\pi U/U_0} a/\pi$; die Potentiallinien $U =$ konst stellen dann Strahlen, die Feldlinien $T =$ konst Kreise dar, wie in der Abbildung angedeutet ist.

b) Rechter Winkel (Nutenfeld). Der Fall $\alpha = \pi/2$, d. h. $\mu = 1/2$, spielt bei Berechnungen an Dynamomaschinen eine Rolle und wird als Nutenfeld bezeichnet. Es ergibt sich dann

$$(17) \qquad z - z_0 = \frac{a}{\pi} \int_0^w \sqrt{e^w + 1}\, dw = \frac{a}{\pi} \int_1^v \frac{\sqrt{v+1}}{v}\, dv,$$

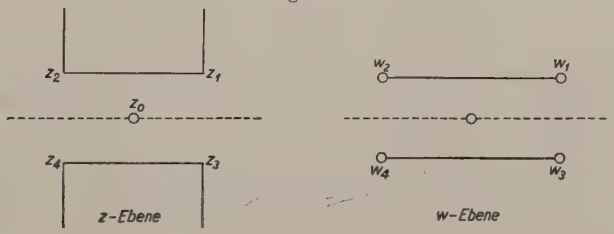
oder, durch elementare Integration:

$$\frac{\pi}{a}(z - z_0) = 2\sqrt{e^w + 1} - \ln \frac{\sqrt{e^w + 1} + 1}{\sqrt{e^w + 1} - 1} - 2\sqrt{2} + 2\ln(1 + \sqrt{2}).$$

Hier überwiegt bei negativ großem Realteil von w der vom Nenner des zweiten Gliedes herrührende Teil:

$$\ln(\sqrt{e^w + 1} - 1) = \ln(1 + \tfrac{1}{2} e^w \cdots - 1) = w - \ln 2 + \cdots$$

Fig. 21.



und stellt das geforderte Parallelfeld bei großem negativem x dar; für großen positiven Realteil überwiegt das erste Glied: $2\sqrt{e^w + 1} \sim 2\, e^{w/2}$ und gibt wieder Strahlen und Kreise als Potential- und Feldlinien (vgl. Fig. 19).

c) Feld zwischen zwei rechteckigen Polen. Etwas allgemeiner als die unter b) behandelte Aufgabe ist noch der zweidimensionale Fall des Feldes zwischen zwei senkrecht abgeschnittenen Polen nach Fig. 21. Durch Spiegelung wird er wieder zurückgeführt auf den eines einzelnen Leiters gegenüber der Mittelebene, deren Spur die Achse $y = 0$. Die Abbildung auf die Ebene $w = t + iu$ soll wieder so erfolgen, daß die Achse $y = 0$ auf die Achse $u = 0$ und die rechteckige Kontur auf die Parallele $u = \pi$ abgebildet wird. Die Abbildung geschieht wie oben in der Form $dz/dw = F(e^w)$, wobei die Breite der Pole $2b$, ihr Abstand $2a$ sei.

Zur Festlegung von F sei angenommen, daß der Punkt $z = 0$ dem Punkte $w = 0$ entsprechen soll, dem Mittelpunkt P des Poles ($z = ia$) entspricht dann $w = i\pi$. F muß reell sein und ohne

Nullstellen, wenn w reell ist; den beiden Ecken des Pols entsprechen zwei Nullstellen von F auf der Parallelen $u = i\pi$, die in der Fig. 21 als w_1, w_2 bezeichnet sind und symmetrisch in bezug auf den Punkt $w = i\pi$ liegen; dann sei $e^{w_1} = e^{-w_2} = -v_1$ genannt. Ferner müssen die zugehörigen Exponenten wegen der rechten Winkel $\mu = \frac{1}{2}$ sein. Endlich wird $F(e^w)$ selbst eine gerade Funktion von w darstellen. Allen diesen Forderungen genügt die Abbildungsgleichung

$$\frac{dz}{dw} = A\sqrt{(e^w + v_1)(e^{-w} + v_1)}, \tag{18}$$

worin A und v_1 als aus den Dimensionen der Pole bestimmbare Konstanten zur Verfügung bleiben, und zwar v_1 positiv reell > 1. Die Eindeutigkeit dieser Lösung folgt wie oben aus den Sätzen vom 1. Bd., XIV, § 4.

Zur Durchführung der Rechnung machen wir die Substitution:

$$e^w = v = -\frac{s^2}{v_1}; \quad s = i\sqrt{v_1}\, e^{w/2}, \tag{19}$$

die dem Umstand Rechnung trägt, daß e^w längs der Berandung der Pole negativ reell ist. Dann wird

$$z = 2 v_1 A i \int_{i\sqrt{v_1}}^{s} \frac{ds}{s^2}\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{s^2}{v_1^2}\right)}, \tag{20}$$

es handelt sich also um ein elliptisches Integral (1. Bd., III, § 5) mit dem Modul $k = \frac{1}{v_1} < 1$.

Den vier Ecken z_1, z_2, z_3, z_4 der Kontur in der z-Ebene entsprechen die vier Werte $w = \pm i\pi \pm \ln v_1$, also bzw. in der gleichen Reihenfolge (s. Fig. 21): $s = -v_1, -1, +v_1, +1$, und folglich ergeben sich folgende zwei Bedingungen aus den vorgegebenen Abmessungen:

$$2 v_1 A i \int_{1}^{v_1} \frac{ds}{s^2}\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{s^2}{v_1^2}\right)} = 2b, \tag{21}$$

$$2 v_1 A i \int_{-1}^{+1} \frac{ds}{s^2}\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{s^2}{v_1^2}\right)} = -2ia \tag{21'}$$

für die Konstanten A und v_1. Dabei ist das letztere Integral auf komplexem Wege, unter Umgehung des Punktes $s = 0$, zu verstehen.

Das Integral in (21) läßt sich wie folgt zerlegen, wobei wir noch $(k^2 < 1)$ für $1/v_1^2$ schreiben:

$$\int_1^{1/k} \frac{ds}{s^2}\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)} = \int_1^{1/k} \frac{(1-s^2)(1-k^2s^2)}{s^2\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\,ds$$

$$= -\int_1^{1/k} \frac{(1-k^2s^2)}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\,ds - k^2\int_1^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

$$+\int_1^{1/k} \frac{ds}{s^2\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Durch die Substitution $s = 1/kr$ geht ferner das letzte dieser drei Integrale über in:

$$\int_1^{1/k} \frac{k^2r^2\,dr}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}} = -\int_1^{1/k} \frac{(1-k^2r^2)\,dr}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}} + \int_1^{1/k} \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}}.$$

Damit ist alles auf vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul k zurückgeführt. Wir setzen nämlich:

$$iK_1 = \int_1^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}; \quad iE_1 = \int_1^{1/k} \frac{1-k^2s^2}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

und bekommen dann statt (21):

$$\frac{kb}{A} = 2E_1 - (1-k^2)K_1. \tag{22}$$

Analog setzen wir:

$$K = \int_0^{+1} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}; \quad E = \int_0^{+1} \frac{(1-k^2s^2)\,ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

und erhalten durch die nämliche Umformung aus (21′):

$$\frac{ka}{2A} = 2E - (1-k^2)K. \tag{22′}$$

Durch Division von (22) und (22′) erhält man endlich:

$$\frac{2b}{a} = \frac{2E_1 - (1-k^2)K_1}{2E - (1-k^2)K}. \tag{23}$$

Hierin sind nun K und K_1 unmittelbar vollständige elliptische Integrale erster Gattung mit dem Modul k bzw. $k' = \sqrt{1-k^2}$; E ist ein solches zweiter Gattung mit Modul k, und E_1 läßt sich durch vollständige

Integrale erster und zweiter Gattung, unter Hinzunahme des zum Modul k' gehörigen vollständigen Integrals zweiter Gattung E' ausdrücken [1]). Alle diese Integrale sind als Funktionen von k bekannt und tabuliert. Man kann daher mittels (23) auf numerischem Wege aus b/a den Modul k berechnen und sodann mittels (22) oder (22′) auch die Konstante A.

3. Feld zwischen zwei endlich begrenzten Leitern. Sind die beiden Leiter, zwischen denen das Feld gesucht wird, oder wenigstens einer davon im Endlichen begrenzt, so unterscheidet sich die Aufgabe dadurch von der vorhergehenden, daß dann der Raum außerhalb der Leiter ein zweifach zusammenhängender ist. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, aus denen sich der allgemeine zusammensetzt: a) Die beiden Leiter haben entgegengesetzt gleiche Ladung; das Feld verschwindet dann (vgl. § 4, 1) im Unendlichen, so daß der unendlich ferne Punkt als regulärer Punkt zu betrachten ist. b) Beide Leiter haben gleiche Ladung; das Potential wird dann im Unendlichen logarithmisch unendlich, die komplexe Potentialfunktion hat dort eine vorgegebene logarithmische Singularität. Man kann auch den ersten als homogenen, den zweiten als inhomogenen Fall ansehen.

a) Der homogene Fall. Die Aufsuchung der Potentialfunktion, die längs der Oberfläche der beiden geschlossenen Leiter konstante Werte mit der Differenz $2U_0$ annimmt, deuten wir wieder als Abbildung der $z = x + iy$-Ebene auf eine $w = t + iu$-Ebene, und zwar einen Streifen zwischen der Achse $u = -\pi$ und $u = +\pi$. Das gesuchte Potential ist dann $U = uU_0/\pi$. Wegen des zweifachen Zusammenhangs des Außenbereichs in der z-Ebene kann aber diese Abbildung nicht umkehrbar eindeutig sein, wohl aber ein-vieldeutig, indem man den Streifen der w-Ebene in unendlich viele kongruente Rechtecke von zu bestimmender Seitenlänge einteilt. Der ganze Außenbereich der z-Ebene ist dann je auf ein solches Rechteck der w-Ebene abzubilden. Der einfachste Fall dieser Art liegt bei der Aufgabe in 2 von § 4 vor, wo es sich um das Außengebiet von zwei exzentrischen Kreisen handelt. Die in § 4, 3 gegebene komplexe Potentialfunktion für diesen Fall: $F = 2iq[\ln(z - z_1) - \ln(z - z_2)]$ hat in der Tat die Eigenschaft, daß ihr Realteil beim Umlaufen eines der Punkte z_1 oder z_2 um den konstanten Betrag $\mp 4\pi q$ wächst, während der Imaginärteil unverändert bleibt.

Liegen statt dessen zwei geschlossene Polygone vor, so kann man wieder nach dem Schwarzschen Verfahren vorgehen, indem man zunächst den Ausdruck

$$\frac{dz}{dw} = F(w) = (w - w_1)^{\mu_1}(w - w_2)^{\mu_2} \dots P(w) \tag{24}$$

[1]) Vgl. z. B. Jacobi, Fundamenta nova, § 56 ff.

bildet, dessen Exponenten μ durch die Polygonaußenwinkel bestimmt sind. Dabei zerfallen die Nullstellen in die dem ersten Polygon entsprechenden, die auf der Achse $u = -\pi$ und die dem zweiten Polygon entsprechenden, die auf der Achse $u = +\pi$ liegen. Die Funktion $P(w)$ darf in dem Streifen zwischen $u = \pm\pi$ und auf diesen Rändern selbst keine Nullstellen haben und muß so gewählt werden, daß die Periodizitäts- und Realitätsforderungen erfüllt sind. Den letzteren kann man, wie in **2**, dadurch genügen, daß man $F(w)$ als Funktion von $i\,e^{w|2}$ einführt, da dieser Ausdruck längs der Achse $u = -\pi$ positiv reell, längs der Achse $u = +\pi$ negativ reell ist. In die Funktion $F(w)$ wird dadurch die Periode $2\,i\,\pi$ eingeführt. Andererseits soll er auch wegen der Rechteckeinteilung eine reelle Periode haben. Er hat also die doppelten Periodizitätseigenschaften von der Art der elliptischen Funktionen mit rechteckigem Periodenparallelogramm und wird sich immer durch solche ausdrücken lassen.

Als Beispiel behandeln wir den Fall, an dem zuerst von Helmholtz[1]) der Wert der Abbildungsmethode erläutert wurde: zwei unendlich lange parallele Kondensatorplatten, die aber jetzt, im Gegensatz zu der unter **2**, a) behandelten Aufgabe (vgl. Fig. 21), von endlicher Breite angenommen werden sollen. Ihre Kontur in der z-Ebene besteht aus zwei parallelen Schnitten, deren vier Eckpunkte, die Punkte $\pm b \pm i\,a$, ein Rechteck bilden (Fig. 22). Die Schnitte sind als Grenzfall je eines Polygons, und zwar als Zweieck aufzufassen. Ihr Außengebiet wird die ganze unendliche z-Ebene, wobei die Feldstärke auf den beiden Seiten des Schnittes verschiedene Werte annehmen wird und gegenüberliegende Punkte des Schnittes in der Abbildung als verschiedene Punkte, nur mit gleichem u, anzusehen sind. Wegen der Symmetrie können wir uns hier durch Spiegelung darauf beschränken, die durch den oberen Schnitt und die reelle Achse $y = 0$ begrenzte Halbebene auf den Halbstreifen der w-Ebene abzubilden, der zwischen der Achse $u = 0$ und, etwas allgemeiner als oben, der Parallelen $u = K'$ liegen möge, mit noch zu bestimmendem K'. Die beiden „Außenwinkel“ des Zweiecks sind π, so daß also die vorkommenden μ-Werte alle $= 1$ sind.

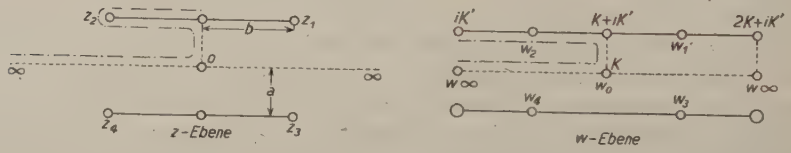
Auf der Parallelen $u = K'$ der w-Ebene müssen in diesem Falle in jedem Periodenabschnitt zwei Nullstellen des Ausdrucks $F(w)$ liegen, die den beiden Kanten $z_1, z_2 = \pm b + i\,a$ des Schnittes entsprechen, und zwar einfache Nullstellen wegen $\mu = 1$. Bei der Abbildung entspricht einem vollen Umlauf um den Schnitt ein Anwachsen des Realteiles t von w um einen konstanten Betrag, der $2\,K$ heißen möge. Um den nämlichen reellen Betrag wächst t, wegen der Rechteckabbildung, wenn

[1]) H. Helmholtz, Ges. Werke **1**, 157. Die dort angegebene Lösung ist aber unrichtig.

man die reelle x-Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. $2K$ bzw. $2iK'$ sind daher hier die Seiten des Periodenparallelogramms in der w-Ebene, die obere z-Halbebene entspricht dem halben Rechteck mit den Seiten $2K$ und iK'. Dem Punkt $z = \infty$ der x-Achse entspricht in jedem Rechteck der w-Ebene ein Punkt der Achse $u = 0$, und zwar seien hier die Punkte $w = 0, \pm 2K, \pm 4K$ usw. gewählt. Es handelt sich um einen quadratischen Pol, da dz/dw beim Durchgang sein Vorzeichen nicht ändert (d. h. in der Umgebung von $w = 0$ ist z von der Ordnung w^{-1}, bzw. w von der Ordnung z^{-1}, in Übereinstimmung mit der Bemerkung in § 4, **1**, wonach bei verschwindender Ladungssumme das Potential für $r = \infty$ mit r^{-1} verschwindet).

Die Zuordnung der z-Ebene zum Rechteck der w-Ebene ist zusammengefaßt die folgende: $z = \infty$ entspricht $w = 0, \pm 2K$ usw., und zwar als quadratischer Pol; $z = 0$ entspricht dann aus Symmetriegründen

Fig. 22.



$w = \pm K, \pm 3K$ usw. Dem Mittelpunkt $z = ia$ des Schnittes, auf dessen unterer Seite, entspricht dann $w = K + iK'$ und dem gleichen Punkt auf der oberen Seite des Schnittes $w = iK'$, da der Übergang von der unteren zu der oberen Seite hier einem halben Umlauf entspricht (vgl. die Zuordnung nach Fig. 22).

Alle verlangten Eigenschaften kann man erfüllen durch Einführung der Jacobischen Funktion (für die Literatur vgl. 1. Bd., S. 141):

$$H(w, K, iK') = 2q^{1/4}\sin\frac{\pi}{2K}w - 2q^{9/4}\sin\frac{3\pi}{2K}w + \cdots \tag{25}$$

mit

$$q = e^{-\pi K'/K},$$

deren Nullstellen nur an den Punkten liegen, an denen für $F = dz/dw$ die quadratischen Pole verlangt werden. Dann erhält man F dargestellt als eine (nach Analogie der Weierstrassschen $\wp$-Funktion gebildete) Funktion:

$$\frac{dz}{dw} = F(w) = A\frac{d^2\ln H(w)}{dw^2} + B, \tag{26}$$

und somit wird die Abbildungsgleichung

$$z = \int^{w} F(w)\,dw = A\frac{d\ln H(w)}{dw} + Bw + C. \tag{27}$$

Zur Erfüllung der weiteren Bedingungen haben wir die Konstanten A, B, C und das Periodenverhältnis bzw. den Modul der elliptischen Funktionen zur Verfügung. Zunächst folgen die Konstanten B und C zu 0, die erstere, weil z für eine Vermehrung des Arguments w um $2K$ rein periodisch sein muß; diese Eigenschaft hat aber der Definition nach bereits der Teil mit dem Faktor A. Sodann wird $C = 0$, weil z für $w = K$ verschwinden soll und diese Eigenschaft, gleichfalls nach (25), $H'(w)$ hat. Es bleibt also

$$z = A\frac{d\ln H(w)}{dw};\quad \frac{dz}{dw} = A\frac{d^2\ln H(w)}{dw^2}. \tag{27'}$$

Nun ist, wie aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt ist, die [mit der Jacobischen Funktion $Z(w)$ übereinstimmende] Funktion z/A längs der Parallelen $u = iK'$, abgesehen von einer additiven imaginären Konstanten, reell und hat längs dieser Linie keinen Pol. Also muß sie in jedem Periodenabschnitt $2K$ ein Maximum und ein Minimum haben. Diese Werte sind die Nullstellen w_1, w_2 von dz/dw, die den beiden Kanten z_1, z_2 des Schnittes entsprechen. Der weitere Verlauf der Rechnung ist daher folgender: Man berechnet als Funktion des Periodenverhältnisses die Lage einer dieser Nullstellen w_1, wobei in Betracht kommt, daß $d^2\ln H/dw^2$ in bekannter Weise mit $1/\sin^2 \mathrm{am}\, w$ zusammenhängt und also tabellarisch bekannt ist, sodann mittels der Tabellen für $Z(w_1)$ (elliptisches Integral zweiter Gattung) den zugehörigen Wert $z_1/A = (x_1 + i\,y_1)/A$. Die Forderung $x_1 : y_1 = b : a$ ist dann eine Bedingungsgleichung für das Periodenverhältnis bzw. den Modul k. Ist dieses bekannt, so ergibt (27') in der Form $z_1 = AZ(w_1)$ auch noch die Konstante A. Schließlich ist $f = U_0 w/K'$ die gesuchte komplexe Potentialfunktion.

b) Der inhomogene Fall. Der zweite Fall, aus dem sich zusammen mit dem vorherbehandelten die allgemeine Aufgabe zusammensetzen läßt, ist der, daß die beiden geschlossenen Polygone in der z-Ebene gleiches Potential haben sollen und dann, wegen der Symmetrie der angenommenen Leiterformen, gleiche Ladung tragen, die je $-Q/2$ heißen soll[1]). In großer Entfernung r verhält sich dann das Potential nach § 4, **1** wie $2Q\ln r$.

Auch für die Behandlung dieser Aufgabe kann das obige Abbildungsverfahren herangezogen werden. Mittels dieser Abbildung entspricht nämlich dem Unendlichen der z-Ebene in der w-Ebene eine Punktreihe, nämlich die Punkte:

$$w_\infty = 0,\quad \pm 2K,\quad \pm 4K \text{ usw.}$$

[1]) Wir vermeiden die sonst gebrauchte Bezeichnung q wegen deren üblicher Verwendung in den Jacobischen Θ-Funktionen.

Die gesuchte komplexe Potentialfunktion — sie heiße $W = \Psi + i\Phi$ — hat jetzt in jedem dieser Punkte einen logarithmischen Pol von der Ladung Q. Denn es bleibt, wie vorerst zu beweisen ist, bei der konformen Abbildung eines Feldes die Ladung entsprechender Stücke von Leiteroberflächen unverändert, und als solche kann ein großer Kreis in der z-Ebene bzw. je ein kleiner, die Pole in der w-Ebene umgebender Kreis angesehen werden.

In der Tat ist an einer Leiteroberfläche in der z-Ebene die Ladungsdichte nach (26) von § 4:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} |W'(z)|.$$

Die konforme Abbildung

$$w = w(z) \quad \text{bzw.} \quad z = z(w)$$

ergibt nun

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}. \tag{28}$$

Andererseits geht ein Längenelement ds in der z-Ebene durch die Abbildung über in ein Längenelement $d\mathfrak{s}$ in der w-Ebene, wobei

$$d\mathfrak{s} = ds \cdot \left|\frac{dw}{dz}\right|. \tag{29}$$

Also ist, wenn man längs entsprechender Stücke der Leiteroberflächen integriert, nach (28), (29):

$$\frac{1}{4\pi}\int \left|\frac{dW}{dz}\right| ds = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dW}{dw}\, d\mathfrak{s}.$$

Der letztere Ausdruck ist aber die Ladung des Leiterstückes in der w-Ebene, womit die Behauptung bewiesen ist.

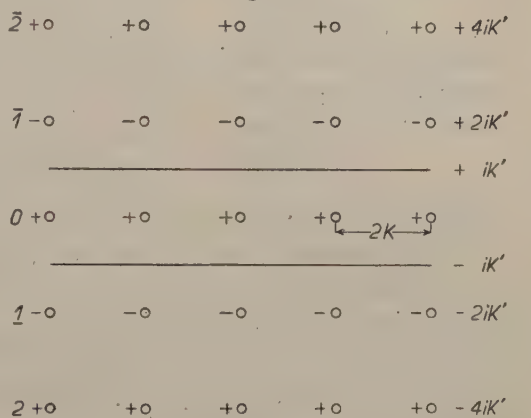
Wir haben also jetzt in der $w = t + iu$-Ebene folgende Aufgabe [1]): Gesucht wird eine Potentialfunktion $W(w)$, die längs der beiden parallelen geradlinigen Leiter $u = \pm K'$ gleiche konstante Werte hat und die in den Punkten $w = 0$, $\pm 2K$, $\pm 4K$ usw. logarithmische Pole von der Ladung $+Q$ haben soll. Zu ihrer Lösung gehen wir folgendermaßen vor:

Wir spiegeln zunächst die Polreihe (sie heiße die „reale“ Polreihe und werde mit dem Index 0 bezeichnet, Fig. 23) an den beiden begrenzenden Geraden und geben den Spiegelbildern der Pole die der realen Ladung entgegengesetzte Ladung, also je $-Q$. Die gespiegelten

[1]) Diese Aufgabe kommt in der Elektrotechnik auch unmittelbar vor; vgl. F. Noether: Über eine Aufgabe der Kapazitätsberechnung. Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Schuckert-Konzern II, S. 198, 1922.

Reihen seien bezeichnet durch den Index $\bar{1}$ bzw. $\underline{1}$. Dann würde die Polreihe 0 mit den Bildern $\bar{1}$ zusammen die Bedingung des konstanten Potentials an der oberen Wand $u = +K'$ erfüllen, andererseits die Polreihe 0 zusammen mit den Bildern $\underline{1}$ die nämliche Bedingung an der unteren Wand $u = -K'$. Nicht aber erfüllen die Bilder $\bar{1}$ die Bedingungen an der unteren Wand und die Bilder $\underline{1}$ die Bedingungen an der oberen Wand. Um auch diese zu erfüllen, müssen wir nochmals die Reihe $\bar{1}$ an der unteren Begrenzung $u = -K'$ und die Reihe $\underline{1}$ an der oberen Begrenzung $u = +K'$ spiegeln und erhalten so zwei neue Reihen $\underline{2}$ bzw. $\bar{2}$. Diese neuen Bilder erhalten wieder die entgegengesetzte Ladung, also $+Q$. So müssen wir fortgesetzt verfahren und erhalten schließlich das Feld im physikalischen Bereich zwischen den Geraden $u = \pm K'$ dargestellt als das Feld eines Gitters, das in seinen horizontalen Reihen abwechselnd die Ladungen $\pm Q$ hat. Und zwar liegen logarithmische Pole mit der Ladung $+Q$ in den Punkten $w_{m,n} = 2mK + 4niK'$, dagegen mit der Stärke $-Q$ in den Punkten $w_{m,\bar{n}} = 2mK + (4n+2)iK'$ für alle positiven und negativen ganzen Zahlen m, n, einschließlich 0 (vgl. die Vorzeichen in der Fig. 23).

Fig. 23.



Dieses Feld logarithmischer Pole hat die doppelte Periodizität der elliptischen Funktionen mit den Perioden $4K$, $4iK'$; für seine Konvergenzeigenschaften gelten die aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannten Sätze. Die komplexe Potentialfunktion, die durch Summation der einzelnen Polfunktionen entsteht, sei nach § 4, **3**:

$$W(w) = 2Qi \ln P(w) \tag{30}$$

geschrieben. So muß $P(w)$ Pole erster Ordnung in allen Gitterpunkten mit positivem Vorzeichen, und Nullstellen erster Ordnung in allen Gitterpunkten mit negativem Zeichen haben. Diese Bedingungen erfüllt aber die Jacobische Funktion:

$$P(w) = 1/\sin \operatorname{am}(\varkappa w,\ k_1), \tag{31}$$

wenn man den Modul k_1 so bestimmt, daß das zugehörige Periodenverhältnis iK'/K wird (während bei der verwendeten konformen Ab-

bildung das entsprechende Periodenverhältnis $iK'/2K$ war). Man hat zu dem Zweck zu setzen (vgl. Jacobi, Fundamenta nova ...):

$$q_1 = e^{-2\pi K'/K},$$

sodann

$$k_1^2 = \frac{2\,q_1^{1/4}(1 + q_1^2 + q_1^6 + q_1^{12} + \cdots}{1 + 2\,q_1 + 2\,q_1^4 + 2\,q_1^9 \ldots}.$$

Die entsprechenden vollständigen Integrale sind dann:

$$K_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}; \qquad K_1' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - k_1^2)\sin^2 \varphi}} = K_1 \cdot \frac{2\,K'}{K},$$

und es ist schließlich zu setzen $\varkappa = K_1/K = K_1'/2\,K'$, wodurch die Perioden der Funktion $P(w)$ in der Tat die Werte $4K$ und $4iK'$ annehmen. Die gesuchte Potentialfunktion ist dann nach (28), (29) der Imaginärteil von W, also

$$U = J\{W(w)\} = -2Q \ln \left| \operatorname{sin\,am}\left(\frac{K_1}{K} w, k_1\right)\right|,$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Das konstante Potential längs der Wände ergibt sich aus seinem Wert in den Punkten $w = \pm iK'$. Hier ist es

$$U(\pm iK') = -2Q \ln \left| \operatorname{sin\,am}\left(\frac{iK_1'}{2}, k_1\right)\right|.$$

Nach einer Formel aus der Theorie der elliptischen Funktionen ist aber:

$$\operatorname{sin\,am}\left(\frac{iK'}{2}, k\right) = \frac{i}{\sqrt{k}},$$

und demnach das Potential längs der Wände:

$$U(\pm iK') = Q \ln k_1.$$

Ferner ist längs eines kleinen, einen realen Pol umgebenden Kreises vom Radius r zu setzen:

$$\left| \operatorname{sin\,am} \frac{K_1}{K} w \right| = \frac{K_1}{K} r,$$

und folglich der Potentialunterschied zwischen diesem Kreis und den Wänden $\pm iK'$:

$$-2Q \ln\left(\frac{K_1}{K} r\right) - Q \ln k_1 = +\,Q \ln \frac{K^2}{K_1^2 k_1 r^2}.$$

Der Wert:

$$C = \frac{1}{2 \ln K - 2 \ln K_1 \sqrt{k_1}\, r}$$

bestimmt die „Kapazität des Systems pro Pol“, wenn man sich diese etwa als reale Drahtquerschnitte von dem kleinen Radius r vorstellt

§ 6. Anwendung der Elektrostatik auf die Theorie der Glühkathodenröhre[1]).

1. Problemstellung. Während ein Metall im kalten Zustand sich im Vakuum beliebig hoch aufladen läßt, verliert es diese Eigenschaft im heißen (Glüh-) Zustand, da es dann den Elektronen durch eine Art Verdampfungsprozeß möglich ist, aus dem Metall zu entweichen. Diese Erscheinung liegt der Glühkathodenröhre zugrunde, die in der Regel aus zwei im Vakuum befindlichen Elektroden, der Kathode und der Anode, besteht, von denen die erstere in den Glühzustand, meist durch Hindurchleiten eines elektrischen Stromes, des Heizstromes, versetzt werden kann. Dazu tritt dann noch bei der Dreielektrodenröhre eine weitere, von den beiden anderen isolierte Hilfselektrode, die „Steuerelektrode". Verbindet man den positiven Pol einer Batterie (der Anodenbatterie) mit der Anode, den negativen mit der Kathode, so fließt nach dem oben Gesagten ein elektrischer Strom durch die Röhre hindurch. Die Stromstärke i_A dieses Stromes ist eine bestimmte Funktion $i_A = f(\varphi_A)$ der „Anodenspannung" φ_A, die man gewöhnlich als die „Charakteristik" der Röhre bezeichnet. Sie zeigt im allgemeinen den Verlauf der Fig. 24. In dem Gebiet zwischen den Punkten A und B, das für die meisten Anwendungen allein in Betracht kommt, kann man sie annähernd als geradlinig betrachten.

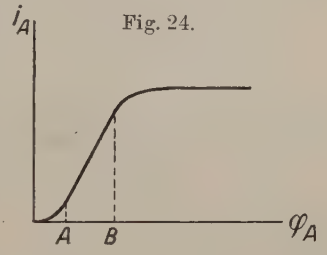


Fig. 24.

Bringt man nun zwischen Kathode und Steuerelektrode eine Hilfsspannung φ_G an, so verändert sich bei gleichbleibendem φ_A das i_A, worauf die Verwendung der Glühkathodenröhre als Verstärker für die Radiotelegraphie beruht. Barkhausen[2]) hat gefunden, daß sich die Abhängigkeit des i_A von φ_G durch die Formel

$$i_A = f(\varphi_G + D\varphi_A) \tag{1}$$

ausdrücken läßt, worin f die obige Bedeutung hat, und D eine für die betreffende Röhre charakteristische Konstante ist, die gewöhnlich als „Durchgriff" bezeichnet wird. Ihre theoretische Vorausberechnung ist deshalb ein Problem von großer Wichtigkeit, weil die Größe D für die Verstärkerwirkung der Röhre von ausschlaggebender Bedeutung ist.

2. Berechnung des Durchgriffs. Wir folgen bei der Berechnung dem Gedankengang von Laue[3]) und Abraham[4]), indem wir das Problem

[1]) Dieser Paragraph ist auf Veranlassung des Herausgebers eingeschaltet; vgl. Inhaltsverzeichnis.
[2]) Vgl. Möller, Elektronenröhren. Braunschweig 1922.
[3]) Laue, Ann. d. Phys. **59**, 465, 1919.
[4]) Abraham, Arch. f. Elektrotechn. **8**, 42, 1919.

in erster Näherung elektrostatisch behandeln. Durch das Bestehen der Potentialdifferenzen φ_A und φ_G wird nämlich auf der Kathode eine elektrische Ladung e influenziert; durch den Umstand, daß diese Elektrode heiß ist, kann diese Ladung aus der Kathode austreten und einen Strom i_A hervorrufen, den wir demnach in erster Näherung der Größe e proportional setzen können. Die Ladung e läßt sich nach einem allgemeinen Satze der Elektrostatik leicht berechnen. Macht man nämlich zunächst $\varphi_G = 0$, so wird jedenfalls $e = e_1 = C_1 \varphi_A$, wobei die Konstante C_1 gewöhnlich als Teilkapazität zwischen Kathode und Anode bezeichnet wird. Analog wird, wenn wir $\varphi_A = 0$ setzen: $e = e_2 = C_2 \varphi_G$, wo C_2 die Teilkapazität zwischen Kathode und Steuerelektrode ist. Den allgemeinen Fall kann man offenbar aus den beiden vorangehenden additiv zusammensetzen und erhält allgemein (vgl. § 3, **3**)

$$e = e_1 + e_2 = C_1 \varphi_A + C_2 \varphi_G, \qquad C_1 < 0, \quad C_2 < 0. \tag{2}$$

Nach dem Obigen können wir also setzen

$$i_A = \lambda(\varphi_G + D\varphi_A),$$

wobei

$$D = \frac{C_1}{C_2} > 0 \tag{3}$$

ist; i_A hat also tatsächlich die Gestalt der Formel (1), und zwar für den geradlinigen Teil der Charakteristik. Der Durchgriff ergibt sich dabei als das Verhältnis der beiden Teilkapazitäten C_1/C_2 und kann demnach mit den Methoden der Potentialtheorie berechnet werden. Damit ein Strom fließen kann, muß dabei wegen der negativen Ladung der Elektronen $e < 0$, daher $\varphi_G + D\varphi_A > 0$ sein. Im entgegengesetzten Falle fließt kein Strom (Gleichrichterwirkung der Glühkathodenröhre).

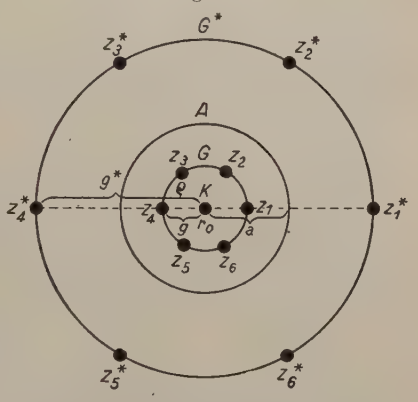
Wir wollen die Berechnung von D in dem konkreten Falle wirklich durchführen, der dem in der Technik verwendeten möglichst genau angepaßt ist. Die Röhre möge einen Querschnitt gemäß Fig. 25 haben. Die Anode sei ein Zylinder vom Radius a und die Kathode ein in dessen Achse gelegener Draht vom Radius r_0. Es sei $r_0 \ll a$. Die Steuerelektrode bestehe aus einem „Gitter“ von m achsenparallelen Drähten mit den Radien ϱ ($\varrho \ll a$), die in äquidistanten Abständen auf einer Zylinderfläche vom Radius g angeordnet und untereinander leitend verbunden seien. Es sei $g < a$, aber beide von derselben Größenordnung. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Zylinderflächen alle in der Achsenrichtung unendlich ausgedehnt seien, wodurch sich das Problem auf ein zweidimensionales reduziert.

Das Problem besteht nun nach § 2, **1** in der Lösung der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ mit den Randbedingungen: $U = 0$ für $r = r_0$, $U = \varphi_A$ für $r = a$ und $U = \varphi_G$ für die Oberflächen der Gitterdrähte. Wir führen in der Zeichenebene komplexe Koordinaten z ein

und können dann U einfach nach § 4, 3 dem reellen Teile einer komplexen Funktion $\chi(z)$ gleichsetzen, der die obigen Randbedingungen erfüllt.

Es ist zunächst klar, daß wir die Bedingung der Konstanz von χ an der Oberfläche der Kathoden- und Gitterdrähte dadurch annähernd erfüllen können, daß wir χ als Summe von logarithmischen Potentialen nach § 4, (22a) mit den Punkten $0, z_1, z_2, \ldots$ als Polen ansetzen. Denn in genügender Nähe des Punktes z_k wird ja $\log(z - z_k)$ gegenüber allen anderen Logarithmen überwiegen, und daher werden die Äquipotentiallinien in genügender Nähe von z_k annähernd Kreise sein, daher auch, wie verlangt, die Drahtoberflächen Flächen konstanten Potentials.

Fig. 25.



Um nun auch noch den Kreis $r = a$ zu einer Potentiallinie zu machen, spiegeln wir die Punkte z_k an diesem Kreise; die Spiegelpunkte nennen wir z_k^*. Aus der Methode der elektrischen Bilder § 4, 2 geht hervor, daß dann auf $r = a$ konstantes Potential herrscht, wenn man die Punkte z_k und z_k^* mit entgegengesetzt gleichen Ladungen versieht, d. h. wenn man zu jedem Gliede $\log(z - z_k)$ ein Glied $-\log(z - z_k^*)$ hinzufügt. Allgemein können wir also setzen:

$$\chi = A \log \frac{z}{r_0} + B \log \prod_1^m \frac{z - z_k}{z - z_k^*} + C,$$

wo A, B, C noch frei wählbare reelle Konstanten sind. Daraus folgt

$$U = A \log \frac{r}{r_0} + B \log \prod_1^m \left| \frac{z - z_k}{z - z_k^*} \right| + C.$$

Da die Werte z_k als äquidistante Punkte auf einem Kreis vom Radius g einfach die Wurzeln der Gleichung $z^m - g^m = 0$ sind und Analoges für z_k^* gilt, können wir dafür auch schreiben:

$$U = A \log \frac{r}{r_0} + B \log \left| \frac{z^m - g^m}{z^m - g^{*m}} \right| + C, \tag{4}$$

wobei wegen der Lage der Spiegelpunkte gilt

$$g g^* = a^2. \tag{5}$$

Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir in (4) zunächst $z = a$ ein, dann wird mit Berücksichtigung von (5), wie man nach leichter Rechnung sieht:

$$\varphi_A = A \log \frac{a}{r_0} + m B \log \frac{g}{a} + C. \tag{6}$$

Ferner wird für $z = r_0$ wegen $r_0 \ll g$ mit Berücksichtigung von (5)

$$0 = 2 m B \log \frac{g}{a} + C. \tag{7}$$

Schließlich setzen wir $|z - g| = \varrho$. Dann können wir aus $|z^m - g^m|$ den Faktor ϱ herausheben und in dem Übrigbleibenden wegen der Bedingung $\varrho \ll g$ näherungsweise $z = g$ setzen. Das liefert

$$|z^m - g^m| = \varrho\,|z^{m-1} + z^{m-2} g + \cdots + z g^{m-2} + g^{m-1}| = \varrho\, m g^{m-1}.$$

Ferner wird mit derselben Genauigkeit

$$|z^m - g^{*m}| = g^m - g^{*m} = g^m - \left(\frac{a^2}{g}\right)^m = g^m \left[1 - \left(\frac{a}{g}\right)^{2m}\right].$$

Dann lautet die Randbedingung auf den Gitterdrähten nach (4)

$$\varphi_G = A \log \frac{g}{r_0} + B \log \frac{\varrho\, m}{g\left[\left(\frac{a}{g}\right)^{2m} - 1\right]} + C. \tag{8}$$

Aus den drei Gleichungen (6), (7), (8) kann man nun ohne weiteres die drei Konstanten A, B, C durch die Potentiale φ_A und φ_G linear ausdrücken, und damit ist die Aufgabe der Bestimmung von U gelöst. Speziell ergibt sich für die Konstante A bis auf einen uns nicht weiter interessierenden Faktor

$$A = \varkappa \left\{ \log \frac{g\left[1 - \left(\frac{g}{a}\right)^{2m}\right]}{\varrho\, m} \varphi_A + m \log \frac{a}{g} \varphi_G \right\}. \tag{9}$$

Nun reduziert sich in der Nähe des Nullpunktes (4) einfach auf das erste Glied, also U auf ein logarithmisches Potential. Die physikalische Bedeutung der Größe A ist dann einfach die durch -2 dividierte Ladung der Längeneinheit des Kathodendrahtes (vgl. § 4, **1**). Daher ist (9) vollkommen analog zu (2), und es ergibt sich für den Durchgriff sofort

$$D = \frac{\log \dfrac{g\left[1 - \left(\frac{g}{a}\right)^{2m}\right]}{\varrho\, m}}{m \log \dfrac{a}{g}}. \tag{10}$$

Setzen wir als Beispiel (wie es bei Verstärkerröhren in der Technik etwa üblich ist) $a = 5\,\text{mm}$, $g = 2\,\text{mm}$, $\varrho = 0{,}2\,\text{mm}$, $m = 6$, so erhalten wir aus (10): $D = 0{,}09 = 9$ Proz.

3. Die Raumladung. Die obige Behandlung ist nicht nur aus dem Grunde mangelhaft, weil sie ein Problem stationärer Ströme elektrostatisch behandelt, sondern auch deshalb, weil die Verwendung der Laplaceschen Gleichung unzulässig ist, da die von der Kathode emittierten Elektronen im Vakuum eine merkliche räumliche Ladungsdichte (Raumladung) hervorrufen. Ein heißes Metall ist demnach im Vakuum stets von einer „Raumladungswolke" umgeben, und es bildet ein weiteres wichtiges und interessantes Problem der Glühkathodenröhren, die Potential- und Dichteverteilung in einer solchen Wolke zu ermitteln. Hierzu dient eine im wesentlichen ebenfalls von Laue[1]) herrührende Entwicklung.

Aus statistischen Prinzipien kann man leicht entwickeln und auch durch das Experiment verifizieren (Richardson), daß die Dichte der Raumladung im Zustand statistischen Gleichgewichtes mit dem Potential U in irgend einem Punkte durch die Gleichung

$$\varrho = \varrho_0 e^{\alpha U} \tag{11}$$

verknüpft ist, worin ϱ_0 die Dichte an der Stelle $U = 0$ bedeutet und α eine von der Temperatur des Metalls allein abhängige Konstante ist. Wir wollen stets an der Oberfläche des Metalls $U = 0$ setzen, dann sind also für ein bestimmtes Problem ϱ_0 und α Konstanten, und zwar ist wegen der negativen Ladung der Elektronen $\varrho_0 < 0$.

Verbinden wir nun (11) mit der Poissonschen Gleichung § 1, 2, (3): $\Delta U = -4\pi\varrho$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\Delta U = -4\pi\varrho_0 e^{\alpha U}, \tag{12}$$

also eine Gleichung vom Typus $\Delta U = e^U$, die im 1. Bd., Kap. XIX, § 1 bereits kurz behandelt und von der die Existenz ihrer Lösungen bewiesen wurde.

Wir leiten zunächst eine allgemeine Eigenschaft von (12) ab. Wegen $\varrho_0 < 0$ ist nämlich stets $\Delta U > 0$ und daher kann U nach dem Gaußschen Satze[2]) nirgends ein Maximum haben, also nach (11) $|\varrho|$ ebenfalls kein Maximum. Eine Elektronenwolke also, die am Rande überall verschwindende Elektronendichte hat, kann folglich im Gleichgewicht nicht existieren; daher muß sie mit einem glühenden Metall an mindestens einer Stelle in Berührung stehen.

---

[1]) Laue, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **15**, 205.

[2]) Dieser Satz lautet: $\int_{(V)} \Delta U \, d\,V = \int_{(F)} \frac{\partial U}{\partial n} \, dF$, wie aus dem 1. Bd., II, § 3, Gl. (34) folgt, wenn man $v = 1$ setzt.

Wir wollen zunächst als einfachstes Problem die Lösung von (12) für den Fall aufsuchen, daß U nur von einer Koordinate x abhängt. Das kann man erreichen, wenn man als Glühelektrode eine unendlich ausgedehnte Platte senkrecht zur x-Achse annimmt. Aus (12) wird dann

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -4\pi\varrho_0 e^{\alpha U}. \tag{13}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{dU}{dx}$ auf beiden Seiten von (13) erhält man als erstes Integral

$$\frac{dU}{dx} = \sqrt{-\frac{8\pi\varrho_0}{\alpha}e^{\alpha U} + A^2}, \tag{14}$$

wo A^2 eine Integrationskonstante ist. Ist nur die eine Glühelektrode vorhanden (wir denken uns dieselbe als massiven Metallblock von $x = x_0$ bis $-\infty$ erstreckt), so kann U an einer Stelle $x > x_0$ nach dem Obigen kein Maximum und daher auch im Endlichen kein Minimum haben. Es darf also nirgends $\frac{dU}{dx}$ verschwinden, und daher muß $A^2 \geqq 0$ sein.

Wir bezeichnen die positiv genommene Wurzel von A^2 mit A, führen in (14) statt U die Variable ϱ gemäß (11) ein und erhalten

$$\left\{\begin{aligned} x &= \int \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho + B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-8\pi\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{B}} \log \frac{\sqrt{\varrho + B} - \sqrt{B}}{\sqrt{\varrho + B} + \sqrt{B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-8\pi\alpha}} + X, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist: $B = -\frac{A^2\alpha}{8\pi}$ und X eine willkürliche Konstante ist. Durch Auflösung von (15) nach ϱ erhält man

$$\varrho = B\left[\left(\frac{1 + e^{A\alpha(x-X)}}{1 - e^{A\alpha(x-X)}}\right)^2 - 1\right] = -\frac{A^2\alpha}{8\pi} \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\left(\frac{A\alpha}{2}(x - X)\right)}, \tag{16}$$

woraus man mit Hilfe von (11) auch $U(x)$ berechnen kann.

Aus (16) sieht man, daß für $x = X$: $\varrho = -\infty$ wird, es muß also jedenfalls $X < x_0$ sein. In der Nähe von $x = X$ verhält sich ϱ angenähert wie

$$\varrho = -\frac{1}{2\pi\alpha(x - X)^2}, \tag{17}$$

ist also unabhängig von A, und U wird daselbst unendlich wie $-2\log(x - X)$. Für $x_0 - X$ ergibt sich angenähert

$$x_0 - X = \sqrt{-\frac{1}{2\pi\alpha\varrho_0}},$$

woraus hervorgeht, daß, da im allgemeinen α und ϱ_0 beide sehr groß sind, die Ebene $x = X$ sehr nahe an der Oberfläche der Glühelektrode liegt. Wir können daher mit geringer Vernachlässigung diese Oberfläche an die Stelle $x = x_0 = X$ versetzen und so rechnen, als ob an der Oberfläche die Dichte und das Potential unendlich groß wären.

Für sehr große x wird aus (16)

$$\varrho = -\frac{A^2\alpha}{2\pi} e^{-A\alpha(x-X)}.$$

Die Dichte geht also wegen des großen α sehr rasch exponentiell gegen Null; nach (11) erhalten wir daraus für das Potential:

$$U = -A(x-X) + \frac{1}{\alpha}\log\left(-\frac{A^2\alpha}{2\pi\varrho_0}\right),$$

also einen linearen Verlauf. Die Konstante A wird festgelegt, wenn man in irgend einem Punkte x den Wert von U vorgibt, wenn man also dort z. B. eine kalte Elektrode anbringt, die gegen die heiße eine gewisse Potentialdifferenz φ besitzt. Wegen $A > 0$ muß $\varphi < 0$ sein, die kalte Elektrode also negativ, wie ja unmittelbar einleuchtet. Ist die kalte Elektrode positiv, so erhält man keinen stationären Zustand, sondern einen elektrischen Strom (s. **1** und **2**). Für $A = 0$ gilt Formel (17) exakt und im Unendlichen verschwindet ϱ dann quadratisch und U logarithmisch. Dies entspricht dem Falle, daß sich die kalte Elektrode im Unendlichen befindet und das Potential Null hat.

Wir gehen jetzt daran, die Differentialgleichung (12) in zwei Dimensionen zu lösen, was immer dann sich als brauchbar erweisen wird, wenn die Elektroden die Form unendlich langer Zylinder mit beliebigem Querschnitt haben. Wir haben dann zu schreiben:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4\pi\varrho_0 e^{\alpha U}. \tag{18}$$

Wir führen hier neue Koordinaten durch die komplexe Funktion $w = w(z)$ derart ein, daß $z = x + iy$ und $w = u + iv$. Dadurch soll die Funktion $U(x, y)$ übergehen in die Funktion $U^*(u, v)$. Wir definieren ferner eine weitere Funktion $V(u, v)$ durch die Gleichung

$$V = U^* + \frac{2}{\alpha}\log\left|\frac{dz}{dw}\right|. \tag{19}$$

Nun gilt die Beziehung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2}\right)\left|\frac{dw}{dz}\right|^2.$$

Dies in (18) eingesetzt, liefert mit Benutzung von (19):

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2} = -4\pi\varrho_0\left|\frac{dz}{dw}\right|^2 e^{\alpha U^*} = -4\pi\varrho_0 e^{\alpha V}.$$

Nach (19) gilt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2}$$

überall dort, wo die Funktion $\log \left| \frac{dz}{dw} \right|$ regulär ist. Daraus folgt weiter

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = -4\pi\varrho_0 e^{\alpha V}, \tag{20}$$

was mit (18) formal identisch ist.

Hat man also eine Lösung V von (20) für einen besonderen Spezialfall gefunden, so kann man daraus mit Hilfe von (19) sofort eine neue Lösung U^* ableiten, wobei $w(z)$ eine willkürliche analytische Funktion ist. Dabei geht die Stelle $U = \infty$ in die Stelle $V = \infty$ über, wobei allerdings in einzelnen Punkten, an singulären Stellen der Abbildung $z(w)$, Schwierigkeiten entstehen können, die besonders berücksichtigt werden müssen. Nun haben wir oben die allgemeine Lösung von (18) für den Fall gefunden, daß in den Punkten $x = X$ das Potential $U = \infty$ war. Führen wir mit Hilfe der konformen Abbildung $z(w)$ die Gerade $u = X$ in eine beliebige vorgegebene Kurve in der z-Ebene über, so erhalten wir aus (19) die dieser Randbedingung angepaßte Lösung. Hat die neue Randkurve keine Ecken, so wird sich in der Nähe derselben die Funktion V wiederum wie $-2\log l$ verhalten, wenn l den Abstand des betrachteten Punktes von der Randkurve bezeichnet. Wir können daher wiederum mit derselben Näherung wie oben diese Kurve mit der Leitlinie des Glühelektrodenzylinders identifizieren und daher das Problem der Verteilung der Raumladungsdichte in zwei Dimensionen allgemein für beliebige Gestalt des Glühelektrodenzylinders lösen.

Lautet z. B. die Abbildungsfunktion $w = \log \frac{z}{r_0}$, so werden durch sie die Geraden $u =$ konst in die Kreise um den Koordinatenursprung in der z-Ebene verwandelt, und man kann so ohne weiteres den für die technischen Anwendungen wichtigsten Fall behandeln, daß die Elektroden die Gestalt unendlich langer koaxialer Kreiszylinder haben. Die Singularität im Koordinatenursprung spielt hier keine Rolle, da sie jedenfalls nicht im Innern des betrachteten Gebietes gelegen ist. Analog geht man in anderen Fällen vor.

Schließlich kann man mit den entwickelten Hilfsmitteln auch noch die allgemeinste Lösung von (18) direkt angeben. Durch Ausrechnung überzeugt man sich nämlich leicht, daß eine partikuläre Lösung von (20) lautet:

$$V = -\frac{1}{\alpha}\left\{\log(-4\pi\alpha\varrho_0) - \log\left[\frac{8}{(1-|w|^2)^2}\right]\right\}.$$

Daraus erhält man gemäß (19) eine Lösung von (18):

$$U = \frac{1}{\alpha}\left\{ -\log(-4\pi\alpha\varrho_0) + \log\left[\frac{8|w'|^2}{(1-|w|^2)^2}\right]\right\}. \tag{21}$$

Darin ist nun $w(z)$ eine ganz willkürliche komplexe Funktion, so daß (21) eine allgemeine Lösung von (18) darstellt. Die Formel ist von Liouville angegeben worden, und Bieberbach hat gezeigt, daß tatsächlich alle reellen Lösungen von (18) in (21) enthalten sind.

Neuntes Kapitel.

Stationäre elektrische Strömungen.

§ 1. Aufstellung der Feldgleichungen und einfache Aufgaben.

1. Die physikalischen Gesetze. Die Gesetze über elektrische Strömungsfelder führen zu mathematischen Formulierungen, die mit denen der Elektrostatik nahezu übereinstimmen, so daß Aufgaben aus beiden Gebieten immer zueinander in Parallele gestellt werden können. Probleme, die weitergehende mathematische Behandlung erfordern, treten dann auf, wenn die Strömung sich durch Raumgebiete von verschiedener Leitfähigkeit erstreckt, wobei diese auch stetig veränderlich sein kann. Als Beispiele behandeln wir Erdungsprobleme und ein solches über Strömung in einer Flüssigkeit zwischen Elektroden. Wir geben hier die Ansätze nur für stationäre Gleichströme, womit aber auch praktisch eine genügende Annäherung für langsam-frequente Wechselströme erzielt wird. Man vernachlässigt damit diejenigen Ungleichartigkeiten der Stromverteilung, die bei Wechselströmen von der Induktion herrühren (z. B. Skin-Effekt).

Die Grundgesetze sind aus den Strömungserscheinungen in sogenannten linearen Leitern entnommen, d. h. Drähten von konstantem Querschnitt, die in einem nichtleitenden Medium liegen:

a) Wenn ein elektrischer Konduktor mit einem linearen Leiter verbunden ist, so wird die Zunahme bzw. Abnahme der Gesamtladung des Konduktors pro Zeiteinheit als elektrischer Strom in dem Leiter bezeichnet und nach einer Richtung als positiv, nach der andern als negativ gezählt.

b) In einem einzelnen linearen Leiter kann an jeder Stelle auf elektrostatischem Wege ein Potential U gemessen werden, dessen Abfall längs einer gegebenen Strecke dem den Leiter durchfließenden Strom J

proportional ist (Ohmsches Gesetz), d. h. zwischen zwei Punkten 1, 2 ist der Spannungsabfall:

$$U_2 - U_1 = W.J. \tag{1}$$

Die vom Material abhängige Konstante W, der Ohmsche Widerstand, ist proportional der Leiterlänge zwischen den Punkten 1, 2 und umgekehrt proportional dem Querschnitt des Drahtes.

c) An einer Verzweigungsstelle der linearen Leiter ist die Summe der zufließenden gleich der Summe der abfließenden Ströme (1. Kirchhoffsches Gesetz).

d) Auch in einem beliebig verzweigten Netz von linearen Stromleitern kann auf elektrostatischem Wege an jeder Stelle ein Potential gemessen werden, d. h. für einen beliebigen geschlossenen Weg längs des verzweigten Netzes ist immer die Summe der Spannungsabfälle Null (2. Kirchhoffsches Gesetz).

Aus einem beliebig verzweigten Netz kann man durch Grenzübergang ein räumliches Strömungsfeld erhalten. J. C. Maxwell hat daher diese Gesetze in folgender Form auf Strömungsfelder erweitert:

a) Das Strömungsfeld wird durch den Feldvektor i der Stromdichte charakterisiert, dessen Normalkomponente i_n zu einem beliebigen Flächenelement df den das Flächenelement durchsetzenden Strom pro Flächeneinheit angibt. Ist dann Q die innerhalb einer geschlossenen Fläche f befindliche wahre elektrostatische Ladung, so ist

$$-\int_f i_n \, df = \frac{dQ}{dt}, \tag{2}$$

d. h. die Ladungsänderung pro Zeiteinheit ist gleich dem die Fläche nach innen hin durchsetzenden Gesamtstrom (die Normalrichtung n ist nach außen gezählt).

Bezeichnet V das eingeschlossene Volumen, ϱ die räumliche Ladungsdichte, so ist

$$Q = \int_V \varrho \, dV \quad \text{und} \quad \int_f i_n \, df = \int_V \operatorname{div} i \, dV,$$

das letztere nach dem Gaußschen Satz (1. Bd., II, § 3, 3), also folgt aus (2) durch Anwendung auf ein Volumenelement:

$$-\operatorname{div} i = \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \tag{2'}$$

Bei stationärer Strömung folgt daraus immer

$$\operatorname{div} i = 0, \tag{3}$$

d. h. das Strömungsfeld ist das einer inkompressiblen Flüssigkeitsströmung.

b) Im stationären Strömungsfeld existiert eine elektrostatische Potentialfunktion U, derart, daß die elektrische Feldstärke überall

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U. \tag{4}$$

c) Jedem Material eigentümlich ist eine Konstante c des spezifischen elektrischen Widerstandes, die den Widerstand eines Würfels der Kantenlänge 1 mißt. Ihr reziproker Wert $\lambda = 1/c$ heißt die Leitfähigkeit. Dann ist, wenn man zwischen zwei Punkten des Strömungsfeldes auf einem beliebigen Wege integriert:

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 c \cdot i \, ds, \tag{5}$$

woraus folgt:

$$-\operatorname{grad} U = \mathfrak{E} = ci \text{ bzw. } i = \lambda \mathfrak{E} \tag{5'}$$

als differentielle Form des Ohmschen Gesetzes.

d) Das Gesetz (3) unter a) ist noch dahin zu erweitern, daß an der Grenze zweier Medien mit verschiedener Leitfähigkeit, λ_1, λ_2, die Normalkomponente i_n der Stromdichte stetig ist:

$$i_{n_1} = i_{n_2}. \tag{6}$$

Folglich ist die Normalkomponente der Feldstärke unstetig, nämlich:

$$\lambda_1 \mathfrak{E}_{n_1} = \lambda_2 \mathfrak{E}_{n_2}. \tag{6'}$$

Wenn daher Strom durch eine solche Grenzfläche hindurchtritt, so bildet sich auf ihr immer eine elektrostatische Ladungsdichte von der Größe

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_{n_2} - \mathfrak{E}_{n_1}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) i_n. \tag{7}$$

Die elektrostatische Potentialfunktion U des Feldes kann man sich erzeugt denken aus dieser Ladungsverteilung, die auch noch in dem Grenzfall vorhanden ist, daß ein Leiter (λ_1) an einen Nichtleiter ($\lambda_2 = 0$) grenzt, in welchem Fall zwar auch $i_n = 0$ wird, aber doch der Grenzwert $i_n/\lambda_2 = \mathfrak{E}_{n_2}$ endlich bleibt.

Dagegen ist nach b) die Tangentialkomponente der Feldstärke stetig (vgl. VIII, § 1) und daher die Tangentialkomponente der Stromdichte unstetig:

$$\mathfrak{E}_{s_2} - \mathfrak{E}_{s_1} = 0, \text{ d. i. } \frac{i_{s_2}}{\lambda_2} - \frac{i_{s_1}}{\lambda_1} = 0. \tag{8}$$

Aus der Stetigkeit der tangentialen Feldkomponente und der normalen Stromkomponente ergibt sich, wie in ähnlichen Fällen, ein Brechungsgesetz für die Stromlinien an der Trennungsfläche. Wenn α_1 bzw. α_2 den Winkel der Stromlinien in den beiden Medien gegen die Normale der Trennungsfläche bedeuten, so ist

$$|\mathfrak{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathfrak{E}_2| \sin \alpha_2; \quad \lambda_1 |\mathfrak{E}_1| \cos \alpha_1 = \lambda_2 |\mathfrak{E}_2| \cos \alpha_2,$$

also

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \lambda_1 : \lambda_2$$

das Brechungsgesetz.

e) Da $4\pi\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{E}$ zu setzen ist (nach VIII, § 1), so folgt aus (5′) und (2′) in einem Gebiet konstanter Leitfähigkeit λ:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{i} = -\lambda\operatorname{div}\mathfrak{E} = -4\pi\lambda\varrho, \tag{9}$$

woraus

$$\varrho = \varrho_0 e^{-4\pi\lambda t}$$

folgt, d. h. im Innern eines homogenen Leiters kann auch bei nichtstationärer Strömung Ladung nur vorhanden sein, wenn sie anfänglich erzeugt war. Ihre Dichte nimmt dann an jeder Stelle nach einem exponentiellen Gesetz ab. Sieht man von solcher anfänglichen Ladungserzeugung ab, so gilt auch bei nichtstationärer Strömung $\operatorname{div}\mathfrak{i} = 0$.

Zu den so formulierten Grundgesetzen für Strömungsfelder erhält man vollständige elektrostatische Analoga, wenn man an Stelle des elektrischen Stromes die dielektrische Verschiebung betrachtet, also das elektrostatische Feld in einem inhomogenen Dielektrikum, so daß an Stelle der Leitfähigkeit λ die „dielektrische Leitfähigkeit“ ε tritt. Ein Leiter im Sinne der Elektrostatik kann so auch als ein Gebiet mit unendlich großer Dielektrizitätskonstante betrachtet werden, in dem zwar die Feldstärke verschwindet, aber die dielektrische Verschiebung endlich bleibt, ebenso wie nach den obigen Gesetzen in einem vollkommenen Leiter ($\lambda = \infty$) zwar die Feldstärke $\mathfrak{E}$ verschwindet, aber die Stromdichte endlich bleibt.

2. Einfache Aufgaben über stationäre Strömungsfelder. Die einfachsten Anwendungen finden diese Gesetze der elektrischen Strömungsfelder, wenn ein metallischer Leiter, dessen Leitfähigkeit $\lambda_2 = \infty$ angenommen sei, in ein unendlich ausgedehntes, homogen leitendes Medium von der Leitfähigkeit λ, z. B. die Erde, eingebettet ist und Strom aus dem Metall in die Erde übertritt. Infolge des Strömungswiderstandes der Erde entsteht dann ein Spannungsunterschied zwischen dem Metall (der „Elektrode“) und entfernteren Punkten der Erde, dessen Berechnung von praktischer Bedeutung ist.

Ist i_n die aus der Oberfläche austretende Stromdichte, so ist $\mathfrak{E}_n = i_n/\lambda$ die Normalkomponente der Feldstärke im äußeren Medium, während im Metall die Feldstärke verschwindet. Wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{E}_s$ verschwindet dann die tangentiale Komponente von $\mathfrak{E}$ auch im Außengebiet längs der Grenzfläche, und daher verhält sich das elektrische Feld im Außengebiet wie ein elektrostatisches Feld. Längs der Grenzfläche bildet sich elektrische Ladung von der Dichte $\sigma = \mathfrak{E}_n/4\pi = i_n/4\pi\lambda$,

und die gesamte Ladung wird daher, wenn $J = \int i_n \, df$ den gesamten austretenden Strom bezeichnet:

$$e = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{E}_n \, df = \frac{J}{4\pi\lambda}.$$

Ist endlich die elektrostatische Kapazität des Leiters gegen das Unendliche C, so wird der Spannungsabfall gegen entfernte Punkte: $V = e/C = J/4\pi\lambda C$. Im Fall einer Kugel vom Radius a ist also $V = J/4\pi\lambda a$.

Eine kleine Modifikation dieser Überlegung ergibt den Fall, daß durch eine metallische Elektrode, die in die Erdoberfläche eingelagert ist (z. B. von Halbkugelform), der Erde Strom zugeführt wird. Längs der Erdoberfläche muß dann die normale Strömungskomponente verschwinden. Man führt diesen Fall durch Spiegelung an der Erdoberfläche auf den vorigen zurück, muß aber dabei mit dem Doppelten des übertretenden Stromes, also $2J$, rechnen. Unter C' verstehen wir jetzt die Kapazität des durch die Spiegelung entstehenden Vollkörpers (z. B. a im Falle der Halbkugel vom Radius a). Dann wird also

$$V = J/2\pi\lambda C'.$$

Der Faktor $1/4\pi\lambda C$ bzw. $1/2\pi\lambda C'$ wird als „Erdungswiderstand" der Elektrode bezeichnet. Bei den Anwendungen pflegt man die Elektrode, z. B. von Platten- oder Stabform, durch Ellipsoide bzw. Halbellipsoide von ähnlichem Verhältnis der Hauptabmessungen, zu ersetzen, und wendet dann die früher (VIII, § 2, 2) für die Kapazität der Ellipsoide abgeleiteten Formeln an.

Von Wichtigkeit ist z. B. der Fall, daß die Elektrode eine die Erdoberfläche berührende kleine Kreisscheibe vom Radius b ist. Nach den Formeln von IX, § 3, 3 ist die Kapazität der Kreisscheibe $C' = 2b/\pi$, der Erdungswiderstand also in diesem Falle $1/4b\lambda$.

§ 2. Stromübertritt zwischen Erde und metallischen Leitungen.

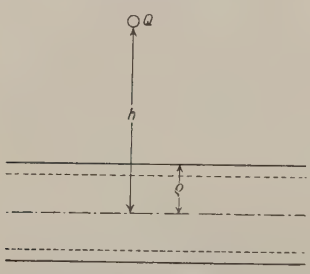
1. Randwertaufgabe und Integralgleichung. Die in der letzten Aufgabe des § 1 gemachte Voraussetzung verschwindenden spezifischen Widerstandes der metallischen Leiter (im Vergleich zum spezifischen Widerstand der Umgebung) wird unzulässig, wenn der metallische Leiter die Form einer „linearen" Leitung hat, d. h. in einer Längsrichtung sehr ausgedehnt ist im Vergleich zu den Querschnittsdimensionen. Denn dann wird der Spannungsabfall in der Längsrichtung des Leiters von gleicher Größenordnung wie der in der umgebenden Erde. Wir behandeln hier folgende Strömungsaufgabe[1]):

Unter Absehen von der Erdoberfläche (die durch Spiegelung ohne neue Schwierigkeit berücksichtigt werden könnte, vgl. l. c.) nehmen wir

[1]) Weitere auch technische Ausführungen siehe bei F. Noether, Wiss. Veröffentl. d. Siemens-Schuckert-Konzerns I, 3 (1921), S. 35.

an, daß ein unendlich langes, kreiszylindrisches Leitungsrohr in die homogen ausgedehnte Erde eingebettet sei. Seine Achse sei x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, sein äußerer Radius ϱ und sein Metallquerschnitt f. Im senkrechten Abstand h von dieser Achse trete aus einer sehr kleinen kugelförmigen Elektrode Q der Gesamtstrom J_0 in die Erde über; gefragt wird nach der Verteilung der Strömung in der Erde und im Leitungsrohr. Die Leitfähigkeit der Erde sei λ, die des Metalls Λ, und von der Leitfähigkeit der das Rohrinnere erfüllenden Substanz soll ganz abgesehen werden, da sie jedenfalls sehr klein neben Λ ist und praktisch durch geringe Abänderung von f berücksichtigt werden könnte. Der Widerstand der Leitung bei homogener Stromverteilung ist also $w = 1/\Lambda f$ pro Längeneinheit.

Fig. 26.



Von dem in die Erde eintretenden Strom tritt ein Teil in die Leitung über und im weiteren Verlauf der Strömung wieder aus und in die Erde zurück. Aus den Ansätzen von § 1 ergibt sich für diese Strömung folgende Randwertaufgabe: Es soll ein Strömungsfeld (i) und damit verbundenes elektrostatisches Feld ($\mathfrak{E}$) gesucht werden, das sich durch eine der Potentialgleichung genügende Funktion U darstellen läßt ($\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$). In der Umgebung der Stelle $x = y = 0$, $z = h$ soll sich U wie die Funktion $J_0/4\pi\lambda r$ verhalten ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}$), und ebenso soll in großem Abstand U mit $1/r$ zu 0 gehen. Längs der Oberfläche $y^2 + z^2 = \varrho^2$ der Leitung, die σ heiße, soll U stetig, dagegen die Normalableitung unstetig sein, und zwar, wenn mit a und i äußere und innere Ableitung unterschieden werden:

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial n_a} = \Lambda \frac{\partial U}{\partial n_i}; \tag{1}$$

(falls ein innerer Leitungsradius existiert, so ist dort $\partial U/\partial n = 0$ zu fordern).

Diese Aufgabe kann im Anschluß an den 1. Bd., XIV, § 3, 2 in eine Integralgleichung umgeformt werden, indem man die Funktion U mittels einer einfachen Belegung der Oberfläche σ von der Dichte μ darstellt, die zugleich die wirkliche elektrostatische Ladungsverteilung ergibt. Die Potentialfunktion nimmt dann die Form an:

$$\begin{cases} U = U_0 + U_1 = \dfrac{J_0}{4\pi\lambda r} + \displaystyle\int_\sigma \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{R}\, d\sigma; \\ R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \end{cases} \tag{2}$$

(ξ, η, ζ sind Koordinaten des Integrationspunktes auf σ). Die Randbedingung (1) läßt sich schreiben:

$$(1') \qquad \frac{\lambda+\Lambda}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial n_a}-\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)+\frac{\lambda-\Lambda}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial n_a}+\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)=0$$

und geht durch Einsatz von (2) über in die Integralgleichung (vgl. l. c.):

$$(3) \qquad \begin{cases} -2\pi(\lambda+\Lambda)\mu(xyz)+(\lambda-\Lambda)\int\limits_\sigma \mu(\xi\eta\zeta)\dfrac{\partial(1/R)}{\partial n}\,d\sigma \\ \qquad\qquad =(\Lambda-\lambda)\dfrac{\partial U_0(xyz)}{\partial n}, \end{cases}$$

die längs der Leiteroberfläche gilt.

Die so formulierte Randwertaufgabe und Integralgleichung, deren weitere Behandlung allerdings sehr mühsam wäre, würde die Ladungs-, damit die Spannungs- und Stromverteilung, sowohl in der Längsrichtung als auch in der Querrichtung der Leitung ergeben. Von praktischem Interesse ist indes nur die Verteilung in der Längsrichtung, und für deren Berechnung gerade ist die bisherige Formulierung wenig geeignet. Es ist daher wichtig, daß sich durch eine vereinfachte Formulierung, die uns unmittelbar auf eine Integralgleichung führen wird, gerade diese Längsverteilung direkt erfassen läßt.

2. Direkter Ansatz einer Integralgleichung. Von dem in die Erde eintretenden Strom J_0 tritt ein Teil in die Metalleitung über, wo er in der Hauptsache parallel der Achse fließt. Der den Querschnitt f parallel der Achse durchfließende Strom ist das Integral der Längskomponenten i_x der Stromdichte über diesen Querschnitt und heiße $J(x)$ im Querschnitt mit der Abszisse x. Es ist also

$$(4) \qquad J(x)=\int\limits_f i_x(x,y,z)\,df.$$

Infolge der Spannungsunterschiede zwischen dem Rohr und benachbarten Teilen der Erde tritt im weiteren Verlauf der Strom auch wieder aus der Leitung aus. Die Summe aus ein- und austretendem Strom, nach außen positiv gerechnet, sei pro Längeneinheit der Leitung $i(x)$. Sie ist gleich dem über den Umfang l eines Querschnittes genommenen Integral der Normalkomponente der Stromdichte an der Oberfläche:

$$(5) \qquad i(x)=\int\limits_0^{2\pi\varrho} i_n\,dl=\lambda\int\limits_0^{2\pi\varrho}\mathfrak{E}_{na}\,dl=\Lambda\int\limits_0^{2\pi\varrho}\mathfrak{E}_{ni}\,dl.$$

$\mathfrak{E}_{na}$ bzw. $\mathfrak{E}_{ni}$ bedeuten hier die Normalkomponente der elektrostatischen Feldstärke, außen und innen. Dann ist wegen des Stromerhaltungsgesetzes (3) in § 1:

$$(6) \qquad i(x)=-\frac{dJ(x)}{dx}.$$

Wegen der Unstetigkeit der Feldstärke ist ferner die Oberfläche als elektrisch geladen zu betrachten, und zwar ist die Ladung q pro Längeneinheit das Integral der in 1 eingeführten Ladungsdichte μ über den Umfang des Querschnittes:

$$(7) \qquad q(x) = \int_0^{2\pi\varrho} \mu(\xi\eta\zeta)\, dl = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi\varrho} (\mathfrak{E}_{na} - \mathfrak{E}_{ni})\, dl,$$

also nach (5)

$$(7') \qquad q(x) = \frac{1 - \lambda/\Lambda}{4\pi\lambda}\, i(x).$$

Wir betrachten nun den Spannungsverlauf längs der Rohrachse ($y = z = 0$), der $U(x)$ heiße. Die nach (7) auf der Leiteroberfläche verteilte Ladung erzeugt längs der Achse im Punkte x das Potential:

$$(8) \qquad U_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)}{R_{x\xi}}\, d\xi, \qquad \text{mit } R_{x\xi} = \sqrt{(x-\xi)^2 + \varrho^2}.$$

Das ungestörte, von der Stromquelle Q erzeugte Potential ist dagegen nach § 1:

$$(9) \qquad U_0 = \frac{J_0}{4\pi\lambda r}, \qquad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}.$$

Also ist der gesamte Potentialverlauf längs der Rohrachse ($y = z = 0$):

$$(10) \qquad U(x) = \frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{x^2 + h^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)}{R_{x\xi}}\, d\xi.$$

Durch diesen Ansatz wäre die Aufgabe bereits formuliert, wenn der Ohmsche Widerstand der Leitung vernachlässigbar (d. h. $\Lambda f = \infty$) wäre. Denn dann wäre $U(x) = \text{konst}$, und zwar $= 0$, wie für $x = \infty$. Es handelt sich so um die elektrostatische Aufgabe, die Ladungsverteilung $q(x)$ zu berechnen, die dem von außen gegebenen Potentialfeld U_0 Gleichgewicht hält, im Sinne von Kap. VIII, § 2. Diese Gleichung

$$(10') \qquad 0 = \frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{x^2 + h^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)}{R_{x\xi}}\, d\xi$$

ist eine „Integralgleichung erster Art", die die Verteilung der Stromaufnahme in einem „vollkommenen" Leiter bestimmt oder, praktisch, die Aufnahme in einem genügend kurzen Stück des wirklichen Leiters.

Um dagegen auch den Wiederaustritt des Stromes in die Erde zu finden, muß man den endlichen Wert des Leitungswiderstandes berücksichtigen. Der nach (10) berechnete Spannungsverlauf längs der Achse

muß mit dem aus dem Ohmschen Widerstand resultierenden übereinstimmen. Wir müssen hier die näherungsweise Voraussetzung machen, daß dieser Ohmsche Spannungsabfall sich aus dem Gesamtstrom $J(x)$ im Querschnitt und dem Widerstand pro Längeneinheit $w = 1/\Delta f$ berechnet, d. h.

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{J(x)}{\Delta f}. \tag{11}$$

Darin ist die Annahme enthalten, daß der Strom $J(x)$ sich homogen über den Querschnitt verteile und daß folglich auch die Spannung über den Querschnitt konstant sei. Es sind also die Querkomponenten der Strömung und des elektrischen Feldes im Innern der Leitung vernachlässigt; konsequenterweise unterdrücken wir also auch in (7) das Glied $\mathfrak{E}_{ni}$ und folglich in (7′) das Glied λ/Δ und schreiben:

$$q(x) = \frac{i(x)}{4\pi\lambda}. \tag{7''}$$

Aus (7″), (6) und (11) folgt:

$$q(x) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\frac{dJ}{dx} = \frac{\Delta f}{4\pi\lambda}\frac{d^2U}{dx^2} \tag{12}$$

und somit erhalten wir aus (10):

$$U(x) - \frac{\Delta f}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}\frac{d\xi}{R_{x\xi}} = \frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{x^2+h^2}}. \tag{13}$$

Es handelt sich hier um eine inhomogene lineare Integrodifferentialgleichung (zweiter Art) für den Spannungsabfall längs der Leitung. Die Funktion $1/R_{x\xi} = 1/\sqrt{(x-\xi)^2+\varrho^2}$ sei als ihr Kern bezeichnet. Erwähnt sei noch, daß die Form der Gleichung unverändert bleibt, wenn der Querschnitt des zylindrischen Leiters nicht kreisförmig ist. Nur tritt dann an Stelle von ϱ eine entsprechende Dimension des Querschnittes (vgl. hierüber die auf S. 325 zitierte Arbeit) und man kann nicht von dem Potentialwert in der Achse, sondern nur von einem Mittel der Potentialwerte im Querschnitt sprechen.

3. Auflösung der Integralgleichung für die Stromaufnahme. Die Auflösung der Integralgleichung (10′) ist nach dem 1. Bd., XII, § 3, 4 möglich, wenn man die Eigenfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung kennt. Wir führen zu dem Zwecke zunächst die unbenannten Größen ein:

$$\frac{x}{\varrho} = t, \quad \frac{\xi}{\varrho} = \tau, \quad \frac{h}{\varrho} = \eta. \tag{14}$$

In der Integralgleichung (10′) ist jetzt die Ladung pro Längeneinheit q (oder auch die Ladung $\varrho q = \mathfrak{q}$ pro Längeneinheit ϱ des neuen Maßsystems) als Funktion von t gesucht und ergibt sich aus der Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau)\,\mathfrak{q}(\tau)\,d\tau = -\frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{t^2+\eta^2}}, \tag{15}$$

mit dem Kern

$$K(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2+1}}. \tag{15′}$$

Ihr ist die homogene Integralgleichung (Parameter k) zugeordnet:

$$\psi(t) - k\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \tag{16}$$

deren Eigenlösungen wir zunächst finden müssen.

Es liegt hier in der Tat ein besonders einfacher Fall der homogenen Integralgleichung insofern vor, als der Kern $K(t-\tau)$ symmetrisch in bezug auf die Variablen t und τ ist und nur von der Differenz $t-\tau$ abhängt, und als ferner die Integration längs der ganzen reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt ist. Für diese Gleichung ist daher kein Punkt t vor anderen ausgezeichnet und sie kann als volles Analogon zu den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelten, deren wesentliche Eigenschaft die ist: Wenn eine Lösung $\psi(t)$ bekannt ist, so ist auch $\psi(t+c)$, mit einer beliebigen Konstanten c, eine Lösung der nämlichen Gleichung, d. h. hier für den nämlichen Parameter k. Gemäß dieser Analogie suchen wir die allgemeine Lösung in der Form:

$$\psi_k(t) = \sin\mu_k(t+c). \tag{17}$$

Der Ansatz (17), in die Gl. (16) eingesetzt, ergibt (mit der Abkürzung $\tau - t = \xi$):

$$\sin\mu_k(t+c) = k\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\sin\mu_k(\xi+t+c)\,d\xi$$

$$= k\sin\mu_k(t+c)\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\cos\mu_k\xi\,d\xi + k\cos\mu_k(t+c)\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\sin\mu_k\xi\,d\xi.$$

Mit Rücksicht darauf, daß $K(\xi)$ eine gerade Funktion ist, verschwindet hier das letzte Integral und es ergibt sich unabhängig von c die Bedingung:

$$1 = k\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\cos\mu_k\xi\,d\xi = 2k\int_{0}^{\infty} K(\xi)\cos\mu_k\xi\,d\xi, \tag{18}$$

wodurch die Abhängigkeit zwischen k und μ_k bestimmt ist. Wir lassen nun μ_k alle reellen Werte durchlaufen und suchen je den nach (18) zugehörigen Wert von $1/2\,k$ bzw. k.

Ohne weitere Ausführung der Integration erkennt man mit Rücksicht auf die Definition (15′) für $K(\xi) = K(t-\tau)$, daß für $\mu_k = 0$ das Integral $1/2\,k$ zu ∞ wird, also k zu 0, und für $\mu_k = \infty$ das Integral $1/2\,k$ zu 0, also k zu $+\infty$. Daß dazwischen k monoton mit μ_k von 0 zu ∞ geht, kann man nur durch nähere analytische Untersuchung erweisen. Wir schreiben zu dem Zweck:

$$\frac{1}{k} = p(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu \xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi. \tag{19}$$

Dieses Integral läßt sich durch komplexe Integration in ein bekanntes Integral überführen, indem man den reellen Integrationsweg I nach Fig. 27 in den Schleifenweg II um den Verzweigungspunkt $\xi = +i$ verlegt (vgl. auch 1. Bd., S. 335). Die Substitution $\xi = i\bar{\xi} = i(z+1)$ ergibt dann wieder das reelle Integral:

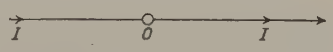
$$p(\mu) = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{e^{-\mu\bar{\xi}}}{\sqrt{\bar{\xi}^2-1}}\, d\bar{\xi} = 2e^{-\mu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\mu z}}{\sqrt{z(z+1)}}\, dz. \tag{19′}$$

Das ist die Normalform des ersten Hankelschen Integrals (vgl. 1. Bd., VIII, § 3, 8) 0-ter Ordnung. Es ist hiernach:

$$\frac{1}{k} = p(\mu_k) = i\pi H_0^{(1)}(i\mu_k) \tag{20}$$

in der üblichen Bezeichnung der Hankelschen Funktionen. Da $H_0^{(1)}(i\mu)$ nach (19′) eine monoton von ∞ bis 0 abnehmende Funktion ist[1]), wenn μ monoton reell von 0 bis $+\infty$ wächst, so folgt, daß in der Tat k monoton mit μ_k von 0 bis ∞ wächst, und zwar ist die Zuordnung eine eindeutige. Zu jedem positiven Parameter k gibt es also Eigenlösungen der Integralgleichung (16), und zwar die beiden linear unabhängigen:

Fig. 27.



$$\psi_{k1} = \cos \mu_k t, \quad \psi_{k2} = \sin \mu_k t.$$

Negative k dagegen können nicht Eigenwert sein.

Wohl aber ist der Parameterwert $k = \infty$ (bzw. $\mu_k = 0$), der der zu lösenden inhomogenen Gl. (15) entspricht, noch als Eigenwert zu betrachten. Daher steht die Lösbarkeit dieser Gleichung nicht ohne weiteres fest, sondern (nach Kap. XII, § 1, 5 vom 1. Bd.) nur dann,

[1]) Vgl. z. B. auch Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

wenn die Funktion auf der rechten Seite, die $f(t)$ heißen möge, die Bedingungen erfüllt:

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \mu \tau \, d\tau = \lim_{\mu \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \mu \tau \, d\tau = 0. \tag{21}$$

Da im Fall der Gl. (15)

$$f(t) = -\frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{t^2+\eta^2}}$$

für $t = \infty$ zu 0 abnimmt und sonst überall endlich bleibt, so sind diese Bedingungen in der Tat erfüllt.

Um die vollständige Lösung nun wirklich anzugeben, entwickeln wir die Funktion $f(t)$ in ein Fouriersches Integral (1. Bd., XI, § 2, 6), in dem wir setzen

$$f(t) = \frac{J_0}{4\pi\lambda} \int_0^{\infty} A(\mu) \cos \mu t \, d\mu, \tag{22}$$

worin dann $A(\mu)$ den Wert hat:

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu \tau}{\sqrt{\tau^2+\eta^2}} \, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu \eta \tau'}{\sqrt{\tau'^2+1}} \, d\tau' = \frac{1}{\pi} \, p(\eta\mu) \tag{22'}$$

nach (19) und (20).

Andererseits sei die unbekannte Funktion $\mathfrak{q}(t)$ gleichfalls in der Form eines Fourierschen Integrals

$$\mathfrak{q}(t) = \int_0^{\infty} B(\mu) \cos \mu t \, d\mu \tag{23}$$

gesucht. Setzt man diese Ansätze in (15) ein, so erhält man, mittels einer Vertauschung der Integrationsordnung und Berücksichtigung, daß $\cos \mu(t)$ der Gl. (16) genügt:

$$-\frac{J_0}{4\pi\lambda} \int_0^{\infty} A(\mu) \cos \mu t \, d\mu$$

$$= \int_0^{\infty} B(\mu) \, d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) \cos \mu \tau \, d\tau = \int_0^{\infty} \frac{B(\mu)}{k(\mu)} \cos \mu t \, d\mu$$

und folglich durch Vergleichung

$$B(\mu) = -\frac{J_0 k(\mu)}{4\pi\lambda} A(\mu) = -\frac{J_0}{4\pi^2\lambda} \frac{p(\eta\mu)}{p(\mu)}. \tag{23'}$$

Wir berechnen schließlich noch die gesamte Stromaufnahme in der Leitung. Sie wird mit Rücksicht auf (6) und (7''):

$$\bar{J} = -\int_{-\infty}^{+\infty} i(\xi) \, d\xi = -4\pi\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) \, d\xi = -4\pi\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{q}(\tau) \, d\tau.$$

Da nun $\mathfrak{q}(t)$ in (23) in Form eines Fourierschen Integrals gegeben ist, so erhält man das Integral über $\mathfrak{q}(\tau)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ direkt aus dem Grenzwert, dem sich der Fourierkoeffizient $B(\mu)$ für $\mu \to 0$ annähert. Es wird:

$$(24) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{q}(\tau)\, d\tau = \lim_{\mu \to 0} \pi B(\mu) = -\frac{J_0}{4\pi\lambda} \lim_{\mu \to 0} \frac{p(\eta\mu)}{p(\mu)}.$$

Nun gilt aber für kleine μ nach Gl. (20) und Formeln vom 1. Bd., VIII, § 3 [1]) die Entwicklung:

$$p(\mu) = -2\ln\left(\frac{\gamma}{2}\mu\right)\cdot\left[1 + \frac{(\mu/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(\mu/2)^4}{(2!)^2} + \cdots\right] - \left[\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(\mu/2)^4}{(2!)^2} + \cdots\right],$$

wobei $C = \ln\gamma$ die Eulersche Konstante 0,577... bedeutet (1. Bd., IV, § 6, 3). Es folgt daraus, daß $p(\mu)$ und $p(\eta\mu)$ für $\mu \to 0$ logarithmisch unendlich werden und sich dabei in der Grenze nur additiv um die endliche Konstante $2\ln\eta$ unterscheiden. Also geht der Grenzwert in (24) zu 1 und es wird: $\bar{J} = J_0$, d. h. der ganze Strom wird von dem Rohr aufgenommen (wohlgemerkt solange die Leitfähigkeit Λ als unendlich angenommen war).

Es sei noch der besondere Fall bemerkt: $\eta = 1$, d. h. $h = \varrho$, für den die Stromquelle Q dicht an die Oberfläche der Leitung heranrückt. Dann wird nach (23), (23'):

$$\mathfrak{q}(t) = -\frac{J_0}{4\pi^2\lambda}\int_0^\infty \cos\mu t\, d\mu.$$

Dies ist die Fourierdarstellung derjenigen (Zacken-)Funktion, die im allgemeinen 0 ist, an der Stelle $t = 0$ aber so unendlich wird, daß ihr Integral, zwischen einer beliebigen negativen und einer positiven Grenze erstreckt, endlich, und zwar $= -J_0/4\pi\lambda$ wird. Die gesamte Stromaufnahme, die wieder J_0 beträgt, ist dann auf diesen Punkt konzentriert. Diese Bemerkung ist für die Diskussion des Wiederaustritts von Wichtigkeit, da hier der einfachste Fall vorliegt, daß der Strom durch unmittelbare metallische Berührung geschlossen der Leitung zugeführt wird.

4. Auflösung der Integrodifferentialgleichung für den Stromaustritt. Für die Integrodifferentialgleichung (13) wird die Lösung auf ähnlichem Wege gefunden. Wir führen wieder die unbenannten Größen t, τ, η

[1]) Vgl. auch Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

nach (14) ein; ferner sei als unbekannte Funktion das Verhältnis des Potentials $U(x)$ zu dem primär an der Stelle $x = 0$ erzeugten gewählt:

$$\varphi(t) = \frac{U(x)}{J_0/4\pi\lambda h} = U(\varrho t)\cdot\frac{4\pi\lambda h}{J_0} \tag{25}$$

und $\varkappa^2$ sei der unbenannte, positive, praktisch immer große Parameter:

$$\varkappa^2 = \frac{A}{\lambda}\,\frac{f}{4\pi\varrho^2}. \tag{26}$$

Damit erhält die Integrodifferentialgleichung die Gestalt:

$$\varphi(t) - \varkappa^2\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau)\,\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}\,d\tau = \frac{\eta}{\sqrt{t^2+\eta^2}} \tag{27}$$

mit dem Kern $K(t-\tau)$ nach Gl. (15′).

Die zugehörige homogene Integrodifferentialgleichung:

$$\psi(t) - k\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau)\,\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau = 0 \tag{27′}$$

habe wieder die unabhängigen Eigenlösungen:

$$\psi_k(t) = \sin(\mu_k t + c).$$

Dann ergibt sich auf dem gleichen Wege wie oben unter 3 der Zusammenhang zwischen k und μ_k aus der Gleichung:

$$1 + k\mu_k^2\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\cos\mu_k\xi\,d\xi = 0. \tag{28}$$

Damit ist zu jedem μ eindeutig ein zugehöriges $k(\mu)$ bestimmt, und zwar wird, nach der Bezeichnung (19), (20):

$$\frac{1}{k(\mu)} = -\mu^2 p(\mu) = -i\pi\mu^2 H_0^1(i\mu). \tag{28′}$$

Alle Eigenwerte k sind demnach jetzt negativ, mit Rücksicht auf die obige Diskussion von $p(\mu)$. Da $p(\mu)$ bei $\mu = 0$ nur logarithmisch unendlich wird, ist $1/k = 0$ für $\mu = 0$, wie es auch bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fall wäre. Für große μ gilt die asymptotische Entwicklung (vgl. 1. Bd., S. 357, und „Funktionentafeln“):

$$p(\mu) = \pi i H_0^1(i\mu) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\,e^{-\mu}\left[1 - \frac{1}{8\mu} + \frac{9}{2!(8\mu)^2}\cdots\right], \tag{29}$$

und daher geht $1/k$ für große μ wieder zu 0, wie es auch oben bei der Integralgleichung unter 3 der Fall war. Zusammenfassend sieht man also, daß, während μ monoton von 0 bis ∞ wächst, zugleich k von

$-\infty$ bis zu einem gewissen negativen Wert von kleinstem Betrag herabsinkt und dann wieder zu $-\infty$ ansteigt. Der absolute Betrag der negativen Eigenwerte k hat eine nicht verschwindende untere Grenze. Es folgt daraus weiter nach den Sätzen aus dem 1. Bd., XII, § 1, daß die inhomogene Gleichung (27) für jeden positiven Parameter $\varkappa^2$ lösbar ist.

Zur Bestimmung der Lösung setzen wir wieder die rechte Seite von (27) in der Fourierschen Form (22) an:

$$\frac{\eta}{\sqrt{t^2+\eta^2}} = \eta \int_0^\infty A(\mu) \cos \mu t \, d\mu; \tag{22''}$$

mit

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu \tau}{\sqrt{\tau^2+\eta^2}} \, d\tau = \frac{1}{\pi} \, p(\eta \mu)$$

nach (22'). Ferner sei $\varphi(t)$ gesucht in der Fourierschen Form:

$$\varphi(t) = \int_0^\infty C(\mu) \cos \mu t \, d\mu, \tag{30}$$

so daß (27) die Gestalt annimmt:

$$\left\{ \int_0^\infty C(\mu) \cos \mu t \, d\mu + \varkappa^2 \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) \int_0^\infty \mu^2 C(\mu) \cos \mu \tau \, d\mu \, d\tau \right. \tag{31}$$
$$\left. = \eta \int_0^\infty A(\mu) \cos \mu t \, dt. \right.$$

Da $\cos \mu t$ eine Lösung der homogenen Gleichung (27') mit dem Parameter $k(\mu)$ ist, so entsteht aus (31) nach Vertauschung der Integrationsordnung in dem Doppelintegral:

$$\int_0^\infty C(\mu) \left(1 - \frac{\varkappa^2}{k(\mu)}\right) \cos \mu t \, d\mu = \eta \int_0^\infty A(\mu) \cos \mu t \, d\mu, \tag{32}$$

also

$$C(\mu) = \frac{\eta A(\mu)}{1 - \varkappa^2/k(\mu)} = \frac{\eta A(\mu)}{1 + \varkappa^2 \mu^2 p(\mu)} \tag{33}$$

mittels (28'). Damit ist formal die Auflösung geleistet.

Was die Konvergenz der Lösung (30), (33) betrifft, so ist zu beachten, daß $p(\mu)$ mit wachsendem μ nach (29) exponentiell zu 0 geht, also $C(\mu)$ gegen $\eta A(\mu)$ konvergiert und daher die Konvergenz des Integrals (30) die Konvergenz von (22) voraussetzt und durch sie gewährleistet ist. An geringere Voraussetzungen gebunden ist die Darstellung der Funktion $\varphi(t) - F(t)$, wenn unter $F(t)$ die rechte Seite

von (27) oder allgemeiner eine beliebige Funktion an dieser Stelle verstanden wird. Man erhält

$$(34) \qquad \varphi(t) - F(t) = -\eta \varkappa^2 \int_0^\infty A(\mu) \frac{\mu^2 p(\mu)}{1 + \varkappa^2 \mu^2 p(\mu)} \cos \mu t \, d\mu,$$

und wegen der exponentiellen Abnahme von $p(\mu)$ im Zähler konvergiert dieses Integral viel stärker als (32). Wir können hier noch für $\eta A(\mu)$ im allgemeinen Fall seine Integralform einsetzen:

$$\eta A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cos \mu \tau \, d\tau.$$

Dann wird wegen des asymptotischen Verhaltens die Integrationsordnung vertauschbar und es ergibt sich die Form:

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{\varkappa^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \, d\tau \int_0^\infty \frac{\mu^2 p(\mu)}{1 + \varkappa^2 \mu^2 p(\mu)} \cos \mu t \cos \mu \tau \, d\mu.$$

Da $F(\tau)$ als eine gerade Funktion angenommen ist, kann ein entsprechendes Glied mit $\sin \mu t \sin \mu \tau$ zugefügt werden, das wegen der Integration nach τ keinen Beitrag liefert, und man erhält so:

$$(35) \qquad \varphi(t) = F(t) - \varkappa^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \Gamma(t - \tau) \, dt,$$

worin nun

$$(35') \qquad \Gamma(t - \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^2 p(\mu)}{1 + \varkappa^2 \mu^2 p(\mu)} \cos \mu (t - \tau) \, d\mu$$

der „lösende Kern“ der Integrodifferentialgleichung (27) ist (vgl. 1. Bd., XII, § 3, 4).

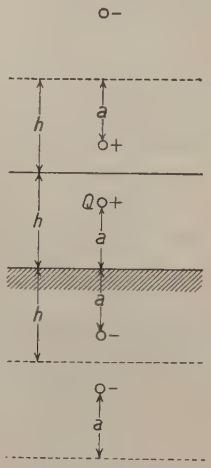
Für die weiteren Diskussionen der Lösung verweisen wir auf die S. 325 zitierte Arbeit. Sie erstrecken sich vor allem auf den Fall $\eta = 1$, der, wie wir in 3 sahen, den allmählichen Wiederaustritt des an einem Punkt konzentriert eintretenden Stromes darstellt und vorliegt, wenn unsere Leitung etwa als eine bandförmige Erdung eines Hochspannungsnetzes gedacht ist.

§ 3. Flüssigkeitsschicht mit metallischer Begrenzung. Nobilische Farbenringe.

1. Die Riemannsche Aufgabe. Die Gesetze der Stromverteilung in räumlichen Leitern sind geprüft worden mittels der Erscheinung der Nobilischen Farbenringe. Läßt man nämlich in Elektrolyten, die in

einer Schicht über einer Metallplatte lagern, den Strom durch eine Spitze ein- und durch die Platte austreten, so entsteht auf dieser ein Niederschlag, für dessen Dicke nach dem Faradayschen Gesetz die Stromdichte an der betreffenden Austrittsstelle maßgebend ist. Dieser Niederschlag zeigt bei auffallendem Licht Newtonsche Farbenringe, die als ein Hilfsmittel zur experimentellen Prüfung der Dicke der Schicht und damit der Verteilung der Stromdichte betrachtet werden können. Nach früheren Versuchen in dieser Richtung, die sich aber auf eine unrichtige Berechnung der Stromlinien stützten, hat Riemann[1]) die nachfolgende Berechnung, unter Zugrundelegung der Strömungsgesetze von § 1, gegeben, indem er die Strömung in einer leitenden Schicht sucht, die auf einer vollkommen leitenden Metallwand ausgebreitet ist.

Fig. 28.



Die Ebene $z = 0$ sei die metallische Grenzfläche (in Fig. 28 schraffiert), h die Höhe der darüber lagernden Flüssigkeitsschicht von der Leitfähigkeit λ, und die stromliefernde Elektrode sei als punktförmige Stromquelle in der Höhe $z = a (\leqq h)$ angenommen. J_0 sei der gesamte, von der Stromquelle gelieferte Strom und U die Potentialfunktion des elektrischen Feldes der Strömung. Die Aufgabe ist in dieser Form der von § 2, 3 nahe verwandt.

Es sind folgende Bedingungen zu erfüllen, worin wir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ setzen:

$$(1) \qquad U_1 = U - \frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} = U - U_0, \quad \text{wenn} \quad a < h$$

bzw.

$$(1') \qquad U_1 = U - \frac{J_0}{2\pi\lambda\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} = U - U_0, \quad \text{wenn} \quad a = h,$$

soll eine reguläre Potentialfunktion innerhalb der Schicht $0 < z < h$ einschließlich der Umgebung der Stelle $z = a$, $r = 0$ sein, also der Geichung $\Delta U = 0$ genügen.

Für die obere Begrenzung der Schicht verschwindet die Komponente der Strömung normal zur Oberfläche, d. h.

$$(2) \qquad \partial U/\partial z = 0 \quad \text{für} \quad z = h.$$

An der metallischen Grenzfläche verschwindet die Tangentialkomponente der Feldstärke und der Strömung, d. h.

$$(3) \qquad \partial U/\partial r = 0 \quad \text{für} \quad z = 0.$$

[1]) Ges. Werke, S. 55.

Endlich soll U mindestens wie $1/r$ verschwinden für $r = \infty$. Diese Funktion U läßt sich durch das Spiegelungsverfahren finden, das ähnlich bereits in dem zweidimensionalen Falle von VIII, § 5, **3**, b) angewendet wurde. Man geht aus von der Polfunktion U_0 und erfüllt zunächst die Bedingung (2), indem man, unter Beibehaltung des Vorzeichens, den Pol an der Ebene $z = h$ spiegelt, was im Falle $a = h$ bereits in der Form (1′) von U_0 zum Ausdruck kommt, und sodann die Bedingung (3), indem man den Pol unter Umkehrung des Vorzeichens an der Ebene $z = 0$ spiegelt. Jede der gespiegelten Funktionen erfüllt aber die Randbedingung nur an der betreffenden Spiegelungsebene, nicht an der anderen Grenzebene, und sie müssen daher, immer nach den gleichen Regeln, sukzessive weitergespiegelt werden, wie auch l. c. ausgeführt wurde. Man erhält so Pole in folgenden Punkten, wobei das übergesetzte Zeichen immer das Vorzeichen des Poles anzeigt:

$\overset{+}{a},\ 2h \overset{+}{-} a,\ -\overset{-}{a},\ -2h \overset{-}{+} a,\ 2h \overset{-}{+} a,\ 4h \overset{-}{-} a,\ 2\overset{+}{h} - a.\ -4\overset{+}{h} + a$ usw.

und durch Summation aller Pole die Potentialfunktion:

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{l} U = \dfrac{J_0}{4\pi\lambda} \sum_{-\infty}^{+\infty n} (-1)^n \left(\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nh - a)^2}} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nh + a)^2}} \right), \end{array} \right.$$

die formell alle verlangten Bedingungen befriedigt. Auch ihre Konvergenz ist gesichert, da die einzelnen Glieder der Summe bei wachsendem n mit $1/n$ abnehmen, aber je zwei aufeinanderfolgende verschiedene Vorzeichen haben.

Für Gebiete, in denen $r < h$, reicht zum Vergleich mit dem Experiment die Berücksichtigung von wenig Gliedern der Summe aus. Für größere Entfernung r aber empfiehlt sich eine andere Darstellung, die aus dem Umstand folgt, daß U in (4) eine periodische Funktion von z mit der Periode $4h$ ist. Da die Funktion U ferner ungerade in bezug auf die Achse $z = 0$ [d. h. $U(-z) = -U(z)$], aber gerade in bezug auf die Achse $z = h$ [d. h. $U(2h - z) = U(z)$] ist, so hat sie eine Fouriersche Entwicklung von der Form

$$(5) \qquad U = a_1 \sin\frac{\pi z}{2h} + a_3 \sin 3\frac{\pi z}{2h} + a_5 \sin 5\frac{\pi z}{2h} + \cdots,$$

und man erhält für die Koeffizienten a_{2l+1}

$$a_k = \frac{J_0}{4\pi\lambda h} \int_0^{2h} \sin k\frac{\pi\xi}{2h} \cdot \sum (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (\xi + 2nh - a)^2}} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\xi + 2nh + a)^2}} \right] d\xi.$$

Setzt man im Summenglied mit Index n

$$\xi + 2nh - a = \tau, \quad \text{bzw.} \quad \xi + 2nh + a = \tau,$$

so kommt das auf eine Verschiebung der Integrationsgrenzen des Gliedes um $2n \pm a$ hinaus, während der Integrand in allen Gliedern dann die gleiche Form annimmt; dabei ist noch zu beachten, daß das Vorzeichen der sinus-Funktion bei ungeradem n sich ändert, und es folgt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{J_0}{4\pi\lambda h}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin\frac{k\pi}{2h}(\tau+a) - \sin\frac{k\pi}{2h}(\tau-a)\right)\frac{d\tau}{\sqrt{r^2+\tau^2}}, \\ &= \frac{J_0}{2\pi\lambda h}\sin\frac{k\pi a}{2h}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{k\pi\tau}{2h}\frac{d\tau}{\sqrt{r^2+\tau^2}}, \\ &= \frac{J_0}{2\pi\lambda h}\sin\frac{k\pi a}{2h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{k\pi\tau}{2h}}\frac{d\tau}{\sqrt{r^2+\tau^2}}. \end{aligned}$$

Dieses Integral geht durch Einführung von τ/r als Integrationsvariable in das Hankelsche Integral 0-ter Ordnung [vgl. (19) in § 2, 3] über: $\pi i H_0^1\left(i\frac{k\pi r}{2h}\right)$. Also ist:

$$a_k = i\frac{J_0}{2\lambda h}\sin k\frac{\pi a}{2h}H_0^1\left(ik\frac{\pi r}{2h}\right), \tag{6}$$

und wenn r/h groß ist, kann man für H die asymptotischen Formeln (29) in § 2, 4 anwenden. Es folgt dann

$$U \simeq \frac{J_0}{\pi\lambda\sqrt{hr}}\sum_0^\infty{}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l+1}}\sin(2l+1)\frac{\pi a}{2h}\sin(2l+1)\frac{\pi z}{2h}e^{-(2l+1)\frac{\pi r}{2h}}, \tag{7}$$

eine Reihe, die wegen des Exponentialfaktors sehr rasch konvergiert. Die gesuchte Stromdichte längs der Metallfläche $z = 0$ ergibt sich hieraus zu:

$$\left\{\begin{aligned} i(0) &= -\lambda\frac{\partial U}{\partial z}^{(z=0)} \\ &= -\frac{J_0}{2h\sqrt{hr}}\sum_0^\infty{}^{l}\sqrt{2l+1}\sin(2l+1)\frac{\pi a}{2h}e^{-(2l+1)\frac{\pi r}{2h}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

2. Berücksichtigung der Polarisation. Auf die Erscheinung der Nobilischen Farbenringe hat ein weiterer Umstand Einfluß, der in der obigen Riemannschen Theorie noch nicht berücksichtigt ist, nämlich die Gegenpolarisation der auf der Metallfläche abgelagerten Schicht. H. Weber[1]) nahm die Gegenpolarisation als eine der ablagernden

[1]) Crelles Journal **75**, 1872.

Stromstärke proportionale Spannung an, so daß statt (3) eine Bedingung von der Form

$$U - \varkappa i_z = U + \varkappa\lambda \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{3'}$$

zu setzen wäre. Besser scheint den Beobachtungen die von Roiti[1]) gemachte Annahme zu entsprechen, daß die Gegenpolarisation nur bis zu einem gewissen Maximum anwachsen kann. Im stationären Zustand muß dann in denjenigen Teilen der Metallplatte, in denen dieses Maximum nicht erreicht ist, die hindurchtretende Stromdichte verschwinden, da eben anderenfalls die Polarisation weiter anwachsen würde. In den Gebieten dagegen, in denen das Maximum erreicht ist, herrscht konstante Spannung, die diesem Maximum gleich ist. Das erstere Gebiet wird das Äußere, das letztere das Innere eines Kreises $r = b$ sein, dessen Größe aber erst aus der Lösung der ganzen Aufgabe folgt, wenn die Maximalspannung vorgegeben ist. Vorerst soll b als bekannt angenommen werden, aber die Größe der Spannung kann dann nicht mehr vorgeschrieben werden. Wir machen ferner, um die Behandlung zu ermöglichen, die vereinfachende Voraussetzung, daß die Höhe der Flüssigkeitsschicht unendlich sei: $h = \infty$.

Die Aufgabe ist daher folgendermaßen zu formulieren: Wir suchen eine Funktion $U = U_0 + U_1$. Dabei ist

$$U_0 = \frac{J_0}{4\pi\lambda R_1} = \frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} \tag{9}$$

und U_1 soll eine im Gebiet $z > 0$ reguläre Potentialfunktion sein, d. h. $\Delta U_1 = 0$ einschließlich der Umgebung der Stelle $r = 0$, $z = a$.

Die Randbedingung ist dabei:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, \quad r > b, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, \quad r < b \quad (\text{d. h. } U_0 + U_1 = C). \tag{11}$$

Man muß ferner fordern, daß der ganze Strom J_0 in die Metallplatte übertritt und nicht Teile davon nach dem Unendlichen abströmen, da wir die unendlich hohe und ausgedehnte Schicht ja nur als einen einfacheren Fall der in Wirklichkeit endlichen Schicht betrachten. Das bedeutet, daß das über die Strom aufnehmende Kreisfläche genommene Stromintegral

$$-2\pi\int_0^b i_z r\,dr = 2\pi\lambda\int_0^b \frac{\partial U}{\partial z} r\,dr = J_0 \quad \text{für} \quad z = 0 \tag{12}$$

[1]) Nuovo Cimento, vol. X; vgl. auch V. Volterra, Atti R. Accad. Torino, vol. XVIII, 1882 bis 1883.

zu fordern ist. Man kann diese Bedingung auch so aussprechen, daß sich keine Stromquellen im Unendlichen befinden sollen, d. h.

$$\sqrt{r^2+z^2}\,U = 0 \quad \text{für} \quad \sqrt{r^2+z^2} = \infty. \tag{12'}$$

Die so formulierte Aufgabe ist von R. Gans[1]) durch Entwicklung nach Kugelfunktionen, von M. Hafen[2]) in geschlossener Form gelöst worden.

Um zunächst die Bedingung (10) zu berücksichtigen, denken wir uns U als gerade Funktion von z in den Raum negativer z fortgesetzt. Wir fügen also zunächst einen zweiten Pol hinzu im Punkt $r = 0$, $z = -a$:

$$\overline{U}_0 = \frac{J_0}{4\pi\lambda\sqrt{r^2+(z+a)^2}}$$

und suchen dann U statt der obigen Form in der Darstellung:

$$U = U_0 + \overline{U}_0 + U_1,$$

worin dann auch U_1 eine gerade Funktion von z ist. Ihre Ableitung $\partial U_1/\partial z$ verschwindet längs der Ebene $z = 0$ für $r > b$, ist aber endlich für $r < b$ und daher unstetig beim Durchgang durch die Ebene.

Diese erweiterte Aufgabe läßt eine elektrostatische Deutung zu. Der Bereich $z = 0$, $r \leqq b$ ist als eine ebene, kreisförmige Metallplatte zu deuten, der ganze umgebende Raum als homogenes Dielektrikum, und es handelt sich um die elektrostatische Induktion der beiden Pole auf die Metallplatte, unter der Nebenbedingung, daß die gesamte Ladung der Kreisplatte entgegengesetzt gleich der Ladungssumme der beiden Pole sein soll, also $J_0/2\pi\lambda$. Dies ist eine inhomogene Aufgabe im Sinne von VIII, § 2.

3. Homogene Hilfsaufgabe. Um diese inhomogene Aufgabe zu lösen, gehen wir aus von der homogenen Aufgabe der elektrostatischen Ladungsverteilung auf einer Kreisplatte, deren Radius $\beta < b$ sei, und der Bestimmung des zugehörigen elektrostatischen Feldes. Die Potentialfunktion, die dieser homogenen Lösung entspricht, sei mit $\psi(\beta, r, z)$ oder auch kurz mit $\psi(\beta)$ bezeichnet. Wir finden sie durch Einführung eines geeigneten Systems orthogonaler Koordinaten, und zwar elliptischer.

Die krummlinigen Koordinaten mögen σ, μ, τ heißen und werden durch die Substitution eingeführt:

$$\begin{cases} z = \beta\sigma\mu, & r = \beta\sqrt{1+\sigma^2}\,\sqrt{1-\mu^2}, \\ & x = r\cos\tau, \quad y = r\sin\tau. \end{cases} \tag{13}$$

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. **49**, 1903.
[2]) Math. Ann. **69**, 1910 (§ 2 der Arbeit).

Dann sind die Flächen

$$\sigma = \text{konst}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{r^2}{\beta^2(1+\sigma^2)} + \frac{z^2}{\beta^2\sigma^2} = 1 \tag{14}$$

die Rotationsflächen konfokaler Ellipsen mit dem Brennpunktsabstand β von der Achse $r = 0$. Für den Parameterwert $\sigma = 0$ artet die Rotationsfläche in die beiderseitige Oberfläche der Kreisplatte vom Radius $r = \beta$ aus.

Dagegen sind die Flächen

$$\mu = \text{konst}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{r^2}{\beta^2(1-\mu^2)} - \frac{z^2}{\beta^2\mu^2} = 1 \tag{15}$$

die Rotationsflächen der zugehörigen konfokalen Hyperbeln. Für $\mu = 0$ artet hier die Fläche in die beiderseitige Oberfläche des Bereiches $r > \beta$ der Ebene $z = 0$ aus, für $\mu = 1$ in die Achse $r = 0$. Durch den Koordinatenbereich $0 \leqq \mu \leqq 1$, $0 \leqq \sigma \leqq \infty$ ist somit der Halbraum positiver z, durch Vorzeichenwechsel auch negativer z ausgefüllt.

In den neuen Koordinaten lautet das Längenelement:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\tau^2 + dz^2$$

$$= \beta^2\left[(\sigma^2+\mu^2)\left(\frac{d\sigma^2}{1+\sigma^2} + \frac{d\mu^2}{1-\mu^2}\right) + (1+\sigma^2)(1-\mu^2)\,d\tau^2\right],$$

und folglich wird der Differentialoperator ΔU nach Bd. 1, II, § 3, (42) berechnet zu

$$\left\{\begin{aligned} \beta^2 \Delta U \equiv{}& \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((1+\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial\sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial U}{\partial\mu}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{(1-\mu^2)(1+\sigma^2)}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Wir suchen nun rotationssymmetrische, also von τ unabhängige Lösungen der Gleichung $\Delta U = 0$. Sie lassen sich, z. B. nach dem im 1. Bd., VIII, § 2, 6 (S. 320) verwendeten Verfahren, als eine Summe von Produkten der Form

$$U = \sum\nolimits_k P_k(\mu)\,Q_k(\sigma)$$

ansetzen, wobei sich für P und Q aus (16) die zusammengehörigen Gleichungen ergeben:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_k}{d\mu}\right] + kP_k = 0, \tag{17}$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left[(1+\sigma^2)\frac{dQ_k}{d\sigma}\right] - kQ_k = 0. \tag{17'}$$

Die nach (17) definierten Funktionen P sind Kugelfunktionen von μ (1. Bd., VIII, § 2), die nach (17') definierten Funktionen Q dagegen sind Kugelfunktionen der Variablen $i\sigma$, und zwar sollen sie regulär sein

für σ zwischen 0 und ∞, d. h. längs der ganzen Achse imaginärer $i\sigma$. In diesem Bereich kommen nur Kugelfunktionen zweiter Art in Betracht (1. Bd., VIII, § 2, 7), da die Kugelfunktionen erster Art mit wachsendem Argument zu ∞ gehen, während die Funktionen zweiter Art zu 0 abnehmen, wie man aus (17′) erkennt, indem man die Lösungen für große σ in Potenzreihen entwickelt.

Die gesuchte Lösung unserer homogenen Aufgabe, $\psi(\beta, r, z)$, soll längs der Oberfläche der Kreisplatte ($\sigma = 0$) konstant, also von μ unabhängig sein. Dann muß $k = 0$ angenommen werden und man erhält aus (17′) bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor:

$$\psi(\beta) = Q_0 = \operatorname{arc\,ctg}\,\sigma = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}. \tag{18}$$

Ihr konstanter Wert längs der Plattenoberfläche ($\sigma = 0$) ist $\pi/2$. Durch Auflösung der Gl. (14) kann man hier auch wieder r, z einführen und erhält durch leichte Umformung

$$\left.\begin{aligned}\psi(\beta, r, z) &= \arcsin\frac{\beta}{\sqrt{\tfrac{1}{2}(\beta^2+z^2+r^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta^2+r^2+z^2)^2-4r^2\beta^2}}}\\ &= \arcsin\frac{2\beta}{\sqrt{z^2+(r+\beta)^2}+\sqrt{z^2+(r-\beta)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{18′}$$

Aus der letzteren Gestalt ersieht man, daß für große r und z die Funktion ψ sich der Form $\beta/\sqrt{r^2+z^2}$ annähert; sie stellt daher das Potential der Kreisplatte vom Radius β dar, wenn diese die Gesamtladung vom Betrage β enthält. Aus dem konstanten Wert des Potentials $\psi(\beta) = \pi/2$ für $\sigma = 0$ und der Ladung β ergibt sich die Kapazität der Kreisscheibe zu $C = 2\beta/\pi$.

Da die Äquipotentialflächen $\sigma =$ konst nach (14) verkürzte Rotationsellipsoide sind, so ist damit auch für diese die elektrostatische Aufgabe gelöst; vgl. auch VIII, § 2, 2. Für ein verlängertes Rotationsellipsoid führt man analog elliptische Koordinaten ein durch Vertauschung von r und z in den Substitutionsgleichungen (13) und findet dann die Lösungen auf dem gleichen Wege; siehe auch l. c.

4. Allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe. Im Anschluß an M. Hafen (l. c.) benutzen wir, um jetzt die in 2 formulierte inhomogene Aufgabe zu lösen, die Darstellung der gesuchten Funktion U_1 durch eine „einfache Belegung“ der in der Ebene $z = 0$ liegenden Kreisplatte $r \leqq b$. Als Elemente der Belegung wählen wir dabei die der homogenen Aufgabe von 3 entsprechende Ladungsverteilung auf je einer Teilplatte vom Radius $\beta < b$, wobei die elementare Ladung der Teilplatte $q(\beta)\,d\beta$ sei. Die Belegungsfunktion $q(\beta)$ ist aus der Randbedingung (11) zu bestimmen. Um ferner die Bedingung (12) für die Gesamtladung

erfüllen zu können, werden wir am Ende noch eine homogene Lösung $c\,\psi(b, r, z)$ zufügen, die die Randbedingung (11) nicht beeinflußt, da sie längs $r < b$ konstant ist.

Die der elementaren Ladung $q(\beta)$ entsprechende Potentialfunktion ist nach der Berechnung am Ende der vorigen Nummer $\frac{q}{\beta}\psi(\beta, r, z)$, ihr konstanter Wert längs $r < \beta$ ist $\pi q/2\beta$ und sei mit $p'(\beta)$ bezeichnet. Die beabsichtigte Darstellung der Potentialfunktion U_1 lautet dann

$$U_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^b p'(\beta)\,\psi(\beta, r, z)\,d\beta + c\,\psi(b, r, z) \tag{19}$$

oder nach partieller Integration, wobei $'$ die Differentiation nach β bezeichnet:

$$U_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^b p(\beta)\,\psi'(\beta, r, z)\,d\beta + \left(\frac{2}{\pi}p(b) + c\right)\psi(b, r, z). \tag{19'}$$

In der Randbedingung (11) schreiben wir für $z = 0$:

$$U_0 + \bar{U}_0 = f(r) = \frac{J_0}{2\pi\lambda\sqrt{r^2 + a^2}}, \tag{20}$$

und sie nimmt sodann durch Einsetzen von (19') die Form an:

$$f(r) + C = \frac{2}{\pi}\int_0^b p(\beta)\,\psi'(\beta, r)\,d\beta \quad \text{für } r < b, \tag{21}$$

wobei das zweite Glied auf der rechten Seite von (19'), das für $r < b$ konstant ist, in die Konstante C hineingenommen ist. Nun ist längs der Ebene $z = 0$ nach (18'):

$$\begin{cases} \psi(\beta, r) = \arcsin \beta/r, & \text{daher } \psi'(\beta\, r) = 1/\sqrt{r^2 - \beta^2} \text{ für } r > \beta, \\ \psi(\beta, r) = \pi/2, & \text{daher } \psi'(\beta\, r) = 0 \text{ für } r < \beta, \end{cases} \tag{22}$$

also nach (21):

$$f(r) + C = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{p(\beta)}{\sqrt{r^2 - \beta^2}}\,d\beta \quad \text{für } r < b \tag{21'}$$

die schließliche Form der Randbedingung. Das ist eine Integralgleichung vom Volterraschen Typus (vgl. 1. Bd., XII, § 2, 2). Sie läßt sich explizite auflösen auf folgendem von Hafen (l. c.) auch für allgemeinere Fälle angegebenem Wege.

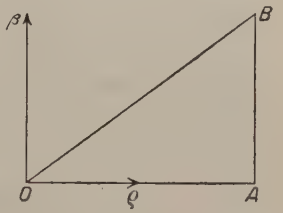
Wir schreiben als Integrationsvariable ϱ statt r, multiplizieren Gl. (21′) mit $\varrho\, d\varrho/\sqrt{r^2-\varrho^2}$ und integrieren nach ϱ von 0 bis r:

$$(23)\qquad \int_0^r \frac{\varrho\, f(\varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho + C r = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}} \int_0^\varrho \frac{p(\beta)\, d\beta}{\sqrt{\varrho^2-\beta^2}}.$$

Um in dem Doppelintegral rechts die Integrationsordnung zu vertauschen, beachten wir, daß es über die Dreiecksfläche OAB (Fig. 29) mit den Katheden $OA = AB = r$ in der β, ϱ-Ebene erstreckt ist. Dann wird

$$(23')\qquad \int_0^r \frac{\varrho\, f(\varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho + C r = \frac{2}{\pi}\int_0^r p(\beta)\, d\beta \int_\beta^r \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(r^2-\varrho^2)(\varrho^2-\beta^2)}}.$$

Fig. 29.



Hierin wird nun (entsprechend war der obige Multiplikator gewählt) das innere Integral auf der rechten Seite eine von β und r unabhängige Konstante. Substituiert man nämlich $\xi = \varrho^2$, so hat man in der komplexen ξ-Ebene längs eines Verzweigungsschnittes von $\xi = \beta^2$ bis $\xi = r^2$ zu integrieren. Man ergänzt diesen Weg zu einem geschlossenen Umlauf (E) um diesen Verzweigungsschnitt und deformiert diesen schließlich zu einem großen Kreise (K), auf dem das Integral als Residuum berechenbar wird. Also:

$$\int_\beta^r \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(r^2-\varrho^2)(\varrho^2-\beta^2)}} = \frac{1}{2}\int_{\beta^2}^{r^2} \frac{d\xi}{\sqrt{(r^2-\xi)(\xi-\beta^2)}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_E \frac{d\xi}{\sqrt{(r^2-\xi)(\xi-\beta^2)}} = \frac{1}{4}\int_K \frac{d\xi}{i\xi} = \pi/2,$$

und mithin ergibt (23′)

$$\int_0^r \frac{\varrho\, f(\varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho + C r = \int_0^r p(\beta)\, d\beta,$$

d. h.

$$(24)\quad p(r) = \frac{d}{dr}\left(\int_0^r \frac{\varrho\, f(\varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho\right) + C, \quad p'(r) = \frac{d^2}{dr^2}\left(\int_0^r \frac{\varrho\, f(\varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho\right).$$

Damit ist die in die ursprüngliche Darstellung (19) von U_1 eingehende Funktion $p'(\beta)$ gefunden und die inhomogene Aufgabe prinzipiell, abgesehen von der noch folgenden Festlegung der Konstanten c, gelöst.

5. Lösung für den Strömungsfall. In dem speziellen Falle, der den Nobilischen Farbenringen bzw. unserer elektrostatischen Aufgabe entsprach, war $f(r)$ nach (20) gegeben. Dann wird in (24)

$$\int_0^r \frac{\varrho\, f(\varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho = \frac{J_0}{2\pi\lambda} \int_0^r \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(r^2-\varrho^2)(\varrho^2+a^2)}}$$

$$= \frac{J_0}{4\pi\lambda}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2}\right) = \frac{J_0}{2\pi\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{a}$$

durch elementare Integration. Also wird nach (24):

$$p(r) = \frac{J_0}{2\pi\lambda}\frac{a}{r^2+a^2} + C.$$

Der Ansatz (19′) ergibt damit für die gesuchte Potentialfunktion:

$$U_1 = -\frac{J_0}{\pi^2\lambda}\int_0^b \frac{a}{\beta^2+a^2}\,\psi'(\beta,r,z)\,d\beta + c'\,\psi(b,r,z), \tag{25}$$

indem man unter der Konstanten c' die Glieder mit $\psi(b)$ zusammenfaßt.

Man kann hier als Integrationsvariable zweckmäßig wieder die in 3 benutzte Variable σ einführen, in der nach (18)

$$\psi'(\beta)\,d\beta = d\psi = -\frac{d\sigma_\beta}{1+\sigma_\beta^2}.$$

Das ist so aufzufassen, daß für einen festen Punkt r, z der Koordinatenwert σ verschieden ist, je nach dem Brennpunktsabstand β, der dem Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, worauf der Index β hinweist. Es ist nämlich nach (14):

$$\beta^2 = \frac{z^2}{\sigma_\beta^2} + \frac{r^2}{1+\sigma_\beta^2}.$$

Dem Wert $\beta = 0$ entspricht also für alle r und z der Wert $\sigma_\beta = \infty$, und man erhält folglich durch diese Substitution aus (25):

$$U_1^* = U_1 - c'\,\psi(b,r,z) = \frac{J_0 a}{\pi^2\lambda}\int_\infty^{\sigma_b} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)\left(\frac{z^2}{\sigma^2}+\frac{r^2}{1+\sigma^2}+a^2\right)}.$$

Das Integral hat folgende Partialbruchzerlegung:

$$U_1^* = \frac{J_0 a}{\pi^2\lambda}\frac{z^2}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}\int_\infty^{\sigma_b}\left(\frac{1}{z^2+\alpha_1^2\sigma^2} - \frac{1}{z^2+\alpha_2^2\sigma^2}\right)d\sigma$$

mit der Bezeichnung

$$4\alpha_1^2 = \left(\sqrt{r^2+(z+a)^2} + \sqrt{r^2+(z-a)^2}\right)^2 = (R_2+R_1)^2,$$
$$4\alpha_2^2 = \left(\sqrt{r^2+(z+a)^2} - \sqrt{r^2+(z-a)^2}\right)^2 = (R_2-R_1)^2.$$

Damit gibt die Integration:

$$U_1^* = \frac{J}{\pi^2 \lambda} \frac{2 a z}{R_1 R_2} \left[\frac{1}{R_1 - R_2} \operatorname{arc\,ctg} \frac{(R_1 - R_2)\,\sigma_b}{2 z} - \frac{1}{R_1 + R_2} \operatorname{arc\,ctg} \frac{(R_1 + R_2)\,\sigma_b}{2 z} \right]$$

und mittels der Beziehung $R_2^2 - R_1^2 = 4 a z$ hieraus noch kürzer:

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_1^* = \frac{J_0}{2 \pi^2 \lambda} \Bigg[& \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{arc\,ctg} \frac{2 a \sigma (b, r, z)}{R_1 + R_2} \\ & - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{arc\,ctg} \frac{2 a \sigma (b, r, z)}{R_1 - R_2} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Endlich haben wir noch die Konstante c' zu bestimmen mittels der Bedingung (12′), nach der für große r und z die Potentialfunktion U_1 gegen $J_0/2 \pi \lambda R$ mit $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ gehen muß. Die Funktion $\psi (b, r, z)$ nähert sich nach (18′) für große R dem Verlauf b/R an. Um den Verlauf von U_1^* für große R zu finden, können wir die Form (26) benutzen; kürzer aber gehen wir direkt von (25) aus. Da nämlich $\psi (\beta, r, z) \longrightarrow \beta/R$ geht, so geht $\psi' (\beta, r, z) \longrightarrow 1/R$, und dann folgt durch Integration in (25):

$$(27) \qquad U_1^* \longrightarrow \frac{J_0 \operatorname{arc\,ctg} a/b}{\pi^2 \lambda . R}.$$

Zur Festlegung von c' haben wir jetzt also:

$$(28) \qquad \frac{J_0}{\pi^2 \lambda} \operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{b} + c' b = \frac{J_0}{2 \pi \lambda}, \quad \text{d. h.} \quad c' = \frac{J_0}{2 \pi \lambda b} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \right),$$

und damit ist die Funktion U_1 vollständig bestimmt[1]).

Es ist ferner auf Grund der abgeleiteten Formeln ohne Schwierigkeit der konstante Wert des Potentials U längs der Kreisscheibe $r < b$ zu berechnen und dann umgekehrt, wie es dem Polarisationsgesetz entspricht, aus diesem vorgegebenen Wert rückwärts der Radius b zu bestimmen. Allerdings erfordert die letztere Aufgabe graphische oder sonstige Näherungslösung.

---

[1]) Mit der Funktion U ist eine den Randbedingungen entsprechende Greensche Funktion der Kreisscheibe gefunden, wenn deren Pol auf der Rotationsachse $r = 0$ liegt. Für eine allgemeinere Lage dürfte die Greensche Funktion daraus durch eine geringe Verallgemeinerung entstehen. Vgl. auch H. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2. Teil, S. 132.

Zehntes Kapitel.

Magnetostatik.

§ 1. Erzeugung magnetischer Felder.

1. Die magnetischen Grundgesetze und die daraus resultierenden Aufgaben stimmen in vieler Hinsicht mit den elektrischen überein und können aus ihnen übertragen werden, wenn man die den elektrischen parallelen magnetischen Begriffe einführt. An Stelle der elektrischen Feldstärke und ihres Potentials tritt die magnetische Feldstärke und ihr Potential, an Stelle der elektrischen Verschiebung die magnetische Induktion. Der Gesamtwert der magnetischen Induktion, der eine gegebene Fläche f normal durchsetzt, wird der magnetische Fluß durch diese Fläche (Φ) genannt. Wenn also $\mathfrak{B}$ der Vektor der Induktion, $\mathfrak{B}_n$ ihre Normalkomponente zu der Fläche ist, so wird:

$$\Phi = \int_f \mathfrak{B}_n \, df. \tag{1}$$

Die Induktion ist in homogenen Körpern mit der Feldstärke gleichgerichtet, und ihr Verhältnis zur Feldstärke, die magnetische Permeabilität μ, ist in den meisten Körpern, wie in Luft, eine wenig von 1 verschiedene Konstante, die aber, im Gegensatz zur Dielektrizitätskonstanten, auch < 1 sein kann. Letztere Körper heißen nach Faraday „diamagnetische“, solche dagegen mit $\mu > 1$ „paramagnetische“.

Im Gegensatz zum elektrischen Verhalten vieler Stoffe sind aber keine magnetischen Leiter bekannt, d. h. Körper, in denen sich ein statisches magnetisches Feld nicht halten könnte. Vielmehr sind auch die Metalle als para- oder diamagnetisch zu betrachten. Eine Ausnahmestellung nehmen aber das Eisen und verwandte Materialien, die „ferromagnetischen“ Körper, in doppelter Hinsicht ein.

a) Die Permeabilität des Eisens im Normalzustand ist außerordentlich groß (Größenordnung 10^3), so daß hier die Feldstärke bei mittleren Werten der Induktion sehr klein wird. Insofern bilden diese Körper ein Analogon zu den elektrischen Leitern. Die Permeabilität ist aber hier nicht konstant, sondern nimmt mit wachsender Induktion ab, um sich schließlich einem konstanten kleinen Betrag, annähernd 1, zu nähern (Sättigung).

b) Magnetische Hysterese. Bei zeitlich wechselndem Magnetfeld folgt die Induktion der Feldstärke nicht unmittelbar, sondern mit einer zeitlichen Verschiebung, die allerdings wenig merklich ist bei

weichem Eisen. Bei hartem Eisen (Stahl) aber tritt sie so stark in Erscheinung, daß man von „permanentem“ Magnetismus sprechen kann. Einmal magnetisierter Stahl behält seine Induktion auch nach Aufhören des Magnetfeldes bei und er wirkt daher seinerseits als ein dauernder Felderreger. Der „permanente Magnet“ kann aufgefaßt werden als ein Eisenkörper, in dem ein eingeprägtes Induktionsfeld dauernd aufrechterhalten wird, solange nicht genügend starke Felder auf denselben wirken, um eine Ummagnetisierung zu ermöglichen.

Das permanente Feld im Innern des Magnets hat also die Eigenschaft eines induzierten Feldes: Es ist überall quellenfrei verteilt, und der im ganzen durch die Oberfläche tretende magnetische Fluß ist 0. Wird der permanente Magnet mechanisch in mehrere Teile zerspalten, so bleibt wegen der Quellenfreiheit des Feldes diese letztere Eigenschaft für jeden einzelnen Teil erhalten.

2. Permanenter Magnet und magnetisches Moment. Bei dieser Auffassung ist das magnetische Feld des Außen- und Innenraums zusammen zwar quellenfrei, aber nicht wirbelfrei, da seine Tangentialkomponente an der Oberfläche unstetig werden kann. Es ist auch nicht nötig, sich die Induktion im Innern des permanenten Magnets als wirbelfrei vorzustellen, vielmehr kann sie als das Feld Ampèrescher Molekularströme (vgl. **3**) gedacht werden. Eine andere Auffassung des Feldes siehe bei R. Gans, Enzykl. d. math. Wiss. **5**, 15, Nr. 24.

Der permanente Magnet erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld. Sei $\mathfrak{B}^{(i)}$ das eingeprägte Induktionsfeld, $\mathfrak{B}_n^{(i)}$ seine Normalkomponente an der Oberfläche, entsprechend $\mathfrak{B}^{(a)}$, $\mathfrak{B}_n^{(a)}$ das erzeugte Induktionsfeld im Außenraum, so ist das letztere quellen- und wirbelfrei und dadurch definiert, daß das Gesamtfeld $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(i)} + \mathfrak{B}^{(a)}$ quellenfrei verteilt ist. In diesem Sinne gibt es daher keinen wahren Magnetismus. Für das äußere Feld allein folgt aus der Quellenfreiheit längs der Oberfläche die Bedingung:

$$\mathfrak{B}_n^{(a)} = -\mathfrak{B}_n^{(i)}. \tag{2}$$

Es ist somit durch die „zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie“ (Vorgabe von $\mathfrak{B}_n^{(a)}$) bestimmt und kann nach Bd. 1, XIV, § 3, **2** durch eine einfache Belegung der Oberfläche eindeutig dargestellt werden, deren Ladungssumme

$$M = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{B}_n^{(a)}\, df = -\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{B}_n^{(i)}\, df \tag{3}$$

in diesem Falle verschwindet. Man ersetzt auf diese Weise das quellenfreie Gesamtfeld $\mathfrak{B}^{(a)} + \mathfrak{B}^{(i)}$ durch ein im Außengebiet übereinstimmendes, aber auch im Innern wirbelfreies Feld. Natürlich kann nun dieses Feld nicht mehr quellenfrei sein, sondern erhält eine eindeutig bestimmte

Quellenverteilung längs der Oberfläche. Auf dieser letzteren Fiktion beruht der Begriff des „magnetischen Momentes“ des permanenten Magnets.

Es sei $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ die Belegung in einem Punkte P auf der Oberfläche des Magnets, so erhalten wir das Potential im Aufpunkt x, y, z dargestellt in der Form

$$(4) \qquad U(x,y,z) = \int_f \frac{\sigma(\xi,\eta,\zeta)}{R}\, df, \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Ferner seien

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

die Abstände des Aufpunktes bzw. Integrationspunktes von dem willkürlich angenommenen Koordinatenanfangspunkt, und $\bar{r}, \bar{\varrho}$ deren Vektoren. Da nach (3)

$$\int_f \sigma(\xi,\eta,\zeta)\, df = 0,$$

so ergibt sich aus (4) für Werte von r, die größer sind als der Maximalwert von ϱ, nach Bd. 1, VIII, § 2, **1**, eine Entwicklung der Form:

$$(5) \qquad U = \frac{1}{r^3}\int_f (x\xi + y\eta + z\zeta)\,\sigma(\xi,\eta,\zeta)\, df + \frac{1}{r^4}(\cdots),$$

oder durch Einführung des Vektors

$$(6) \qquad \mathfrak{M} = \int_f \bar{\varrho}\,\sigma(\xi,\eta,\zeta)\, df$$

mit den Komponenten

$$(6') \qquad \mathfrak{M}_\xi = \int_f \xi\,\sigma(\xi\eta\zeta)\, df, \quad \mathfrak{M}_\eta = \int_f \eta\,\sigma(\xi\eta\zeta)\, df, \quad \mathfrak{M}_\zeta = \int_f \zeta\,\sigma(\xi,\eta,\zeta)\, df$$

die Form:

$$(5') \qquad U = -\,\mathfrak{M}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \equiv -\,|\mathfrak{M}|\,\frac{\cos(r\,\mathfrak{M})}{r^2} + \cdots$$

Dieser Vektor $\mathfrak{M}$ wird als das „magnetische Moment“ des permanenten Magnets bezeichnet.

Das magnetische Moment ist nun insbesondere in einem Grenzfall von unmittelbarer Bedeutung. Der permanente Magnet soll in eine dünne Schicht konstanter Dicke ausarten, die senkrecht zur Schichtfläche magnetisiert ist, wobei die Magnetisierungsstärke $\mathfrak{B}^{(i)}$ noch Funktion des Ortes auf der Schichtfläche sein kann. Die Randbedingung (2) ergibt dann für das äußere Feld zu beiden Seiten der Fläche den nämlichen Wert von $\mathfrak{B}_n^{(a)}$, wenn diese Normale für beide Seiten der Fläche in gleicher Richtung festgelegt ist. Die einfache Belegung σ der beiderseitigen Oberfläche geht folglich nach Bd. 1, XIV, § 1, 5 in eine Doppel-

belegung der einfachen Schichtfläche über. Sei f^* diese Fläche, so nimmt (4) die Form an:

$$(7) \qquad U(x\,y\,z) = \int_{f^*} m(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial (1/R)}{\partial \nu} df = \int_{f^*} m(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos(R\,\nu)}{R^2} df.$$

Durch Vergleich mit (5') zeigt sich der in die Normalenrichtung ν fallende Vektor vom Betrag m als das magnetische Moment pro Flächeneinheit dieser „magnetischen Doppelfläche".

Rückt der Aufpunkt $\bar{r}$ an den Punkt $\bar{\varrho}$ der Fläche von der positiven oder negativen Seite her heran, so ergeben sich zwei verschiedene Potentialwerte U_+ und U_-, und zwar ist (vgl. l. c.):

$$(8) \qquad U_+ - U_- = 4\pi m(\xi, \eta, \zeta).$$

3. Stationäres elektromagnetisches Feld. Außer durch permanente Magnete kann ein magnetisches Feld auch durch stationäre, also geschlossene elektrische Ströme erzeugt werden. Das „statische elektromagnetische Feld" besitzt gleichfalls nirgends wahren Magnetismus, es ist also überall

$$(8) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div}(\mu \mathfrak{H}) = 0.$$

Ferner sagt das Ampèresche Gesetz, daß das längs eines beliebigen geschlossenen Weges geführte Arbeitsintegral

$$(9) \qquad W = \int \mathfrak{H}\, ds = \begin{cases} = 0 \\ \text{bzw.} \\ = 4\pi J, \end{cases}$$

je nachdem der Weg keinen Stromleiter oder einen den Strom J führenden Stromleiter umschließt. Es folgt aus der ersteren Beziehung nach dem Stokesschen Satz (1. Bd., II, § 3, 3):

$$(10) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{H} = -\operatorname{grad} U.$$

Die Potentialfunktion U läßt sich aber wegen der zweiten Beziehung nur eindeutig definieren, wenn man den unendlichen Raum durch eine in den Stromleiter eingespannte Fläche, eine „Membran", begrenzt. Zu beiden Seiten der Membran nimmt sie verschiedene Werte an, nämlich nach (9):

$$(11) \qquad U_+ - U_- = 4\pi J.$$

Vergleicht man dieses Feld mit dem am Ende von 2 beschriebenen, so ergibt sich: Das magnetische Feld eines geschlossenen Stromes ist gleichwertig mit dem Felde einer längs der „Membran" ausgebreiteten magnetischen Doppelfläche, deren magnetisches Moment m pro Flächeneinheit konstant ist, und zwar von der Größe $m = J$. In dieser Form ist übrigens das Ampèresche Gesetz zuerst ausgesprochen worden. Ein kleiner Kreisstrom vom Radius r, der Stromstärke J, ist also äquivalent mit einem magnetischen Moment $|\mathfrak{M}| = r^2 \pi J$. In dieser Weise kann

man sich den permanenten Magneten aus einem eingeprägten System Ampèrescher „Molekularströme“ aufgebaut denken, im neueren Sinne umlaufender Elektronensysteme von verschwindender elektrischer Gesamtladung im Molekül.

§ 2. Paramagnetische Körper im Magnetfeld.

1. Die allgemeine Randwertaufgabe. In ein gegebenes Feld, sei es von permanenten Magneten oder von Strömen erzeugt, werde ein Körper mit der (konstanten) Permeabilität μ_i gebracht. Wie wird das Feld durch ihn modifiziert? Diese Frage ist insbesondere von Wichtigkeit für die Körper von großem μ, also z. B. die Eisenkerne von Spulen.

Die gegebene magnetische Feldstärke sei $\mathfrak{H}_0$, die gesuchte

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1, \tag{1}$$

und als Innengebiet sei der von dem Körper eingenommene Raum bezeichnet. Im Innen- und Außengebiet genügt dann $\mathfrak{H}_1$ den Differentialgleichungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}_1 = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}_1 = 0. \tag{2'}$$

Längs der Grenzfläche beider Gebiete ist die Tangentialkomponente $\mathfrak{H}_s$, also auch $\mathfrak{H}_{1s}$, stetig, in Erweiterung von (2'). Dagegen ist, wegen der Bedingung des Verschwindens von wahrem Magnetismus, die Normalkomponente der Induktion stetig, also

$$\mu_i \mathfrak{H}_n^{(i)} = \mu_a \mathfrak{H}_n^{(a)}, \tag{3}$$

wenn μ_a die Permeabilität des Außenraumes ist und der obere Index den Innen- und Außenraum unterscheidet. Durch Einsetzen von (1) folgt daraus die inhomogene Bedingung für $\mathfrak{H}_1$:

$$\mu_i \mathfrak{H}_{1n}^{(i)} - \mu_a \mathfrak{H}_{1n}^{(a)} = (\mu_a - \mu_i) \mathfrak{H}_{0n}, \tag{4}$$

deren rechte Seite eine durch das Grundfeld vorgegebene Funktion $F(s)$ auf der Grenzfläche ist, die übrigens die Bedingung

$$\int F(s)\, ds = 0 \tag{4'}$$

erfüllt. Im Verhalten im Unendlichen schließlich muß gleichfalls zum Ausdruck kommen, daß das Feld im ganzen Raume (Innen- und Außengebiet sowie Grenzfläche) ladungsfrei ist. Daraus folgt, daß nicht nur $r^2 \mathfrak{H}_1$, sondern auch $r^3 \mathfrak{H}_1$ für unendliche r endlich bleibt.

Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar. Wir erfüllen sie nämlich, indem wir nach (2') $\mathfrak{H}_1$ durch zwei Potentialfunktionen $\varphi^{(i)}$ und $\varphi^{(a)}$ darstellen

$$\mathfrak{H}_1^{(i)} = -\operatorname{grad} \varphi_1^{(i)}, \quad \mathfrak{H}_1^{(a)} = -\operatorname{grad} \varphi_1^{(a)}.$$

Dabei ist wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{H}_{1s}$ längs der Grenzfläche auch φ stetig:

$$\varphi_1^{(i)} = \varphi_1^{(a)} \tag{5}$$

und nach (4)

$$\mu_a \frac{\partial \varphi_1^{(a)}}{\partial n} - \mu_i \frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial n} = F(s). \tag{5'}$$

Ferner ist im Innen- bzw. Außengebiet wegen (2)

$$\Delta \varphi_1^{(i)} = 0, \quad \Delta \varphi_1^{(a)} = 0, \tag{6}$$

und im Unendlichen $r^2 \varphi_1^{(a)}$ endlich.

Wir haben es hier unmittelbar mit der im 1. Bd., XIV, § 3, 2 behandelten allgemeinen Randwertaufgabe der Potentialtheorie zu tun, die man mittels des Ansatzes einer einfachen Belegung der Grenzfläche s (als Integrationsvariable σ geschrieben):

$$\varphi = \int \frac{m(\sigma)}{r_{x,\xi}} d\sigma, \quad r_{x,\xi} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{7}$$

in eine Integralgleichung umformt. x, y, z ist der Aufpunkt, ξ, η, ζ der Integrationspunkt. Man erhält längs der Grenzfläche:

$$-2\pi(\mu_a + \mu_i) m(s) + (\mu_a - \mu_i) \int K(s, \sigma) m(\sigma) d\sigma = F(s) \tag{8}$$

mit

$$K(s, \sigma) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x,\xi}}\right) = \frac{\cos(r_{x,\xi} n)}{r_{x\xi}^2} \tag{8'}$$

für Aufpunkte x, y, z, die auf der Fläche selbst liegen.

Mittels (4') folgt nun zunächst das Verschwinden der Gesamtbelegung. Denn es folgt aus (8) durch Integration unter Berücksichtigung von (4'):

$$-2\pi(\mu_a + \mu_i) \int m(s) ds + (\mu_a - \mu_i) \iint K(s, \sigma) m(\sigma) d\sigma ds = 0. \tag{9}$$

Nun ist nach (8'), wenn σ festgehalten wird, also einen auf der Fläche selbst liegenden Quellpunkt charakterisiert:

$$\int K(s, \sigma) ds = 2\pi^{1}). \tag{10}$$

Somit ergibt (9) nach Vertauschung der Integrationsordnung:

$$-2\pi\mu_i \int m(\sigma) d\sigma = 0,$$

wie oben behauptet.

Zufolge des bewiesenen Verschwindens der Gesamtbelegung ist die im Unendlichen für φ gestellte Bedingung erfüllt. Um die Lösbarkeit der vollständigen inhomogenen Aufgabe darzutun, haben wir nun,

---

[1]) Hat die Fläche Ecken, so ergibt sich statt dessen $\varkappa \cdot 2\pi$ (vgl. l. c. S. 493). Da aber solche Ecken nur diskret vorkommen können, so ändert das nichts an dem Resultat.

nach Bd. 1, XIV, § 3, **3**, nur noch festzustellen, daß die zugehörige homogene Randwertaufgabe keine Lösung hat. In der Tat, die homogene Aufgabe fordert statt (5′)

$$\mu_a \frac{\partial \varphi^{(a)}}{\partial n} - \mu_i \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n} = 0. \tag{11}$$

Wir haben nun zunächst für das Innengebiet v_i:

$$0 = \mu_i \int_{v_i} \varphi^{(i)} \Delta \varphi^{(i)} \, dv_i = -\mu_i \int_{v_i} (\operatorname{grad} \varphi^{(i)})^2 \, dv_i + \mu_i \int_s \varphi^{(i)} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n} \, ds. \tag{12}$$

Ebenso für das Außengebiet v_a:

$$0 = \mu_a \int_{v_a} \varphi^{(a)} \Delta \varphi^{(a)} \, dv_a = -\mu_a \int_{v_a} (\operatorname{grad} \varphi^{(a)})^2 \, dv_a - \mu_a \int_s \varphi^{(a)} \frac{\partial \varphi^{(a)}}{\partial n} \, ds. \tag{12′}$$

Hierin bezieht sich das letzte (Oberflächenintegral) auf die aus der Grenzfläche und einer unendlich großen Kugelfläche gebildete Begrenzung des Außenraumes. Diese letztere aber liefert wegen des bewiesenen Verhaltens von φ im Unendlichen keinen Beitrag.

Also folgt durch Addition und Berücksichtigung von (5) und (11):

$$\mu_i \int_{v_i} (\operatorname{grad} \varphi^{(i)})^2 \, dv_i + \mu_a \int_{v_a} (\operatorname{grad} \varphi^{(a)})^2 \, dv_a = 0. \tag{13}$$

Da μ_i und μ_a beide positiv sind, folgt somit, daß grad φ überall verschwinden müßte, d. h. es existiert keine homogene Lösung. Damit ist der geforderte Nachweis für die Lösbarkeit der inhomogenen Randwertaufgabe erbracht.

2. Kugel im Parallelfeld. a) Vollkugel. Im Luftraum ($\mu_a = 1$) sei das parallele Grundfeld

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{0x}$$

gegeben. Sein Potential ist

$$\varphi_0 = -\mathfrak{H}_0 \cdot x. \tag{14}$$

In das Feld soll eine Kugel vom Radius a und der Permeabilität μ gebracht werden, und ihr Mittelpunkt sei Anfangspunkt des Koordinatensystems; r, ϑ seien Polarkoordinaten in bezug auf diesen Punkt. Die Randbedingungen für die Funktionen $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_1^{(a)}$ nehmen dann folgende Form an: Für $r = a$ ist:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(a)} = \varphi_1^{(i)} \\ \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \dfrac{\partial \varphi_1^{(a)}}{\partial r} = \mu \left(\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \dfrac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial r} \right). \end{cases} \tag{15}$$

Es liegt nahe, den Ansatz der Lösung ähnlich wie bei den Aufgaben des Kap. VIII, § 2, **3** für das elektrostatische Feld zu suchen,

in die unsere Aufgabe übergeht, wenn $\mu = \infty$ ist, also durch Entwicklung nach Kugelfunktionen. Für unser paralleles Grundfeld gilt nach (14)

$$\varphi_0 = -\mathfrak{H}_0 r\cos\vartheta = -\mathfrak{H}_0 r P_1(\vartheta).$$

Die Funktionen φ_1 sollen in Reihen nach Kugelfunktionen entwickelt werden, also nach Bd. 1, XVII, § 2 gesetzt werden:

$$\varphi_1 = \sum_0^\infty (c_n r^n + c_{-n-1} r^{-n-1}) P_n(\vartheta), \tag{16}$$

worin die c_n Konstanten bedeuten, die im Innen- und Außengebiet verschiedene sind. Die Bedingungen (15) müssen nun unabhängig von ϑ, daher von jedem Summanden der Summe (16) für sich erfüllt werden. Das gleiche gilt von der im Unendlichen geltenden Regularitätsbedingung. Man sieht dann, daß für alle Indizes, mit Ausnahme des Index $n = 1$, die Bedingungen (15) homogene und daher, wie in der vorigen Nummer bewiesen, nicht lösbar sind, außer durch verschwindende c_n und c_{-n-1}. Es bleibt also nur $n = 1$, und zwar mit Rücksicht auf die erforderliche Regularität:

$$\varphi_1^{(i)} = c_1^{(i)} r P_1(\vartheta), \quad \varphi_1^{(a)} = + c_{-2}^{(a)} a^3 r^{-2} P_1(\vartheta). \tag{17}$$

Die Bedingungen (15) ergeben dann:

$$c_1^{(i)} = c_{-2}^{(a)}, \quad \mu c_1^{(i)} + 2 c_{-2}^{(a)} = (\mu - 1)\mathfrak{H}_0.$$

Also:

$$c_1^{(i)} = c_{-2}^{(a)} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}\mathfrak{H}_0,$$

und schließlich:

$$\begin{cases} \text{im Innengebiet: } \varphi = -\dfrac{3}{\mu+2}\mathfrak{H}_0 r\cos\vartheta = -\dfrac{3}{\mu+2}\mathfrak{H}_0 x, \\ \text{im Außengebiet: } \varphi = -\mathfrak{H}_0\left(r - \dfrac{\mu-1}{\mu+2}\dfrac{a^3}{r^2}\right)\cos\vartheta. \end{cases} \tag{18}$$

Die Lösung bedeutet für paramagnetische Körper ($\mu > 1$) eine Abschwächung des Feldes im Innern des Körpers, das für $\mu = \infty$ ganz verschwindet. Die Induktion $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ dagegen wird verstärkt bis zu dem Wert $3\mathfrak{H}_0$ bei $\mu = \infty$ gegen $\mathfrak{H}_0$ bei $\mu = 1$. Im Außengebiet (längs der Mittelebene $\cos\vartheta = 1$) ist das Feld und die Induktion abgeschwächt bei $\mu > 1$, die magnetischen Kraftlinien werden also in paramagnetische Körper hineingedrängt. Umgekehrt verstärkt sich das Feld im Innern diamagnetischer Körper bis zum Wert $^3/_2\mathfrak{H}_0$ für $\mu = 0$, während die Induktion abgeschwächt wird und für $\mu = 0$ verschwindet. Das äußere Feld und die Induktion werden dann verstärkt, die Kraftlinien also von dem diamagnetischen Körper abgedrängt.

b) Hohlkugel im magnetischen Parallelfeld. Der Fall einer paramagnetischen (oder diamagnetischen) Hohlkugel im Magnetfeld ist von Interesse wegen ihrer Schirmwirkung auf das Innere. Der äußere Kugelradius sei a, der innere b, μ die Permeabilität der Kugel, während im Außen- und Innenraum die Permeabilität 1 angenommen werden soll. Wir nehmen wieder an:

$$\varphi_0 = -\mathfrak{H}_0 x = -\mathfrak{H}_0 r\cos\vartheta$$

und setzen

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_0 + \varphi_1^{(a)} \quad \text{im Außenraum } (r > a)\\
\varphi &= \varphi_0 + \varphi_1^{(m)} \quad \text{in der Kugelschicht } (b < r < a)\\
\varphi &= \varphi_0 + \varphi_1^{(i)} \quad \text{im Innenraum } (r < b).
\end{aligned}$$

Die nämlichen Überlegungen wie unter a) führen zu dem Ansatz:

$$\varphi_1^{(a)} = c_{-2}^{(a)}\frac{a^3}{r^2}\cos\vartheta,$$

$$\varphi_1^{(m)} = \left(c_1^{(m)} r + c_{-2}^{(m)}\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\vartheta,$$

$$\varphi_1^{(i)} = c_1^{(i)} r\cos\vartheta$$

und den Randbedingungen an beiden Kugelflächen:

für $r = a$:

$$\varphi_1^{(a)} = \varphi_1^{(m)}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^{(a)}}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial\varphi_1^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right),$$

für $r = b$:

$$\varphi_1^{(m)} = \varphi_1^{(i)}$$

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi_1^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right) = \frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}.$$

Daraus folgen der Reihe nach die Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{cases}
(\alpha) & c_{-2}^{(a)} - c_1^{(m)} - c_{-2}^{(m)} = 0,\\
(\beta) & -2c_{-2}^{(a)} - \mu c_1^{(m)} + 2\mu c_{-2}^{(m)} = -(\mu-1)\mathfrak{H}_0,\\
(\gamma) & c_1^{(m)} + \frac{a^3}{b^3}c_{-2}^{(m)} - c_1^{(i)} = 0,\\
(\delta) & \mu c_1^{(m)} - 2\mu\frac{a^3}{b^3}c_{-2}^{(m)} - c_1^{(i)} = (\mu-1)\mathfrak{H}_0.
\end{cases}$$

Zur Auflösung setzen wir $a^3/b^3 = \lambda$ und bilden zunächst aus (α) und (β):

$$(\varepsilon)\qquad -(2+\mu)c_1^{(m)} + 2(\mu-1)c_{-2}^{(m)} = -(\mu-1)\mathfrak{H}_0;$$

aus (γ) und (δ):

$$(\zeta)\qquad (\mu-1)c_1^{(m)} - (2\mu+1)\lambda c_{-2}^{(m)} = (\mu-1)\mathfrak{H}_0;$$

hieraus noch:

$$(\eta) \qquad \begin{cases} -3\,c_1^{(m)} + [2\mu(1-\lambda) - (2+\lambda)]\,c_{-2}^{(m)} \\ \equiv -3\,(c_1^{(m)} + c_{-2}^{(m)}) + (2\mu - 1)(1-\lambda)\,c_{-2}^{(m)} = 0; \end{cases}$$

endlich aus (γ) und (δ):

$$(\vartheta) \qquad (\mu - 1)\,c_1^{(i)} = (\mu - 1)\,\mathfrak{H}_0 + 3\,\mu\lambda\,c_{-2}^{(m)}.$$

Aus (ε) und (ξ) bzw. (η) erhält man durch Auflösung:

$$c_{-2}^{(m)} = \frac{3(\mu-1)\,\mathfrak{H}_0}{\Delta},$$

$$c_1^{(m)} = \frac{2\mu(1-\lambda) - (2+\lambda)}{\Delta}(\mu - 1)\,\mathfrak{H}_0$$

mit $$\Delta = 2(1-\lambda)(\mu-1)^2 - 9\,\mu\lambda,$$

sodann nach (ϑ):

$$c_1^{(i)} - \mathfrak{H}_0 = \frac{9\,\mu\lambda}{\Delta}\mathfrak{H}_0 \quad \text{bzw.} \quad c_1^{(i)} = \frac{2(1-\lambda)(\mu-1)^2}{\Delta}\mathfrak{H}_0,$$

nach (η) und (α):

$$c_{-2}^{(a)} = \frac{(2\mu+1)(1-\lambda)}{3}\,c_{-2}^{(m)} = \frac{(2\mu+1)(\mu-1)(1-\lambda)}{\Delta}\,\mathfrak{H}_0.$$

Hiernach ist das Feld in den drei Teilgebieten bestimmt. Am meisten interessiert die Abschirmung des Feldes im Innern der Kugel. Hier wird $\varphi^{(i)} = (c_1^{(i)} - \mathfrak{H}_0)\,x$, also die Feldstärke nach leichter Umrechnung:

$$\mathfrak{H}^{(i)} = \frac{1}{1 + 2/9\cdot(1-(b/a)^3)\,(\sqrt{\mu} - 1/\sqrt{\mu})^2}\,\mathfrak{H}_0.$$

Es folgt somit, da $b < a$, das bemerkenswerte Resultat, daß immer $\mathfrak{H}^{(i)} < \mathfrak{H}_0$, also eine Abschirmung eintritt, sowohl für $\mu < 1$ als auch $\mu > 1$, und das Maß derselben bleibt unverändert, wenn statt der Permeabilität μ die Permeabilität $1/\mu$ verwendet wird. Das Feld bleibt aber im Innern ein homogenes Parallelfeld.

3. Ellipsoid im Parallelfeld. Die allgemeine Randwertaufgabe des § 2 ist nur in wenigen Fällen explizite gelöst. Es ist von Wichtigkeit für die Anwendungen, daß zu diesen Fällen der eines (para- oder diamagnetischen) Ellipsoids im ursprünglich parallelen Felde gehört, weil man daraus einen Überblick der Verhältnisse bei ähnlich gestalteten Körpern gewinnen kann. Das Ellipsoid hat nämlich mit der in § 2 behandelten Kugel die Eigenschaft gemein, daß das Zusatzfeld in seinem Innern ein paralleles wird, wenn das Grundfeld ein paralleles war. Um das einzusehen, geben wir zunächst eine allgemeine Darstellung des zu dem Grundfeld mit dem Potential φ_0 hinzukommenden Zusatzfeldes mit dem Potential φ_1 ($\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$).

Das Zusatzfeld φ_1 ist, außer durch die allgemeinen Potentialbedingungen, durch die Randbedingungen (5) und (11) von § 2 an der Grenzfläche bestimmt, die für φ_1 ergeben:

(20) $$\varphi_1^{(a)} = \varphi_1^{(i)},$$

(21) $$\mu_a\left(\frac{\partial \varphi_1^{(a)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial n}\right) = (\mu_i - \mu_a)\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n}.$$

Diese Bedingungen (20), (21) lassen sich nach Bd. 1, XIV, § 1, **6** so deuten, daß die Potentialfunktion φ_1 erzeugt ist durch die allerdings noch unbekannte einfache Belegung der Oberfläche σ des Körpers von der Dichte:

$$m = \frac{\mu_a - \mu_i}{4\pi\mu_a}\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial n}.$$

Es ist mithin, wenn man ν für die äußere Normale des Integrationspunktes schreibt:

(22) $$\varphi_1 = \frac{\mu_a - \mu_i}{4\pi\mu_a}\int_S \frac{\partial \varphi^{(i)}/\partial \nu}{r_{x,\xi}}\, d\sigma; \quad r_{x\xi} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Da $\Delta \varphi^{(i)} = 0$ sein soll, läßt sich dieses Integral nach dem Greenschen Satz [1. Bd., II, § 3, Gl. (33)] umformen in das Raumintegral:

(23) $$\varphi_1 = \frac{\mu_a - \mu_i}{4\pi\mu_a}\int_V \left(\operatorname{grad}\varphi^{(i)} \cdot \operatorname{grad}_\xi \frac{1}{r_{x,\xi}}\right) dV$$

(grad_ξ bedeutet die Ableitung nach den Koordinaten des Integrationspunktes ξ, η, ζ).

Wir fragen nun, unter welchen Bedingungen dieses Zusatzfeld φ_1, also auch das Gesamtfeld $\varphi^{(i)}$, im Innern des Körpers ein Parallelfeld bleibt. Dann muß also $\varphi^{(i)}$ eine lineare Funktion des Ortes, somit $\operatorname{grad}\varphi^{(i)}$ konstant sein. Daher wird aus (23):

(24) $$\varphi_1 = \frac{\mu_a - \mu_i}{4\pi\mu_a}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(i)} \cdot \int_V \operatorname{grad}_\xi \frac{1}{r_{x,\xi}}\, dV\right).$$

Um das letzte Integral noch zu vereinfachen, trennen wir aus dem Körpervolumen V ein Kugelvolumen K mit dem Mittelpunkt im Punkte $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ ab, das ganz im Innern von V liegen soll. Für dieses Teilvolumen ist, aus Symmetriegründen,

$$\int_K \operatorname{grad}_\xi 1/r_{x,\xi}\, dV = 0.$$

Für den Rest kann, da

$$\frac{\partial r_{x,\xi}}{\partial \xi} = -\frac{\partial r_{x,\xi}}{\partial x} \text{ usw.},$$

gesetzt werden:

$$-\operatorname{grad}_x\Big(\int_V \frac{1}{r_{x,\xi}}\,dV\Big),$$

also

$$\varphi_1 = -\frac{\mu_a-\mu_i}{4\pi\mu_a}\Big(\operatorname{grad}\varphi^{(i)}\cdot\operatorname{grad}_x\Big(\int\frac{1}{r_{x,\xi}}\,dV\Big)\Big). \tag{25}$$

Damit nun φ_1 gleichfalls eine lineare Funktion sei, wenn $\operatorname{grad}\varphi^{(i)}$ konstant ist, muß hiernach offenbar das Potential des Körpervolumens

$$P = \int\frac{dV}{r_{x,\xi}} \tag{26}$$

im Innern des Körpers eine quadratische Funktion der Variablen x, y, z sein. Diese Bedingung ist aber nach Bd. 1, XIV, § 2, **4** erfüllt, wenn der Körper ein Ellipsoid ist. Dort war nämlich für ein auf seine Hauptachsen bezogenes Ellipsoid, dessen Gleichung sei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

bewiesen:

$$P = E - Ax^2 - By^2 - Cz^2, \tag{27}$$

wobei die Konstanten E, A, B, C folgende Werte haben:

$$\left\{\begin{aligned} E &= \pi\int_0^\infty\frac{ds}{D(s)}, & A &= \pi\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)D(s)},\\ B &= \pi\int_0^\infty\frac{ds}{(b^2+s)D(s)}, & C &= \pi\int_0^\infty\frac{ds}{(c^2+s)D(s)}. \end{aligned}\right. \tag{27'}$$

$$D(s) = \sqrt{\Big(1+\frac{s}{a^2}\Big)\Big(1+\frac{s}{b^2}\Big)\Big(1+\frac{s}{c^2}\Big)}.$$

Das zugrunde gelegte Parallelfeld sei nun gegeben durch sein Potential:

$$\varphi_0 = -(\mathfrak{H}_{0x}x+\mathfrak{H}_{0y}y+\mathfrak{H}_{0z}z),$$

ferner sei gemäß der Forderung der Parallelität gesetzt:

$$\varphi_1 = -(\mathfrak{H}_{1x}x+\mathfrak{H}_{1y}y+\mathfrak{H}_{1z}z),$$

so ist

$$\operatorname{grad}\varphi^{(i)} = -\mathfrak{H} = -(\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_1),$$

also nach (25):

$$-(\mathfrak{H}_{1x}x+\mathfrak{H}_{1y}y+\mathfrak{H}_{1z}z)$$
$$= \frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}\left[(\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_1)_x Ax+(\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_1)_y By+(\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_1)_z Bz\right].$$

Somit:

$$\mathfrak{H}_{1x} = -\frac{\frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} A \mathfrak{H}_{0x}}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} A} \text{ usw.,}$$

bzw. das Gesamtfeld:

$$(28)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{0x} \dfrac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} A}, \quad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_{0y} \dfrac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} B}, \\ \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{0z} \dfrac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} C}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte für $-\operatorname{grad}\varphi^{(i)}$ in die Darstellung (3) des Zusatzpotentials ein, so erhält man folgende Form des Oberflächenintegrals:

$$(29)\quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \int_s \left(\frac{\mathfrak{H}_{0x}\cos(\nu\xi)}{\frac{2\pi\mu_a}{\mu_i - \mu_a} + A} + \frac{\mathfrak{H}_{0y}\cos(\nu\eta)}{\frac{2\pi\mu_a}{\mu_i - \mu_a} + B} + \frac{\mathfrak{H}_{0z}\cos(\nu\zeta)}{\frac{2\pi\mu_a}{\mu_i - \mu_a} + C} \right) \frac{d\sigma}{r_{x.}}$$

Im vorangehenden war die Form (27) des Potentials P und die daraus resultierende Form (29) der gesuchten Lösung φ_1 als notwendige Bedingung für die geforderte Parallelität des Feldes $\mathfrak{H}^{(i)}$ erkannt. Wir haben zu zeigen, daß sie auch ausreichend sind, um in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe zu befriedigen.

Daß die Potentialgleichung für φ_1 erfüllt ist, sowie die Stetigkeitsbedingung (20), geht aus der Darstellung als einfache Belegung hervor; ebenso die Bedingung für das Verhalten im Unendlichen, da das Integral der Belegung verschwindet wegen

$$\int \cos(\nu\xi)\, d\sigma = 0 \text{ usw.}$$

Es bleibt also nur die Randbedingung (21) zu bestätigen. Wir setzen zu dem Zweck vorübergehend die vorgegebenen Funktionen:

$$(30)\quad \frac{\mathfrak{H}_{0x}}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} A} = H_x, \quad \frac{\mathfrak{H}_{0y}}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} B} = H_y, \quad \frac{\mathfrak{H}_{0z}}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} C} = H_z.$$

Dann folgt aus (29) nach den Unstetigkeitsbedingungen der einfachen Belegung (1. Bd., XIV, § 1, 6):

$$(31)\quad \frac{\partial \varphi_1^{(a)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial n} = -\frac{\mu_i - \mu_a}{\mu_a} H_n,$$

und um die Randbedingung (21) zu bestätigen, ist also nur zu zeigen, daß aus (29) und (27) sich $-\operatorname{grad}\varphi^{(i)} = \mathfrak{H} = \bar{H}$ ergibt. Nun folgt

aber aus (29), da $\bar{H}$ ein konstanter Vektor ist, analog der Umformung von (24) zu (25):

$$\frac{4\pi\mu_a}{\mu_i-\mu_a}\varphi_1^{(i)} = \int \bar{H}\,.\,\mathrm{grad}_\xi(1/r)\,dV$$
$$= -\bar{H}\,.\,\mathrm{grad}\,P = 2(H_x A x + H_y B y + H_z C z),$$

wonach

$$\mathfrak{H}_{1x}^{(i)} = -\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x} = -\frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}AH_x \quad \text{usw.} \tag{32}$$

Also unter Hinzunahme von (30):

$$\mathfrak{H}_x^{(i)} = \mathfrak{H}_{0x}+\mathfrak{H}_{1x} = \left(1+\frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}A\right)H_x - \frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}H_x = H_x \quad \text{usw.,} \tag{33}$$

was zu beweisen war. Damit ist bestätigt, daß alle Bedingungen der Aufgabe durch die Lösung (29) befriedigt werden.

§ 3. Kräfte auf materielle Körper im elektrischen oder magnetischen Felde.

1. Die Feldenergie. Die Feldbestimmung, wie wir sie in § 2 und § 3 durchgeführt haben, gestattet die Kräfte zu berechnen, die auf den behandelten Körper im Magnetfeld ausgeübt werden. Damit ist zugleich auch die entsprechende elektrostatische Aufgabe — dielektrischer Körper im elektrischen Felde — behandelt, wenn man nur die magnetischen Größen ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, μ) durch die analogen elektrischen ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, ε) ersetzt. Diese Übereinstimmung der beiden Felder braucht und kann übrigens nur in der Umgebung des eingetauchten Körpers stattfinden, denn es müssen ja immer die Unterschiede bleiben, die die Erzeugung des magnetischen bzw. elektrostatischen Feldes charakterisieren: Wir haben uns das elektrostatische Grundfeld immer als ein rotationsfreies, das magnetische Grundfeld als ein divergenzfreies vorzustellen.

Die Kräfte auf materielle Körper im elektrischen Felde findet man aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit: Jedem elektrischen Felde entspricht ein bestimmter Energievorrat U, den wir als potentielle Energie betrachten. Da durch die Lage eines Körpers in einem vorgegebenen Grundfeld das Gesamtfeld eindeutig bestimmt ist, so wird diese Energie außer von dem Grundfeld nur von den Lagenkoordinaten des Körpers abhängig sein. Wir denken uns diese Lagenkoordinaten einer Variation δ unterworfen und verstehen unter δA die mechanische Arbeit, die bei dieser Variation die ponderomotorischen Kräfte bzw. Momente des Feldes an dem Körper leisten. Sie müssen sich also aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ergeben:

$$\delta U + \delta A = 0. \tag{1}$$

Analog liegen die Verhältnisse im magnetischen Felde. Nur besteht hier der Unterschied, der mit dem oben betonten Unterschied des Feldcharakters zusammenhängt und zuerst von Maxwell erwähnt wurde, daß man die Energie des magnetischen Feldes nicht als potentielle, sondern als kinetische auffassen muß — wir bezeichnen sie demgemäß mit T. An Stelle des Prinzips der virtuellen Arbeit tritt dann das Hamiltonsche Prinzip (genauer die „Zentralgleichung") in der Form, die sie annimmt, wenn die vorkommenden „Geschwindigkeits"-Komponenten nur „verborgene" (zyklische) sind (vgl. II, § 1, 1), dagegen von den Impulsen, die zu den „wahrnehmbaren" Koordinaten gehören (nämlich der Massengeschwindigkeit der materiellen Körper), abgesehen wird:

$$-\delta T + \delta A = 0. \tag{2}$$

Analog würden im allgemeinen elektromagnetischen Felde beide Energieteile, potentielle und zyklisch-kinetische, auftreten, also die allgemeine Gleichung zu erfüllen sein:

$$\delta U - \delta T + \delta A = 0.$$

Die Energie ist im elektrischen und im magnetischen Felde nach den Vorstellungen von Maxwell nicht an die materiellen Körper oder die felderzeugenden Ladungen bzw. Ströme gebunden, sondern im Felde selbst verteilt. Dabei ist die elektrische Energie pro Volumeneinheit, wie für das elektrostatische Feld in VIII, § 1, Gl. (11) abgeleitet wurde, $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}.\mathfrak{D})$, die magnetische analog $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}.\mathfrak{B})$, also

$$U = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}.\mathfrak{D})\,dV, \quad T = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{H}.\mathfrak{B})\,dV. \tag{3}$$

Wir haben nun diese Energieausdrücke in eine Form zu bringen, die ihre Berechnung durch die Lagenkoordinaten des in das Grundfeld eingetauchten Körpers gestattet.

2. Hilfssatz. Es seien zwei Vektorfelder $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ gegeben, die im ganzen Raum den Bedingungen genügen:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{P} = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{Q} = 0. \tag{5}$$

Es soll auch der Fall eingeschlossen sein, daß diese Vektoren längs gewisser Flächen unstetig sind, in welchem Fall die Flächenrotation bzw. -divergenz verschwindet:

$$\mathfrak{P}_{s+} - \mathfrak{P}_{s-} = 0, \tag{4'}$$

$$\mathfrak{Q}_{n+} + \mathfrak{Q}_{n-} = 0\ ^{1}). \tag{5'}$$

[1]) Hierin ist die Normale auf beiden Seiten der Grenzfläche je nach dem Äußern des angrenzenden Gebiets als positiv gerechnet.

Für unendlich große Entfernung r soll

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \mathfrak{P} = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{r\to\infty} r \mathfrak{Q} = 0 \tag{6'}$$

gefordert werden, womit im Unendlichen Quellen von $\mathfrak{P}$ bzw. Wirbel von $\mathfrak{Q}$ ausgeschlossen sind.

Dann ist die Behauptung, daß das über den ganzen Raum erstreckte Integral des skalaren Produktes:

$$J = \int (\mathfrak{P}.\mathfrak{Q})\, dV = 0. \tag{7}$$

Denn wegen (4) kann man setzen:

$$\mathfrak{P} = \operatorname{grad} f.$$

Bedeutet V_i die Teilgebiete, in denen die Vektoren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ stetig sind, S_i ihre Oberflächen, n_i jeweils die nach dem Äußern des Teilgebiets gerichtete Normale, so verwandelt sich, mit Rücksicht auf (5), das Integral J in [vgl. Gl. (33) im 1. Bd., II, § 2, 3):

$$J = \sum_i^i \int_{Vi} (\operatorname{grad} f.\mathfrak{Q})\, dV_i = \sum_i^i \int_{S_i} (f.\mathfrak{Q}_{n_i})\, dS_i.$$

In dieser Summe von Oberflächenintegralen heben sich je zwei Summanden auf, die der nämlichen Grenzfläche entsprechen, wegen der Stetigkeitsbedingung (5'), und da wegen (4') auch f stetig angenommen werden kann; das Integral über die unendliche Oberfläche verschwindet wegen (6) bzw. der daraus folgenden Beziehung: $\lim_{r\to\infty} rf = 0$, sowie (6'). Also ist in der Tat $J = 0$ bewiesen.

3. Energie eines dielektrischen Körpers im elektrischen Felde. Es sei im homogenen Raume (Dielektrizitätskonstante ε_a) ein elektrisches Grundfeld $\mathfrak{E}_0$ gegeben. Es ist also:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}_0 = 0, \quad \mathfrak{E}_0 = -\operatorname{grad} \varphi_0, \quad \mathfrak{D}_0 = \varepsilon_a \mathfrak{E}_0. \tag{8}$$

Alle felderzeugenden Ladungen $\varrho_0 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{D}_0$ sollen im Endlichen liegen, so daß für $\mathfrak{E}_0$ im Unendlichen die Bedingung (6) erfüllt ist. In das Feld wird ein Körper mit der Dielektrizitätskonstanten ε_i gebracht; sein Innengebiet sei als V_i, der äußere Raum als V_a bezeichnet. Das entstehende Zusatzfeld sei wie oben durch $\mathfrak{E}_1$, φ_1 bezeichnet, das Gesamtfeld mit $\mathfrak{E}$, φ. Es ist im Innen- bzw. Außengebiet:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_i(\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon_a(\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1). \tag{9}$$

Ferner:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}_1 = 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) = 0. \tag{10'}$$

Längs der Grenzfläche J ist die Tangentialkomponente von $\mathfrak{E}_1$ und die Normalkomponente von $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)$ stetig, und im Unendlichen erfüllt $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)$ die Bedingung (6′). Die Energie des Grundfeldes sei U_0, die des Gesamtfeldes U, so entspricht dem Hineinbringen des Körpers ins Feld der Zuwachs an potentieller Energie:

$$U_1 = U - U_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{V_i + V_a} [(\mathfrak{E} . \mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}_0 . \mathfrak{D}_0)] \, dV$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{V_i + V_a} [\mathfrak{E} . (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) . \mathfrak{D}_0] \, dV.$$

Wegen der Bedingungen (10), (10′) verschwindet nun nach dem Hilfssatz (7) der erste Teil dieses Integrals und es bleibt:

$$U_1 = \frac{1}{8\pi} \int_{V_i + V_a} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) . \mathfrak{D}_0 \, dV = \frac{1}{8\pi} \int_{V_i} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_0 \, dV_i + \frac{1}{8\pi} \int_{V_a} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_0 \, dV_a.$$

Das zweite dieser Integrale läßt sich nun umformen in ein gleichfalls nur über V_i erstrecktes Integral. Es ist nämlich mit Rücksicht auf (8), (9):

$$\int_{V_a} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_0 \, dV_a = \varepsilon_a \int_{V_a} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_0 \, dV_a = \int_{V_a} (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) \mathfrak{E}_0 \, dV_a.$$

Wegen (8), (10′) und der Bedingungen (6), (6′) kann nun auch auf dieses Integral der Hilfssatz (7) angewendet werden und ergibt:

$$\int_{V_a} (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) \mathfrak{E}_0 \, dV_a = - \int_{V_i} (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) \mathfrak{E}_0 \, dV_i.$$

Also kommt im ganzen:

$$(11)' \quad \begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i} [(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) . \mathfrak{D}_0 - (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) . \mathfrak{E}_0] \, dV_i \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D} \mathfrak{E}_0) \, dV_i = \dfrac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i} \mathfrak{E} \mathfrak{E}_0 \, dV_i. \end{cases}$$

4. Energie eines para- oder diamagnetischen Körpers im Magnetfeld. Das magnetische Grundfeld sei jetzt durch $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{B}_0 = \mu_a \mathfrak{H}_0$ gegeben. Es ist nach unseren Voraussetzungen:

$$(12) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B}_0 = 0,$$

dagegen ist das Grundfeld nicht wirbelfrei. Nach Einbringen des Körpers mit der Permeabilität μ_i sei das Gesamtfeld $\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{B} = \mu_i \mathfrak{H}$ im Innen- bzw. $\mathfrak{B} = \mu_a \mathfrak{H}$ im Außengebiet. Dann ist:

$$(13) \qquad \operatorname{rot} (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

$$(14) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0) = 0.$$

Längs der Grenzfläche ist $(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)_s$ und $(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)_n$ stetig. Für die Energie des Körpers bekommen wir jetzt:

$$(15)\quad \begin{cases} T_1 = T - T_0 = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i + V_a} (\mathfrak{H}\mathfrak{B} - \mathfrak{H}_0 \mathfrak{B}_0)\, dV \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i + V_a} [(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{H}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)]\, dV. \end{cases}$$

Hier verschwindet wegen (12), (13) nach dem Hilfssatz (7) der erste Teil des Integrals. Der zweite ergibt

$$T_1 = \frac{1}{8\pi} \int_{V_i} \mathfrak{H}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)\, dV_i + \frac{1}{8\pi} \int_{V_a} \mathfrak{H}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)\, dV_a.$$

Statt des Integrals über V_a schreiben wir:

$$\int_{V_a} \mathfrak{H}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)\, dV_a = \mu_a \int_{V_a} \mathfrak{H}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)\, dV_a = \int_{V_a} \mathfrak{B}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)\, dV_a.$$

Nach den Bedingungen (13), (14) ist aber hierauf wieder der Hilfssatz anwendbar und ergibt:

$$\int_{V_a} \mathfrak{B}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)\, dV_a = -\int_{V_i} \mathfrak{B}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)\, dV_i.$$

Also im ganzen:

$$(16)\quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i} [\mathfrak{H}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0) - \mathfrak{B}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)]\, dV_i \\ \quad = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i} (\mathfrak{B}\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}\mathfrak{B}_0)\, dV_i = \dfrac{\mu_i - \mu_a}{8\pi} \displaystyle\int_{V_i} \mathfrak{H}\mathfrak{H}_0\, dV_i. \end{cases}$$

Der Vergleich der Formeln (11) und (16) zeigt, daß die Energie eines Körpers im elektrischen bzw. magnetischen Felde durch einen, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmenden Ausdruck dargestellt ist, wenn man die entsprechenden elektrischen und magnetischen Feldgrößen im Innern des Körpers vertauscht. Trotz der Verschiedenartigkeit ihrer Erzeugung (durch Quellen bzw. Wirbel) können nun die beiden Grundfelder in der Umgebung des Körpers übereinstimmen und erzeugen dann, wegen der Gleichheit der Randbedingungen, auch übereinstimmende Zusatzfelder. Beachtet man nun noch den Vorzeichenunterschied im Prinzip der virtuellen Arbeit (1) bzw. der Zentralgleichung (2), so folgt, daß die ponderomotorischen Kräfte die gleichen werden, wenn die elektrischen Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, ε durch in der Umgebung des Körpers quantitativ gleiche magnetische Größen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, μ ersetzt werden.

5. Anwendung auf das Ellipsoid. Wir beschränken uns wegen dieser Analogie auf den magnetischen Fall. Ein Ellipsoid von der Permeabilität μ_i befinde sich im parallelen magnetischen Felde $\mathfrak{H}_0$. Dieses Feld erfüllt zwar in großer Entfernung nicht die oben vorausgesetzten Bedingungen (6′); da aber die gesuchten Kräfte nur von dem Felde in der unmittelbaren Umgebung des Körpers abhängen können, und da die Darstellung (16) von T_1 nur eine Integration über das Körperinnere erfordert, so kann das Parallelfeld mit beliebiger Genauigkeit als eine Annäherung an ein Grundfeld der obengedachten Art aufgefaßt werden.

Wir erhalten unter Benutzung der konstanten Ausdrücke (28) in § 3 für $\mathfrak{H}$:

$$(17)\quad (\mathfrak{H}.\mathfrak{H}_0) = \frac{\mathfrak{H}_{0x}^2}{1+\frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}A} + \frac{\mathfrak{H}_{0y}^2}{1+\frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}B} + \frac{\mathfrak{H}_{0z}^2}{1+\frac{\mu_i-\mu_a}{2\pi\mu_a}C}$$

und, unter Einsetzung von $V_i = \frac{4}{3}\pi a b c$ für das Volumen des Ellipsoids:

$$(17')\qquad T_1 = \frac{\mu_i-\mu_a}{6} a b c (\mathfrak{H}.\mathfrak{H}_0).$$

Dieser Energieausdruck hängt außer von dem Betrag der Feldstärke, H_0, auch von der Richtung des Feldes gegenüber den Hauptachsen ab. Einer Drehung des Körpers muß daher nach dem Arbeitsprinzip (2) ein Moment $\boldsymbol{M}$ entsprechen, das von dem magnetischen Felde auf den Körper ausgeübt wird. Es sei im Sinne der Mechanik $\delta\omega(\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z)$ der Vektor einer virtuellen Drehung des Körpers um seinen Mittelpunkt; dagegen soll das Grundfeld $\mathfrak{H}_0$ im Raume festgehalten werden. Relativ zu dem im Körper festen Achsenkreuz der Hauptachsen, auf das sich die Komponenten $\mathfrak{H}_{0x}$ usw. beziehen, ist dann, wenn es als Rechtsschraubensystem angenommen wird (vgl. 1. Bd., II, § 3):

$$\delta\mathfrak{H}_0 = [\mathfrak{H}_0 \times \delta\omega],$$

d. h.

$$\delta\mathfrak{H}_{0x} = \mathfrak{H}_{0y}\delta\omega_z - \mathfrak{H}_{0z}\delta\omega_x, \quad \delta\mathfrak{H}_{0y} = \mathfrak{H}_{0z}\delta\omega_x - \mathfrak{H}_{0x}\delta\omega_z,$$
$$\delta\mathfrak{H}_{0z} = \mathfrak{H}_{0x}\delta\omega_y - \mathfrak{H}_{0y}\delta\omega_z.$$

Ferner ist nach (17′) mit Rücksicht auf den homogenen quadratischen Charakter der Form (17):

$$\delta T_1 = \frac{\mu_i-\mu_a}{6\pi} a b c . 2(\mathfrak{H}.\delta\mathfrak{H}_0) = \frac{\mu_i-\mu_a}{3\pi} a b c (\mathfrak{H}.[\mathfrak{H}_0 \times \delta\omega])$$
$$= \frac{\mu_i-\mu_a}{3\pi} a b c ([\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_0].\delta\omega).$$

Andererseits ist die virtuelle Arbeit der Momente:

$$\delta A = (\mathfrak{M}.\delta\omega) = M_x\delta\omega_x + M_y\delta\omega_y + M_z\delta\omega_z,$$

also ergibt das Arbeitsprinzip (2), da die $\delta\omega$ drei unabhängige Variationen sind:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu_i - \mu_a}{3\pi} a\,b\,c\,[\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}_0], \tag{18}$$

oder in Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{\mu_i - \mu_a}{3} a\,b\,c\,\mathfrak{H}_{0y}\,\mathfrak{H}_{0z} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} B} - \frac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} C} \right\} \\ M_y &= \frac{\mu_i - \mu_a}{3} a\,b\,c\,\mathfrak{H}_{0z}\,\mathfrak{H}_{0x} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} C} - \frac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} A} \right\} \\ M_z &= \frac{\mu_i - \mu_a}{3} a\,b\,c\,\mathfrak{H}_{0x}\,\mathfrak{H}_{0y} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} A} - \frac{1}{1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} B} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{18'}$$

Aus diesen Ausdrücken für die Momente lassen sich bemerkenswerte Folgerungen ziehen. Zunächst sind hierin einige einfache Größenbeziehungen zwischen den Konstanten A, B, C festzustellen. Nach den definierenden Formeln (27′) in § 3 ist:

$$A \geqq 0, \quad B \geqq 0, \quad C \geqq 0. \tag{19}$$

Ferner ist die Größenfolge der A, B, C umgekehrt der Größenfolge der a, b, c, d. h. wenn $a < b < c$, so ist $A > B > C$.

Durch Addition folgt schließlich, indem man die Integranden in § 3, (27′) auf gemeinsamen Nenner bringt und dann $\sigma = (a\,b\,c\,D)^2$ als neue Integrationsvariable substituiert:

$$A + B + C = \pi a b c \int_0^\infty \frac{(b^2+s)(c^2+s) + (a^2+s)(c^2+s) + (a^2+s)(b^2+s)}{\left((a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)\right)^{3/2}}\, ds$$

$$= \pi a b c \int_{a^2\,b^2\,c^2}^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}} = 2\pi.$$

Hieraus und wegen (19) folgt:

$$A \leqq 2\pi, \quad B \leqq 2\pi, \quad C \leqq 2\pi, \tag{20}$$

wobei ein Gleichheitszeichen nur bestehen kann, wenn zwei der Größen A, B, C verschwinden, was in dem ausgearteten Falle einträte, daß zwei der Achsen a, b, c unendlich würden. Im Falle der Kugel wird $A = B = C = 2\pi/3$.

Mittels (20) folgt zunächst, daß in den Klammerausdrücken $\{\}$ der Momente (18′) die Nenner immer positiv sind, auch in dem diamagnetischen Falle $\mu_i < \mu_a$, wobei nur in dem erwähnten Ausnahmefall der

(physikalisch unreale) Wert $\mu_i = 0$ auszuschließen ist. Bringt man auf gemeinsamen Nenner, so ist z. B.

$$M_x = \frac{(\mu_i - \mu_a)^2}{6\pi\mu_a} a b c \mathfrak{H}_{0y} \mathfrak{H}_{0z} \frac{C - B}{\left(1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu} B\right)\left(1 + \frac{\mu_i - \mu_a}{2\pi\mu_a} C\right)} \text{ usw.}$$

Die Richtung der Momentkomponenten ist daher unabhängig davon, ob $\mu_i > \mu_a$ oder $\mu_i < \mu_a$... Alle Momentkomponenten verschwinden, wenn das magnetische Feld $\mathfrak{H}_0$ zu einer der Hauptachsen parallel ist. Ihr Drehsinn hängt von der Größenfolge der Hauptachsen ab; z. B. ist das Moment M_x negativ, wenn $C < B$, d. h. $c > b$, und die Komponenten $\mathfrak{H}_{0y}, \mathfrak{H}_{0z}$ beide positiv sind. Allgemein gilt: Die Komponenten des Moments nach den Hauptachsen drehen in solchem Sinne, daß je in der zur Momentkomponente senkrechten Hauptebene die größere der beiden Hauptachsen in die Feldkomponente dieser Ebene auf kürzestem Wege hineingedreht wird.

Demzufolge ist die Gleichgewichtslage des Ellipsoids stabil, wenn die größte Achse in die Feldrichtung eingestellt ist, sie ist labil, wenn die kleinste oder mittlere Achse eingestellt ist; im letzteren Falle allerdings nur hinsichtlich der Drehungen um die kleinste Achse, während sie hinsichtlich der Drehungen um die größte Achse stabil ist. Beim verlängerten Rotationsellipsoid ist die Achseneinstellung stabil, beim verkürzten ist sie labil.

Die Unabhängigkeit der Einstellung vom Vorzeichen der Größe $\mu_i - \mu_a$ scheint auf den ersten Blick den Faradayschen Versuchen zu widersprechen; indessen bezogen sich diese nicht auf ein Parallelfeld, sondern ein inhomogenes, durch zwei Magnetpole erzeugtes. Im inhomogenen Felde entstehen Kräfte, die sich auch zu Momenten zusammensetzen.

Um solche Kräfte zu berechnen, nehmen wir das Feld als „quasihomogen“ an, d. h. als wenig veränderlich für eine Strecke von der Größenordnung der Körperdimensionen. Erteilen wir dem Körper eine Verrückung $\delta x, \delta y, \delta z$ unter Beibehaltung seiner räumlichen Orientierung, so sei

$$\delta A = \mathfrak{P}_x \delta x + \mathfrak{P}_y \delta y + \mathfrak{P}_z \delta z$$

die virtuelle Arbeit des Feldes. Andererseits ist in diesem Sinne T, eine — im allgemeinen noch von der Orientierung der Hauptachsen gegen die Feldrichtung abhängige — Funktion des Ortes, den der Körper im Felde einnimmt, also:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z.$$

Man erhält so für die Kraft, die das Feld auf den Körper ausübt, nach (17′) und nach dem Arbeitsprinzip (2):

$$\mathfrak{P} = \operatorname{grad} T = \frac{\mu_i - \mu_a}{6} a\,b\,c \operatorname{grad}(\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}_0).$$

Im Falle der Kugel ($a = b = c$, $A = 2\pi/3$) wird:

$$\mathfrak{H} = \frac{3\,\mu_a}{2\,\mu_a + \mu_i}\,\mathfrak{H}_0.$$

Also:

$$\mathfrak{P} = \frac{\mu_a(\mu_i - \mu_a)}{2\,(2\,\mu_a + \mu_i)}\,a^3 \operatorname{grad}(\mathfrak{H}_0^2).$$

Diese Kraft ist von der Richtung der Feldstärke unabhängig und zeigt an jeder Stelle nach der Richtung, in der der Absolutbetrag der Feldstärke am stärksten anwächst, solange $\mu_i > \mu_a$ (paramagnetischer Fall), dagegen entgegengesetzt im diamagnetischen Falle $\mu_i < \mu_a$.

Elftes Kapitel.

Quasistationäre Ströme und Wellen.

§ 1. Quasistationäre Stromkreise.

1. Magnetische Feldenergie. Ein stationärer Strom J erzeugt im umgebenden Raume ein quellenfreies Magnetfeld, das nach X, § 1 durch die Ampèresche Bedingung bestimmt ist, daß das Linienintegral der Feldstärke auf jedem den Stromleiter umschließenden Wege s:

$$(1) \qquad \int \mathfrak{H}\,ds = 4\pi J,$$

dagegen auf geschlossenen Wegen, die keinen Stromleiter umschließen, gleich 0 ist[1]).

Wenn der Strom J sich zeitlich ändert, so pflanzen sich, wie im IV. Abschnitt gezeigt werden wird, die Störungen mit annähernd Lichtgeschwindigkeit fort, und es entsteht ein veränderter Feldzustand. Wenn aber die zeitliche Änderung des Stromes langsam ist im Vergleich zu diesem Ausgleichsvorgang, so können wir mit genügender Genauigkeit den Zustand in jedem Moment als ausgeglichen annehmen. Man spricht dann von „quasistationären" Zustandsänderungen.

Um Gesetze für solche Zustandsänderungen zu finden, gehen wir von der Feldenergie aus. Die betrachteten Leiter sind „lineare", d. h. es wird von der Querschnittsausdehnung bei ihnen zunächst abgesehen.

[1]) Integrationsweg und Stromrichtung bzw. nachher Stromkreis und positive Normale der Membran bilden je ein Rechtsschraubensystem.

Damit werden auch elektrische Ladungen auf der Oberfläche der Leiter ausgeschlossen, da ihre Kapazität nach VIII, § 4 **1** verschwindet. Es seien der Kürze halber zwei solche geschlossene Leiter vorhanden, mit den Strömen J_1, J_2, die zusammen ein Magnet- und Induktionsfeld $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ erzeugen. Die beiden Leiter s_1, s_2 denken wir uns je durch eine Membran f_1, f_2 überspannt, deren beide Seiten noch als f_{1+}, f_{1-} bzw. f_{2+}, f_{2-} unterschieden werden. In dem durch die beiderseitigen Oberflächen der Membranen begrenzten unendlichen Raume existiert nach (1) eine Potentialfunktion $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, so daß

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathfrak{H}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_1, \qquad \mathfrak{H}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2, \\ \operatorname{div}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\mu\mathfrak{H} = 0, \ \operatorname{div}\mathfrak{B}_1 = \operatorname{div}\mu\mathfrak{H}_1 = 0, \ \operatorname{div}\mathfrak{B}_2 = \operatorname{div}\mu\mathfrak{H}_2 = 0. \end{cases}$$

Zu beiden Seiten der Membranen nimmt aber φ verschiedene Werte an, nämlich

$$\text{an } f_1\colon\ \varphi_+ - \varphi_- = \varphi_{1+} - \varphi_{1-} = +4\pi J_1,$$
$$\text{an } f_2\colon\ \varphi_+ - \varphi_- = \varphi_{2+} - \varphi_2 \ = +4\pi J_2.$$

Das Integral der Feldenergie über den unendlichen Raum nach X, § 4, **1**:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}\mathfrak{B}\,dv = \frac{1}{8\pi}\int \mu(\operatorname{grad}\varphi)^2\,dv,$$

verwandelt sich nach dem Greenschen Satze in Oberflächenintegrale. Es wird nämlich:

$$T = -\frac{1}{8\pi}\left\{\int_{f_{1+}} \mu\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}df + \int_{f_{1-}} \mu\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}df + \int_{f_{2+}} \mu\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}df + \int_{f_{2-}} \mu\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}df\right\}.$$

Hierin ist dn jeweils das nach außen hin gerichtete Normalenelement des betreffenden Oberflächenstücks. Versteht man aber in den Komponenten $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{B}_n$ unter n die Normale der Membran je nach deren positiver Seite hin, so ist:

$$\text{an } f_{1+} \text{ und } f_{2+}\colon \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\mathfrak{H}_n,$$

$$\text{an } f_{1-} \text{ und } f_{2-}\colon \frac{\partial\varphi}{\partial n} = +\mathfrak{H}_n,$$

und $\mathfrak{H}_n$, ebenso $\mathfrak{B}_n$, haben je auf beiden Seiten den nämlichen Wert. Also wird:

$$(3)\quad \begin{cases} T = \frac{1}{8\pi}\left\{\int\limits_{f_{1+}} (\varphi_+ - \varphi_-)\mathfrak{B}_n\,df + \int\limits_{f_{2+}} (\varphi_+ - \varphi_-)\mathfrak{B}_n\,df\right\} \\ \quad = \frac{1}{2}J_1\int\limits_{f_{1+}} \mathfrak{B}_n\,df + \frac{1}{2}J_2\int\limits_{f_{2+}} \mathfrak{B}_n\,df = \frac{1}{2}(J_1 p_1 + J_2 p_2). \end{cases}$$

Hierin wird

$$p_1 = \int_{f_{1+}} \mathfrak{B}_n \, df \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \int_{f_{2+}} \mathfrak{B}_n \, df$$

als der magnetische Fluß durch den geschlossenen Stromleiter s_1 bzw. s_2 bezeichnet. Und zwar zerlegen sich, entsprechend der Zerlegung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$, auch p_1 und p_2 je in zwei Teile, die vom Strome J_1 bzw. J_2 herrühren:

$$(4) \qquad \begin{cases} p_1 = p_{11} + p_{12} = L_{11} J_1 + L_{12} J_2, \\ p_2 = p_{21} + p_{22} = L_{21} J_1 + L_{22} J_2. \end{cases}$$

Wir bilden dann noch die Differenz:

$$(5) \qquad \begin{cases} J_1 p_{12} - J_2 p_{21} = -J_1 \int\limits_{f_{1+}} \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} df + J_2 \int\limits_{f_{2+}} \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} df \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int\limits_{f_{1+}} \mu (\varphi_{1+} - \varphi_{1-}) \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} df - \int\limits_{f_{2+}} \mu (\varphi_{2+} - \varphi_{2-}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} df \right\} \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int\limits_{f_{1+}} \mu \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} df + \int\limits_{f_{1-}} \mu \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} df - \int\limits_{f_{2+}} \mu \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} df \right. \\ \left. - \int\limits_{f_{2-}} \mu \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} df \right\}. \end{cases}$$

Ferner ist aber, da φ_1 an f_2 und φ_2 an f_1 stetig ist:

$$(5') \quad 0 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int\limits_{f_{1+}} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} df + \int\limits_{f_{1-}} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} df - \int\limits_{f_{2+}} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} df - \int\limits_{f_{2-}} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} df \right\}.$$

Aus (5), (5') erhält man durch Subtraktion nun das über die gesamte, durch die vier Teilflächen f_{1+}, f_{1-}, f_{2+}, f_{2-} gebildete Oberfläche erstreckte Integral:

$$J_1 p_{12} - J_2 p_{21} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_f \mu \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) df$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_f (\varphi_1 \mathfrak{B}_{2n} - \varphi_2 \mathfrak{B}_{1n}) \, df$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_v (\varphi_1 \operatorname{div} \mathfrak{B}_2 - \varphi_2 \operatorname{div} \mathfrak{B}_1) \, dv = 0$$

[nach dem Gaußschen Satze und (2)], somit:

$$J_1 J_2 (L_{12} - L_{21}) = 0, \quad \text{d. h.} \quad L_{12} = L_{21}.$$

Mittels dieser wichtigen Symmetriebeziehung wird die magnetische Energie (3):

$$T = \tfrac{1}{2}(L_{11}J_1^2 + 2L_{12}J_1J_2 + L_{22}J_2^2). \tag{6}$$

L_{11}, L_{22} heißen die Koeffizienten der Selbstinduktion, $L_{12} = L_{21}$ ist der Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden Leiter.

2. Mechanische Auffassung des Systems. Faradays Induktionsgesetz. Im Anschluß an Maxwells Bilder stellen wir uns diese magnetische Energie als kinetische vor, was durch den Charakter des Stromes als einer Geschwindigkeit bewegter elektrischer Ladung nahegelegt ist. Die zugehörigen „Impulse" sind dann die magnetischen Flüsse:

$$\frac{\partial T}{\partial J_1} = L_{11}J_1 + L_{12}J_2 = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial J_2} = L_{21}J_1 + L_{22}J_2 = p_2. \tag{7}$$

Entsprechende Lagenkoordinaten kommen in T nicht vor, so daß insoweit ein zyklisches System vorliegt. Sie können aber in der elektrischen als potentieller Energie in Erscheinung treten. Wir definieren sie, anschließend an die Mechanik, als

$$q_1 = \int^t J_1\,dt, \qquad q_2 = \int^t J_2\,dt, \tag{8}$$

und sehen sie für einen geschlossenen Stromkreis nur als Rechnungsgrößen an. Ist aber ein Stromkreis durch einen Kondensator unterbrochen, so stellen sie direkt die Ladung auf der einen Belegung desselben dar, die als die positive bezeichnet sei.

Im letzteren Falle sei V_+, V_- das Potential auf der positiven bzw. negativen Belegung, $\mathfrak{E}_c$ die Feldstärke im Kondensator, b sein Plattenabstand, so ist die elektrische Energie, die diesem Teile entspricht, nach VIII, § 1

$$U_c = \tfrac{1}{2}(V_+ - V_-)q = \tfrac{1}{2}q\int_0^b \mathfrak{E}_c\,ds;$$

da $\mathfrak{E}_c$ mit q proportional ist, ist dieser Ausdruck quadratisch in q, und es entspricht einer Ladungsänderung δq eine Energievariation

$$\delta U_c = \delta q \cdot \int_0^b \mathfrak{E}_c \cdot ds. \tag{9}$$

Im Leiter ist nach einem physikalischen Grundgesetz die pro Zeiteinheit erzeugte (Joulesche) Wärme:

$$Q = \int_s \mathfrak{E}J\,ds = J \cdot \int_s \mathfrak{E}\,ds = \frac{dq}{dt}\int_s \mathfrak{E}\,ds. \tag{9'}$$

Der gleiche Ausdruck gilt auch für etwa vorkommenden chemischen Energieumsatz. Die so erzeugte Wärme oder sonstige Energieform

müssen wir gleichfalls als potentielle Energie ansehen. Nach (9), (9′) entspricht somit immer einer virtuellen Änderung der „Lagenkoordinaten“ q_1, q_2 die virtuelle Änderung der potentiellen Energie:

$$\delta U = \delta q_1 \int_{s_1} \mathfrak{E}\, ds + \delta q_2 \int_{s_2} \mathfrak{E}\, ds, \tag{10}$$

wobei die Integrale über die geschlossenen Wege, also auch durch die Kondensatoren hindurch, zu erstrecken sind.

Aus (7) und (10) folgen die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial J_1}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = \dfrac{dp_1}{dt} + \displaystyle\int_{s_1} \mathfrak{E}\, ds = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial J_2}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = \dfrac{dp_2}{dt} + \displaystyle\int_{s_2} \mathfrak{E}\, ds = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Diese in (11) ausgesprochenen Beziehungen stellen das Faradaysche Induktionsgesetz in seiner allgemeinen Form dar. Auf einen solchen Zusammenhang zwischen den Grundlagen der Elektrodynamik und der Mechanik hingewiesen zu haben, ist ein Hauptverdienst der Maxwellschen Theorie.

3. Schwingungen von Stromkreisen. Wechselstromwiderstand. In den unter 2 behandelten Stromkreisen sei der Ohmsche Widerstand W_1, W_2, also der Ohmsche Spannungsabfall $W_1 J_1$ bzw. $W_2 J_2$. Ferner sei in jeden ein Kondensator eingeschaltet mit der Kapazität K_1, K_2. Der Spannungsabfall im Kondensator ist dann q_1/K_1 bzw. q_2/K_2, und die Spannungsintegrale in (11) werden:

$$\int_{s_1} \mathfrak{E}\, ds = \frac{q_1}{K_1} + W_1 J_1, \quad \int_{s_2} \mathfrak{E}\, ds = \frac{q_2}{K_2} + W_2 J_2. \tag{12}$$

Folglich ergibt (11), (12), (7), (8) zusammen folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} L_{11}\dfrac{dJ_1}{dt} + L_{12}\dfrac{dJ_2}{dt} + W_1 J_1 + \dfrac{q_1}{K_1} = 0, \quad J_1 = \dfrac{dq_1}{dt}, \\ L_{21}\dfrac{dJ_1}{dt} + L_{22}\dfrac{dJ_2}{dt} + W_2 J_2 + \dfrac{q_2}{K_2} = 0, \quad J_2 = \dfrac{dq_2}{dt}. \end{cases} \tag{13}$$

Wir fragen zunächst nach den freien Schwingungen eines einzelnen ungekoppelten Schwingungskreises. Dann ist $L_{12} = 0$, und wir erhalten unter Weglassung der Indizes aus (13) nach Elimination von q die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$L\frac{d^2 J}{dt^2} + W\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{K} = 0.$$

Der bekannte Lösungsansatz (vgl. 1. Bd., VI, § 2, 3) $J = c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_2 t}$ ergibt zur Bestimmung von ω:

$$L\omega^2 + W\omega + \frac{1}{K} = 0,$$

also

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} = -\frac{W}{2L} \pm \sqrt{\frac{W^2}{4L^2} - \frac{1}{LK}}.$$

Wenn $\Delta = W^2 - 4\frac{L}{K} > 0$, so handelt es sich um einen aperiodisch abklingenden Strom im Stromkreis; wenn dagegen $\Delta < 0$, so sind die partikularen Lösungen

$$e^{\left(-\frac{W}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LK} - \frac{W^2}{4L^2}}\right)t};$$

es liegen also gedämpfte Schwingungen vor, mit dem logarithmischen Dekrement k und der Frequenz n:

$$k = \frac{W}{2L}, \quad n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LK} - \frac{W^2}{4L^2}}.$$

Im allgemeinen Falle handelt es sich in den Gl. (13) um gekoppelte Schwingungen der beiden Stromkreise, die nach den Regeln im 1. Bd., VI, § 5, 4 zu behandeln sind. Wir wollen aber auch nicht diesen allgemeinen Fall durchführen, sondern den von erzwungenen Schwingungen eines Stromkreises, den man z. B. erhält, wenn man in der ersten Gl. (13) das Koppelungsglied $L_{12}\frac{dJ_2}{dt}$ als eine induzierte periodische Spannung von vorgegebenem Verlauf betrachtet (also die Rückwirkung auf den zweiten Stromkreis außer acht läßt). Die Spannung sei $\mathfrak{P}\cos\omega t$; so wird die Gleichung, unter Fortlassung der Indizes:

$$L\frac{dJ}{dt} + WJ + \frac{q}{K} = \mathfrak{P}\cos\omega t, \quad \frac{dq}{dt} = J. \tag{14}$$

Da die freien Schwingungen, die oben aufgestellt wurden, gedämpft sind, interessieren uns hier hauptsächlich die erzwungenen. Ersetzen wir die rechte Seite in (14) nach bekannten Methoden durch den komplexen Ausdruck $\mathfrak{P}e^{i\omega t}$, so finden wir J als Realteil der Lösung von

$$L\frac{d^2J}{dt^2} + W\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{K} = i\omega\mathfrak{P}e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Die erzwungene Lösung sei gesetzt: $\mathfrak{J}e^{i\omega t}$, so ergibt sich

$$(-L\omega^2 + i\omega W + 1/K)\mathfrak{J} = i\omega\mathfrak{P},$$

d. h.

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{P}}{W + i(L\omega - 1/K\omega)}. \tag{16}$$

Den Nenner, der das komplexe Verhältnis von Spannung zu Strom angibt, bezeichnet man hier, in Analogie zum Ohmschen Gesetz, als „komplexen Wechselstromwiderstand“. Der Betrag dieses Verhältnisses, in der Elektrotechnik „Impedanz“ genannt, ist

$$\frac{|\mathfrak{P}|}{|\mathfrak{J}|} = R = \sqrt{W^2 + (L\omega - 1/K\omega)^2}. \tag{17}$$

Der Strom ist dabei nach (16) in der Phase der Spannung nacheilend um die Größe (vgl. 1. Bd., III, § 1, **1**):

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{L\omega - 1/K\omega}{W},$$

eine Phasenverschiebung, die bei Überwiegen des „kapazitiven“ Gliedes $1/K\omega$ über das „induktive“ $L\omega$ in eine Voreilung übergeht. Sie ist 0 im Falle der Resonanz von ω mit der ungedämpften, freien Frequenz, d. h. wenn

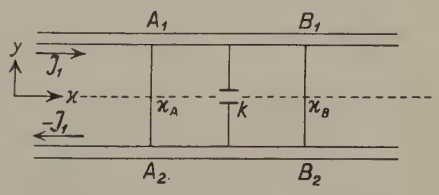
$$\omega^2 = \frac{1}{LK}.$$

Für den Betrag $|\mathfrak{J}|$ stellt (17) in Abhängigkeit von ω bei festem $|\mathfrak{P}|$ eine Resonanzkurve dar.

§ 2. Quasistationäre Wellen in Leitern.

1. Die Wellengleichungen. Wie in Kapitel XV auf Grund der Maxwellschen Gleichungen gezeigt werden wird, pflanzen sich elektrische Störungen nicht nur im freien Raume mit Lichtgeschwindigkeit fort, sondern auch längs „vollkommenen“ Leitern, die als Grenzfall metallischer Leiter bei unendlich großer Leitfähigkeit anzusehen sind. Für die Behandlung solcher Wellen kann man auch, im Anschluß an Heaviside und andere, von einer weniger allgemeinen Grundlage ausgehen, die für homogene gerade Leiter im Resultat mit dem der Maxwellschen Theorie übereinstimmt. Für zusammengesetzte Leiter gibt die Methode allerdings nur eine Annäherung an das den Maxwellschen Gleichungen genügende Feld, die aber den Vorteil hat, praktisch handbar zu sein.

Fig. 30.



Zwei zylindrische Leiter (1, 2, s. Fig. 30) sollen parallel der x-Achse liegen, und wir wollen solche Wellen behandeln, für die der Strom beider Leiter entgegengesetzt gleich ist. (Sofern dies nicht der Fall ist, könnte man einen dritten Leiter, z. B. die Erde, annehmen, so daß die Stromsumme 0 wird usw.) Die Ströme $J_1 = J$, $J_2 = -J$ haben eine doppelte

Wirkung: Sie erzeugen erstens im umgebenden Raume ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}(\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H})$ und laden zweitens die Leiter elektrisch auf; dadurch, sowie durch den Ohmschen Widerstand der Leiter, entsteht ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$. Das in einem Querschnitt x senkrecht zu dem Leiter von einem zum anderen erstreckte Feldintegral

$$\int_1^2 \mathfrak{E}\, dy = P(x) \tag{1}$$

heiße die Spannung des Leiters 1 gegen den Leiter 2 in diesem Querschnitt. Längs der Leiter selbst ist, wenn W_1, W_2 der Ohmsche Widerstand der Leiter pro Längeneinheit:

$$\mathfrak{E}_1 = W_1 J_1, \quad \mathfrak{E}_2 = W_2 J_2 = -W_2 J_1. \tag{2}$$

Wir legen nun zwei Querschnitte $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ senkrecht zu den beiden Leitern und betrachten das Rechteck $A_1 B_1 B_2 A_2$. Da das in § 1 abgeleitete Faradaysche Induktionsgesetz unabhängig davon galt, ob der dort betrachtete Stromkreis ein geschlossener oder ein durch einen Kondensator unterbrochener offener war, sind wir berechtigt, das Gesetz auf das obige Rechteck anzuwenden, dessen Randkurve zum Teil auf Leitern, zum Teil durch den Zwischenraum verläuft. Wir haben also für einen geschlossenen Umlauf um das Rechteck:

$$\int \mathfrak{E}\, ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_f \mathfrak{B}_n\, df. \tag{3}$$

Das zweite Integral bezieht sich auf die vom Rechteck umschlossene ebene Fläche f, und n ist deren Normalenrichtung im Raume. Durch Einsetzen von (1), (2) in das Integral linker Hand in (3) erhält man:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int_f \mathfrak{B}_n\, df &= P(x_A) - P(x_B) + \int_{A_2}^{B_2} W_2 J_2\, dx + \int_{B_1}^{A_1} W_1 J_1\, dx \\ &= P(x_A) - P(x_B) - (W_1 + W_2) \int_A^B J\, dx. \end{aligned}$$

Hier gehen wir zur Grenze über, indem wir $x_B \to x_A$ heranrücken lassen (Differentiation nach x). Aus dem Flächenintegral links entsteht dabei bis auf den Faktor dx das Linienintegral $\int_{A_1}^{A_2} \mathfrak{B}_n\, dy$, das den Fluß pro Längeneinheit des Leiters an dieser Stelle bezeichnet, und man erhält, noch mit der Abkürzung $W = W_1 + W_2$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_1^2 \mathfrak{B}_n\, dy\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + WJ, \tag{4}$$

wobei alle Größen im Querschnitt x zu nehmen sind.

Wir machen nun folgende beiden einleuchtenden Voraussetzungen, deren Berechtigung für die Schlußfolgerungen sich auf Grund der Maxwellschen Gleichungen (Kap. XV) ergeben wird:

a) Die Induktion $\mathfrak{B}_n(x)$ berechne sich aus dem Strome $J(x)$ ebenso, als ob dieser längs der ganzen Leiter überall der nämliche wäre. Insofern ist die Berechnung des magnetischen Feldes eine zweidimensionale Aufgabe. Dabei wird auch von der induzierenden Wirkung des „Verschiebungsstromes" abgesehen, der nach den Maxwellschen Auffassungen von Leiter zu Leiter verläuft, vgl. IV. Abschnitt. Wir bezeichnen daher solche Wellen als „quasistationäre".

b) Auf beiden Leitern befinden sich Ladungen, und zwar wegen der Voraussetzung $J_1 + J_2 = 0$ entgegengesetzt gleiche in jedem Querschnitt. Ihre Dichte pro Längeneinheit auf beiden Leitern sei $+q$ bzw. $-q$. Die Spannung $P(x)$ soll sich nun aus der Ladungsdichte $q(x)$ genau so berechnen, als ob die Ladungsdichte längs der ganzen Leiter konstant wäre, also die zweidimensionale Aufgabe in Kapitel VIII, § 4, **2** vorläge.

Wenn man den Sinn des induzierten Feldes beachtet (Lenzsche Regel), so nimmt die Induktion pro Längeneinheit nach Voraussetzung a) die Form an:

$$-\int_{A_1}^{A_2} \mathfrak{B}_n(x)\,dy = LJ(x); \tag{5}$$

hierin heißt L die „Selbstinduktion des Leiters pro Längeneinheit". Folglich erhält man statt (4):

$$L\frac{\partial J}{\partial t} + WJ = -\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{6}$$

Andererseits kann nach Voraussetzung b) eine Konstante K, die „Kapazität pro Längeneinheit", eingeführt werden, so daß

$$q(x) = KP(x). \tag{7}$$

Endlich ist wegen der Unveränderlichkeit der Gesamtladung die Ladungsänderung des Stückes zwischen den Querschnitten x_A und x_B:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A^B q\,dx = J(A) - J(B),$$

also durch den Grenzübergang $B \to A$:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} \tag{8}$$

und aus (7) und (8):

$$K\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}. \tag{9}$$

Die Gleichungen (6), (9) zwischen Spannung und Strom, die die Fortpflanzung der Stromspannungswellen regeln, heißen die „Telegraphengleichungen". Zwischen den Konstanten L und K besteht übrigens immer eine Beziehung, die durch Ausrechnung des Feldes ohne Schwierigkeit einzusehen ist:

$$LK = \frac{\varepsilon \mu}{c^2}. \tag{10}$$

Dabei sind ε, μ Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des die Leiter umgebenden Mediums, c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, und alle Größen sind im elektromagnetischen Maßsystem zu rechnen.

Die Elimination von P aus (6) und (9) ergibt noch:

$$L\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + W\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{1}{K}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 0, \tag{9'}$$

und die nämliche Gleichung ergäbe sich durch Elimination für P. Eine allgemeine Form der Lösung dieser Gleichung ist bereits im 1. Bd., XVIII, § 4, 8 angegeben, unter der Voraussetzung, daß die Leitung unbegrenzt ist und die anfängliche Verteilung $J(x)$ und $\frac{\partial J}{\partial t}$, d. h. nach (6) $P(x)$, vorgegeben ist.

2. Stehende Wellen. Freie Schwingungen. Wir beschränken uns daher hier auf speziellere Aufgaben, und zwar solche, die sich auf begrenzte Leiter beziehen. Zu dem Zweck suchen wir zunächst die partikulären Lösungen der Gl. (6), (9), für die sowohl J als auch P je als ein Produkt einer Funktion von t und einer Funktion von x erscheinen. Da es sich um Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, kann man eine solche partikuläre Lösung J_m, P_m ansetzen:

$$J_m = j_m e^{mx} e^{\alpha t}, \quad P_m = p_m e^{mx} e^{\alpha t}. \tag{11}$$

Dabei sind m, α, j_m, p_m Konstanten, für die man durch Einsetzen von (11) in (6), (9) folgende Beziehungen erhält:

$$(L\alpha + W) j_m = -m p_m, \tag{12}$$

$$-m j_m = K\alpha p_m, \tag{12'}$$

also nach Elimination der Konstanten j_m, p_m:

$$L\alpha^2 + W\alpha - \frac{m^2}{K} = 0, \tag{13}$$

und nach Elimination von m:

$$\frac{p_m}{j_m} = \pm\sqrt{\frac{L\alpha + W}{K\alpha}}. \tag{13'}$$

Wir wollen zuerst den Fall in Betracht ziehen, daß J und P in bezug auf x harmonisch periodisch sind oder sich aus solchen Teilen

zusammensetzen; dann ist m rein imaginär — wir schreiben iv —, dagegen nach (13):

$$\alpha_{1,2} = -\frac{W}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{W}{L}\right)^2 - \frac{4\nu^2}{LK}} \tag{14}$$

negativ rein reell, solange $\nu^2 \leqq \frac{K W^2}{4L}$, und konjugiert komplex mit negativem Realteil für größere ν. Es handelt sich also um aperiodisch abklingende oder gedämpfte Schwingungen. Wir setzen weiterhin den letzteren Fall voraus und setzen dann:

$$\alpha_{1,2} = -\varkappa \pm i\lambda_\nu. \tag{14'}$$

Demnach kann man durch Kombination der zu $+\nu$ bzw. $-\nu$ gehörigen e-Faktoren unter Benutzung von (12') folgende partikulären Lösungen bilden (wir schreiben hier j_ν für die Stromkonstante):

$$\begin{cases} J = j_\nu \sin(\nu x - \delta)\, e^{(-\varkappa \pm i\lambda_\nu)t}, \\ P = -\dfrac{\nu}{K\alpha} j_\nu \cos(\nu x - \delta)\, e^{(-\varkappa \pm i\lambda_\nu)t}. \end{cases} \tag{15}$$

Solche Lösungen werden bekanntlich als freie, stehende Schwingungen bezeichnet, da die Nullstellen und Maxima von Strom und Spannung örtlich festliegen und das Zeitglied nur durch die Konstanten des Systems bestimmt ist. Örtlich besteht eine Phasenverschiebung um eine Viertelwellenlänge zwischen Spannung und Strom, und zeitlich bedeutet der Nenner α in P, daß die Spannung dem Strom um die Phase $\gamma_\nu = \arg(\alpha_\nu) = \operatorname{arctg}(\lambda_\nu/\varkappa)$ nacheilt, die im Falle $\varkappa = 0$, d. h. $W = 0$, gleichfalls zu einer Viertelperiode wird.

Als Anwendung[1]) sei zur Zeit $t = 0$ eine Ladungsverteilung $q_0(x)$ auf einer beiderseits offenen Leitung der Länge l vorgegeben, deren Ausgleich untersucht werden soll. An den Enden gilt dann für jeden Zeitpunkt:

$$J = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l, \tag{16}$$

und außerdem verschwindet der Strom überall zur Anfangszeit, d. h.

$$J(x) = 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq l. \tag{16'}$$

Die Lösung soll in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden, und zwar kommt nach den Bedingungen (16) die Entwicklung in Frage:

$$J(xt) = e^{-\varkappa t} \sum_1^\infty{}_n\, j_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\lambda_n t, \tag{17}$$

[1]) Eine ausführliche Behandlung derartiger Aufgaben siehe bei K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Teubner, 1908.

mit ganzzahligem n. Die Ladungs- bzw. Spannungsverteilung ist dann nach (15) und mit Berücksichtigung von (13), worin für $m^2 = -(n\pi/l)^2$ zu setzen ist:

$$q(xt) = KP(xt) = -e^{-zt}\sum_1^\infty{}^n \frac{n\pi j_n}{l|\alpha|}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\lambda_n t + \gamma_n)$$

$$= -e^{-zt}\sqrt{KL}\sum_1^\infty{}^n j_n\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\lambda_n t + \gamma_n).$$

Zur Zeit $t = 0$ erhält man hiermit:

$$q_0(x) = -\sqrt{KL}\sum_1^\infty{}^n j_n\sin\gamma_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

so daß j_n aus der Fourierschen Beziehung bestimmt ist:

$$-\sqrt{KL}\sin\gamma_n j_n = \frac{2}{l}\int_0^l q_0(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

3. Erzwungene Schwingungen. In der Wechselstromtechnik ist der andere Fall realisiert, daß der Strom J und die Spannung P zeitlich rein harmonische Funktionen sind, deren Frequenz ω dem Netze von außen aufgezwungen wird. Dann ist in (11) $\alpha = i\omega$ rein imaginär, und nach (13) wird

$$m = \pm\sqrt{K(-L\omega^2 + iW\omega)} = \pm(\varrho + i\sigma) \tag{13''}$$

komplex. Dabei sind, wenn ω als positiv angenommen ist, sowohl ϱ als auch σ positiv. Eine partikuläre Lösung sei dann geschrieben:

$$J = e^{i\omega t}(j_1 e^{mx} + j_2 e^{-mx}) = [j_1 e^{i(\omega t + \sigma x) + \varrho x} + j_2 e^{i(\omega t - \sigma x) - \varrho x}], \tag{18}$$

und nach (12) bzw. (13') wird der zugehörige Verlauf von P:

$$P = \sqrt{\frac{L - iW/\omega}{K}}\,[-j_1 e^{i(\omega t + \sigma x) + \varrho x} + j_2 e^{i(\omega t - \sigma x) - \varrho x}]. \tag{18'}$$

Der mit dem Faktor j_1 behaftete Teil der Lösungen (18), (18') stellt eine in der Richtung abnehmender x, der mit dem Faktor $-j_1$ eine in der Richtung wachsender x fortschreitende und jeweils in der Fortschreitungsrichtung abklingende Welle dar. Die erstere kann als Reflexion der letzteren betrachtet werden, wenn die Leitung z. B. im Gebiet $x < 0$ liegt und bei $x = 0$ abgebrochen und „belastet", d. h. über einen bestimmten Ohmschen (R) und induktiven (S) Widerstand geschlossen ist. Das Reflexionsverhältnis $j_1 : j_2$ ist dann aus der Art der Belastung bestimmt, die durch die Bedingung:

$$P = S\frac{dJ}{dt} + RJ \quad \text{für} \quad x = 0 \tag{19}$$

charakterisierbar ist. Durch Einsetzen von (18), (18′) ergibt (19):

$$(19') \quad \begin{cases} \left[\sqrt{\dfrac{L - iW/\omega}{K}} + (iS\omega + R)\right] j_1 \\ \qquad + \left[-\sqrt{\dfrac{L - iW/\omega}{K}} + (iS\omega + R)\right] j_2 = 0 \end{cases}$$

für das Verhältnis $j_1 : j_2$, und zwar ist es, weil komplex, nach Größe und Phase bestimmt. Unter Umständen kann die reflektierte Welle auch verschwinden, nämlich dann, wenn der Koeffizient von j_2 in (19′) verschwindet. Damit dieser Fall eintreten kann, muß man vom induktiven Widerstand S der Belastung und dem Ohmschen W der Leitung absehen können, und der Ohmsche Widerstand der Belastung muß von bestimmter Größe sein, nämlich:

$$(20) \qquad R = \sqrt{\frac{L}{K}} = Z.$$

Die hier eingeführte Konstante Z, die bei verschwindendem Widerstand die einzige charakteristische Konstante der Leitung ist, wird als „Wellenwiderstand“ der Leitung bezeichnet, da sie in diesem Falle nach (18), (18′) das Verhältnis von Spannung zu Strom in den fortschreitenden Wellen angibt. Wir bezeichnen allgemeiner auch das komplexe Verhältnis zwischen Spannung und Strom nach (18), (18′) als Wellenwiderstand $\overline{Z}$.

Eine Umordnung der Gl. (18), (18′) ist zweckmäßig, wenn etwa der Strom (J_0) und die Spannung (P_0) am Ende $x = 0$ der Leitung vorgegeben sind. Es ist für $x = 0$:

$$J_0 = e^{i\omega t}(j_1 + j_2), \quad P_0 = \overline{Z}\, e^{i\omega t}(-j_1 + j_2),$$

d. h.

$$\overline{Z}J_0 - P_0 = 2\overline{Z}j_1 e^{i\omega t}, \quad \overline{Z}J_0 + P_0 = 2\overline{Z}j_2 e^{i\omega t}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man aus (18), (18′):

$$(21) \quad \begin{cases} \overline{Z}J = \overline{Z}J_0 \dfrac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} - P_0 \dfrac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}, \\ P = -\overline{Z}J_0 \dfrac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + P_0 \dfrac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}. \end{cases}$$

Da hierin $m = \varrho + i\sigma$ komplex ist, lassen sich J und P bei gegebenem J_0 und P_0 je in einer komplexen Ebene in Abhängigkeit von x durch ein Diagramm, das in der Elektrotechnik „Spiralendiagramm“ benannt wird, darstellen. Wird der Ohmsche Widerstand W vernachlässigt, so ist nach (13″) und (10)

$$\varrho = 0, \quad \sigma = \omega\sqrt{LK} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}, \quad m = i\sigma,$$

und man erhält statt (21):

$$(21') \qquad \begin{cases} ZJ = ZJ_0 \cos\sqrt{\varepsilon\mu}\,\dfrac{\omega x}{c} - iP_0 \sin\sqrt{\varepsilon\mu}\,\dfrac{\omega x}{c}, \\ iP = ZJ_0 \sin\sqrt{\varepsilon\mu}\,\dfrac{\omega x}{c} + iP_0 \cos\sqrt{\varepsilon\mu}\,\dfrac{\omega x}{c}. \end{cases}$$

Strom und Spannung sind dann längs der Leitung sowohl nach der Phase als auch nach der Amplitude periodisch veränderlich. Nur falls iP_0 gleichphasig mit J_0, so bleiben die Phasen längs der ganzen Leitung erhalten. Die Phasenverschiebung zwischen J und P beträgt in dem Falle überall eine Viertelperiode[1]).

4. Fortschreitende Wellen beliebiger Gestalt. Die partikulären Lösungen (11), von denen wir in 2 ausgingen, lassen sich mittels (14), (14′) schreiben:

$$J_\nu = j_\nu e^{-\varkappa t} e^{i(\nu x \pm \lambda_\nu t)}, \quad P_\nu = p_\nu e^{-\varkappa t} e^{i(\nu x \pm \lambda_\nu t)},$$

und stellen in dieser Form fortschreitende Wellen mit einem von der Wellenlänge $2\pi/\nu$ unabhängigen Dämpfungsfaktor $e^{-\varkappa t}$ dar. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$v = \pm\frac{\lambda_\nu}{\nu} = \pm\frac{1}{\sqrt{LK}}\sqrt{1 - \frac{K}{L}\left(\frac{W}{2\nu}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{LK}}\sqrt{1 - \left(\frac{W}{2Z\nu}\right)^2}.$$

Diese ist daher von der Wellenlänge nur abhängig nach Maßgabe des quadratischen Gliedes $(W/2Z\nu)^2$. Beschränken wir die Rechnung auf die linearen Glieder, so pflanzen sich also alle Wellen mit der gleichen Geschwindigkeit fort und klingen dabei nur gemäß dem gemeinsamen Dämpfungsfaktor ab. Nachdem so die Wirkung der Dämpfung im allgemeinen festgestellt ist, vereinfachen wir die Aufgabe dahin, daß wir von dem Ohmschen Widerstand W der Leitung ganz absehen. Wir haben dann also statt (6), (9) die Gleichungen:

$$(6') \qquad L\frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad K\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}.$$

Deren allgemeine Lösung ist, durch zwei willkürliche Funktionen f_1, f_2 ausgedrückt:

$$(22) \qquad \begin{cases} J = f_1(x + vt) + f_2(-x + vt), \\ P = -Zf_1(x + vt) + Zf_2(-x + vt) \end{cases}$$

mit

$$Z = \sqrt{L/K}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LK}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Die mittels dieser fortschreitenden Wellen zu behandelnden Aufgaben beziehen sich auf die Reflexion an den Enden der Leitungen oder

[1]) Näheres in dem zitierten Buche von K. W. Wagner sowie bei Breisig, Theoretische Telegraphie (Vieweg, 1910), Kap. VII, VIII.

den Übergang in Leitungen von anderem Wellenwiderstand, z. B. von einer Freileitung in ein Kabel, und ähnliche. Es kommen unter anderen folgende Rand- und Übergangsbedingungen in Betracht:

Für ein Leitungsende:

a) Offenes Leitungsende bei $x = 0$. Dann ist $J(0, t) = 0$, also

$$f_1 + f_2 = 0, \quad J = f_1(x + vt) - f_1(-x + vt),$$
$$P = -Z[f_1(x + vt) + f_1(-x + vt)].$$

Hier ist f_1 als einfallende, f_2 als reflektierte Welle im Gebiet $x > 0$ zu betrachten. Die Reflexion erfolgt in solchem Sinne, daß die Stromanteile am Ende sich aufheben, die Spannungsanteile dagegen sich verdoppeln.

b) Geschlossenes Leitungsende bei $x = 0$, d. h. $P(0, t) = 0$, also:

$$-f_1 + f_2 = 0, \quad J = f_1(x + vt) + f_1(-x + vt),$$
$$P = Z[-f_1(x + vt) + f_1(-x + vt)].$$

In diesem Falle wird der Strom der einfallenden Welle am Ende durch die Reflexion verdoppelt.

c) Belastung durch einen Ohmschen Widerstand R. Dann ist $P(0, t) + RJ(0, t) = 0$. Also:

$$(R - Z)f_1 + (R + Z)f_2 = 0.$$

Die reflektierte Welle f_2 verschwindet in dem Falle, wenn $R - Z = 0$, d. h. Belastungs- und Wellenwiderstand übereinstimmen.

d) Belastung durch eine Induktivität S. Dann ist am Ende $x = 0$:

$$S\frac{dJ(0, t)}{dt} + P(0, t) = 0,$$

woraus zur Bestimmung von f_2 bei gegebenem f_1 die lineare inhomogene Differentialgleichung folgt:

$$Sv(f_1' + f_2') - Z(f_1 - f_2) = 0.$$

Ist die einfallende Welle harmonisch periodisch, und zwar durch den Faktor $e^{i\omega(t - x/v)}$ dargestellt, so lautet diese Bedingung:

$$(iSv\omega - Z)f_1 + (iSv\omega + Z)f_2 = 0,$$

wonach die reflektierte Welle im Betrag mit der auffallenden übereinstimmt, aber in der Phase verschoben ist.

Übergang zwischen zwei Leitungen. a) An der Stelle $x = 0$ sollen zwei Leitungen von verschiedenem Wellenwiderstand zusammentreffen, und zwar sei er Z_+ im Gebiet $x > 0$ und Z_- im Gebiet $x < 0$. Im ersteren Gebiet nehmen wir eine in der Richtung abnehmender x einfallende Welle $f_1(x + vt)$ gegeben an; sie kann sich an der Trennungs-

stelle $x = 0$ in eine reflektierte f_2 und durchgehende f_3 zerlegen. Wir setzen also im ersten Gebiet nach (22):

$$(23) \qquad \begin{cases} J_+ = f_1(x+vt) + f_2(-x+vt), \\ P_+ = Z_+[-f_1(x+vt) + f_2(-x+vt)] \end{cases}$$

und im zweiten Gebiet:

$$(23') \qquad J_- = f_3(x+vt), \quad P_- = -Z_- f_3(x+vt).$$

Die Forderung, daß an der Trennungsstelle sowohl der Strom als die Spannung stetig verlaufen müssen, gibt dann:

$$J_+(0,t) - J_-(0,t) = f_1 + f_2 - f_3 = 0,$$
$$P_+(0,t) - P_-(0,t) = Z_+(-f_1 + f_2) + Z_- f_3 = 0,$$

wonach

$$f_2 = \frac{Z_+ - Z_-}{Z_+ + Z_-} f_1, \qquad f_3 = \frac{2Z_+}{Z_+ + Z_-} f_1.$$

Je nachdem ob $Z_- \gtrless Z_+$, ist die reflektierte Welle bezüglich des Stromes von entgegengesetztem oder gleichem Vorzeichen mit der einfallenden Welle. Der erste Fall nähert sich für $Z_- \to \infty$ dem Zustand der offenen Leitung, der zweite für $Z_- \to 0$ dem Zustand der geschlossenen Leitung.

b) Ein Ohmscher Widerstand R sei zwischen zwei Leitungen von gleichem Wellenwiderstand $Z_- = Z_+ = Z$ geschaltet. Dann gelten die Gl. (23), (23′) mit Z statt Z_+ und Z_-, und für $x = 0$ die Übergangsbedingungen:

$$J_+(0,t) - J_-(0,t) = f_1 + f_2 - f_3 = 0,$$
$$P_+(0,t) - P_-(0,t) + RJ_-(0,t) = Z[-f_1 + f_2 + f_3] + Rf_3 = 0,$$

wonach

$$f_2 = -\frac{R}{2Z+R} f_1, \qquad f_3 = \frac{2Z}{2Z+R} f_1.$$

Auch hier ergibt sich für $R \to \infty$ der Grenzfall der offenen Leitung, für $R \to 0$ der Fall des reflexionsfreien ungestörten Durchganges der Welle.

c) Statt des Ohmschen sei jetzt ein induktiver Widerstand S zwischen die beiden gleichen Leitungen bei $x = 0$ eingeschaltet. Dann kommen zu (23), (23′) die Übergangsbedingungen hinzu:

$$J_+(0,t) - J_-(0,t) = f_1 + f_2 - f_3 = 0,$$
$$P_+(0,t) - P_-(0,t) + S\frac{d}{dt}J_-(0,t) = Z(-f_1 + f_2 + f_3) + Svf_3' = 0,$$

wonach

$$Svf_3' + 2Zf_3 = 2Zf_1.$$

Diese inhomogene lineare Differentialgleichung bestimmt f_3 als Funktion ihres Arguments $\xi = x + vt$, wenn man annimmt, daß für negative

Werte des Arguments und für $\xi = 0$ sowohl $f_1(\xi) = 0$ als auch $f_3(\xi) = 0$, nach dem 1. Bd., VI, § 2, **2** zu

$$f_3(\xi) = \frac{2Z}{Sv} e^{-\frac{2Z}{Sv}\xi} \cdot \int_0^{\xi} f_1(\xi) e^{\frac{2Z}{Sv}\xi} d\xi,$$

und die reflektierte Welle f_2 ist dann, als Funktion ihres Arguments $-x + vt$, bestimmt zu $f_2 = f_3 - f_1$. Der Strom in der zweiten Leitung und der reflektierte in der ersten wachsen nach diesen Gleichungen von Beginn des Auftreffens ab allmählich an.

Wenn z. B. in der auffallenden Welle $f_1 =$ konst (Rechteckwelle), so wird

$$f_3 = f_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2Z}{Sv}\xi}\right),$$

wonach als Endzustand der vollständige Durchgang $f_3 = f_1$ erreicht wird.

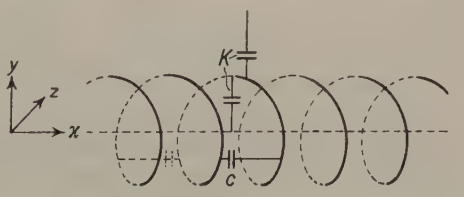
Oder falls die auffallende Welle für $\xi > 0$ harmonisch periodisch mit der Frequenz ω, d. h. $f_1(\xi) = ce^{i\omega\xi/v}$, so ist der Endzustand

$$f_3 = \frac{2Z}{2Z + iS\omega} f_1, \qquad f_2 = -\frac{iS\omega}{2Z + iS\omega} f_1.$$

§ 3. Quasistationäre Wellen in Spulen.

1. Die Wellengleichungen. Die Fortpflanzung von Wellen durch Spulen ist ein Problem, das zu seiner vollständigen Bewältigung eine genaue Feldberechnung in der Umgebung der Spulen notwendig macht[1]); besseren Überblick über die Verhältnisse gibt aber eine vereinfachte Behandlung[2]) (vgl. Fig. 31), die der des § 2 analog ist.

Fig. 31.



Die Spulenachse falle in die x-Achse und die Spule selbst sei als eine einfache zylindrische Schraubenlinie von sehr geringer Ganghöhe angenommen. Ihre Rückleitung sei der Symmetrie halber in der Achse vorausgesetzt und kann als geerdet angenommen werden. Sie sei, in Verbindung mit anderen fernen zylindersymmetrischen Leitern, kurz als die „Erde“ bezeichnet.

Im Luftraum im Innern und Äußern der Spule besteht ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$, von dem wir die radialen Komponenten $\mathfrak{E}_r (r = \sqrt{y^2 + z^2})$

[1]) Vgl. hierzu die Ansätze von W. Lenz, Ann. d. Phys. **4**, 37, 1912.

[2]) In Anlehnung an: O. Böhm, Wanderwellenschwingungen in Transformatorwicklungen, Arch. f. Elektrot. **5**, 1917; K. W. Wagner, ebenda **6**, 1918.

und die Längskomponenten $\mathfrak{E}_x$ in Betracht ziehen. Ferner besteht wegen des die Spule durchfließenden Stromes ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$, von dem wir gleichfalls die einleuchtende Voraussetzung machen, daß es in den Radialebenen liegt, d. h. daß nur seine Komponenten $\mathfrak{H}_r$ und $\mathfrak{H}_x$ in Betracht kommen. Unter dieser Voraussetzung ist nach dem Faradayschen Induktionsgesetz das elektrische Feld in den Radialebenen wirbelfrei und kann somit elektrostatisch berechnet werden. Unter Spannung P in einem Punkte der Spule ist das Integral $-\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$ zu verstehen, von der Erde auf einem in der Radialebene gelegenen Wege nach dem Spulenpunkt hin erstreckt.

Auf der Oberfläche des die Spule bildenden Drahtes bilden sich elektrische Ladungen, die wir, gemäß dem allgemeinen Ausdruck von Kap. VIII, § 1, **2** (vgl. auch 1. Bd., II, § 3, 4) für die räumliche Ladungsdichte in Luft ($\varepsilon = 1$):

$$4\pi\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathfrak{E}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x}, \tag{1}$$

gleichfalls in zwei Teile zerlegen. Es sei also die Ladung auf der Spule pro Längeneinheit der x-Achse

$$q = q_r + q_x. \tag{2}$$

Der erste Teil, der nach (1) den Feldkomponenten $\mathfrak{E}_r$ entspricht, soll nun so berechnet werden, als ob der von der Spule erfüllte Raum ein Kreiszylinder vom inneren Radius a und äußeren Radius b wäre, und der Zusammenhang zwischen $q_r(x)$ und der mittleren Spannung $P(x)$ im Querschnitt x werde dabei wie in § 2, **1** so angenommen, als ob die Spannung längs des Zylinders konstant wäre. Also

$$q_r(x) = K P(x), \tag{3}$$

mit einer Kapazitätskonstante K pro Längeneinheit der x-Achse[1]).

Den zweiten Teil q_x der Ladungen berechnet man am zweckmäßigsten so, als ob der zylindrische Spulenraum kontinuierlich vom Längsfeld $\mathfrak{E}_x$ erfüllt wäre. Man erhält daher diese Ladung pro Längeneinheit durch Integration über die ringförmige Querschnittsfläche f zwischen $r = a$ und $r = b$ aus (1) zu

$$4\pi q_x = \int_f \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} df = f\frac{\partial \overline{\mathfrak{E}}_x}{\partial x}, \tag{4}$$

wobei die Überstreichung eine Mittelwertsbildung bezeichnet. Da voraussetzungsgemäß das Feld in den Radialebenen wirbelfrei ist, so ist hier

$$\overline{\mathfrak{E}}_x = -\frac{\partial P(x)}{\partial x}. \tag{5}$$

[1]) Sie läßt sich elektrostatisch nach Kap. VIII, § 4, **1** berechnen, wobei aber die Dimensionen der „Erde“ in Betracht gezogen werden müssen.

Nach (4) und (5) schreiben wir also:

$$q_x = -C\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{6}$$

und nennen C die „Windungskapazität“ pro Längeneinheit der x-Achse.

Im ganzen bekommt man somit:

$$q(x) = q_r(x) + q_x(x) = KP(x) - C\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2}. \tag{2'}$$

Dieser Ansatz tritt an Stelle von Gl. (7) in § 2, 1.

Dagegen gelten die Gl. (6) und (8) des § 2 in ihrer Form auch für die jetzige Aufgabe. Nur ist zu beachten, daß die Induktivität L jetzt dem die Querschnittsebene der Spule, also die Fläche $a^2\pi$, senkrecht durchsetzenden magnetischen Fluß entspricht und daher nicht mehr in der Beziehung (10) zur Kapazität steht. Vielmehr sind, wenn α den Steigungswinkel der Spule bezeichnet, sowohl K als auch L ungefähr im Verhältnis $\operatorname{ctg}\alpha$ größer, als dieser Beziehung entspräche, d. h. es ist der Größenordnung nach

$$\sqrt{LK} \approx \operatorname{ctg}\alpha\,\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}. \tag{7}$$

L ist gleichfalls pro Längeneinheit der x-Achse zu rechnen, ebenso der Widerstand W, den wir aber der Einfachheit halber vernachlässigen wollen. Danach haben wir folgende Gleichungen:

$$L\frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x};\quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \tag{8}$$

also mit (2')

$$K\frac{\partial P}{\partial t} - C\frac{\partial^3 P}{\partial x^2\,\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}. \tag{9}$$

Durch (8) und (9) ist nun der Wellenverlauf bestimmt.

2. Harmonische Wellen. Zur Untersuchung dieser Wellen steht nur die Methode der Zusammensetzung aus harmonischen Wellenzügen zur Verfügung, da allgemeine Lösungen als fortschreitende Wellen beliebiger Gestalt, wie die Lösungen (22) in § 2, hier nicht existieren. Wir setzen also wieder partikulare Lösungen an:

$$J_\nu = j_\nu e^{i(\nu x - \omega t)},\quad P_\nu = p_\nu e^{i(\nu x - \omega t)}, \tag{10}$$

und finden durch Einsetzen in (8), (9):

$$-iL\omega j_\nu = -i\nu p_\nu,\quad -i\nu j_\nu = -i(K\omega + C\omega\nu^2)p_\nu, \tag{11}$$

woraus

$$L(K + C\nu^2)\omega^2 - \nu^2 = 0, \tag{12}$$

$$Z_\nu = \frac{p_\nu}{j_\nu} = \frac{L\omega}{\nu} = \sqrt{\frac{L}{K + C\nu^2}} = \sqrt{\frac{L}{K}(1 - LC\omega^2)}. \tag{13}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß jedem reellen ν, also örtlich harmonischer Verteilung von Spannung und Strom, auch ein reelles ω, also zeitlich harmonischer Verlauf entspricht. Es handelt sich dann um eine fortschreitende Welle mit der von der Frequenz bzw. Wellenlänge abhängigen Fortschreitungsgeschwindigkeit:

$$(14) \qquad v_\nu = \frac{\omega}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{L(K + L\nu^2)}} = \sqrt{\frac{1 - LC\omega^2}{LK}}.$$

Für $\omega = 0$ ist sie $1/\sqrt{LK}$, also nach (7) von der Größenordnung $\operatorname{tg}\alpha \,.\, c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Sie nimmt dann ab mit abnehmender Wellenlänge $l = 2\pi/\nu$ bzw. wachsender Frequenz ω und wird im Grenzfall verschwindender Wellenlänge ($\nu = \infty$) zu 0. Die Frequenz ω nähert sich zugleich einem Grenzwert, der als „kritische Frequenz“ bezeichnet wird:

$$(15) \qquad \omega_k = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Für höhere Frequenzen sind fortschreitende Wellen nicht mehr möglich, vielmehr wird, wenn $\omega > \omega_k$ ist, ν nach (14) rein imaginär. Die örtliche Verteilung der Partikularlösungen ist dann nicht mehr harmonisch, sondern exponentiell abklingend bzw. ansteigend.

Ebenso ist nach (13) der Wellenwiderstand $Z_\nu = p/j$ keine Materialkonstante mehr, sondern von der Wellenlänge bzw. Frequenz abhängig und verschwindet für die kritische Frequenz, für die sich also die Spule in beider Hinsicht wie eine gerade Leitung mit unendlich großer Kapazität verhält. Für größere Frequenzen wird Z rein imaginär, d. h. es tritt eine Phasenverschiebung um eine Viertelperiode zwischen Spannung und Strom ein.

3. Zusammensetzung zu abgebrochenen Wellen. Im Gebiet $x < 0$ verlaufe eine Freileitung wie die in § 2 behandelte, mit dem Wellenwiderstand Z. Im Gebiet $x > 0$ sei eine Spule angeschlossen[1]). Sie kann zunächst für harmonische Wellen nach 2 wie eine Freileitung mit dem Wellenwiderstand Z_ν behandelt werden. Wenn also in der Freileitung eine harmonische Welle der Frequenz ω mit der Stromamplitude f_1 einfällt, so dringt nach der Aufgabe a) auf S. 383 in die Spule eine Welle gleicher Frequenz ein, und zwar erhält man für ihren Strom bzw. ihre Spannung:

$$(16) \qquad J_\omega = \frac{2Z}{Z + Z_\nu} f_1 e^{j(\omega t - \nu x)}, \quad P_\omega = \frac{2Z_\nu Z}{Z + Z_\nu} f_1 e^{j(\omega t - \nu x)}.$$

Eine einfallende Welle beliebiger Gestalt ist nun als Fouriersches Integral aus solchen harmonischen Wellen zusammenzusetzen. Es handle

[1]) Die Verhältnisse würden ähnlich wie die hier behandelten liegen, wenn an jeden Zweig der Freileitung eine Spule angeschlossen ist.

sich z. B. um eine harmonische Welle der Frequenz α mit „steiler Front“, die zur Zeit $t = 0$ die Trennungsstelle erreicht. D. h. die einfallende Welle sei für $x = 0$:

$$P(0,t) = ZJ(0,t) = 0 \text{ für } t < 0, \quad P(0,t) = ZJ(0,t) = Ze^{i\alpha t} \text{ für } t > 0.$$

Diese Funktion läßt sich nicht durch ein reelles Fouriersches Integral darstellen, da sie nicht auf reellem Wege von $-\infty$ bis $+\infty$ integrabel ist (vgl. 1. Bd., Kap. IV, § 4, 3). Wohl aber ist sie auf komplexem Wege darstellbar. Es ist nämlich:

$$(17) \qquad J(0,t) = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\alpha}\,d\omega,$$

wenn das letztere Integral in der komplexen ω-Ebene auf dem in Fig. 32a gezeichneten komplexen Wege geführt wird, der den Punkt $\omega = \alpha$ im Linkssinne umgeht. Denn für $t < 0$ kann man diesen Weg in einen

Fig. 32a.

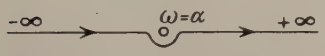


Fig. 32b.

die negativ-imaginäre Halbebene umspannenden großen Halbkreis unmittelbar deformieren und erhält so den Wert Null für das Integral (vgl. 1. Bd., Kap. III, § 3). Bei positivem t kann man ihn nur in einen den Punkt $\omega = \alpha$ umschließenden kleinen Kreis $\varkappa$ und den die positive Halbebene umspannenden Halbkreis deformieren, der wieder Null ergibt. Als Residuum von dem Kreis $\varkappa$ bleibt dann aber: $J(0,t) = e^{i\alpha t}$.

Folglich wird die in die Spule eindringende Welle für $x = 0$ nach (16) und (17):

$$(18) \qquad \begin{cases} J(0_+,t) = \dfrac{2Z}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(Z_\nu(\omega)+Z)(\omega-\alpha)}\,d\omega, \\ \text{mit:} \quad Z_\nu(\omega) = \sqrt{\dfrac{L}{K}(1-LC\omega^2)}. \end{cases}$$

Für $x > 0$ endlich hat man zum Integranden noch den Faktor $e^{-i\nu x}$ hinzuzufügen, mit Benutzung des Wertes ν aus (14). Man erhält also für $x > 0$:

$$(19) \qquad J(x,t) = \frac{Z}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\left[t-\sqrt{LK}\,x/\sqrt{1-LC\omega^2}\right]}}{(Z_\nu(\omega)+Z)(\omega-\alpha)}\,d\omega$$

als vollständige Lösung für die Stromverteilung. Die entsprechende Spannungsverteilung ist:

$$P(x,t) = \frac{Z}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_v(\omega)\, e^{i\omega[t-\sqrt{LK}x/\sqrt{1-LC\omega^2}]}}{(Z_v(\omega)+Z)(\omega-\alpha)}\, d\omega. \tag{20}$$

Für den Integrationsweg in (19), (20) ist noch zu beachten, daß der Integrand für alle positiven x, einschließlich $x = +\infty$, endlich bleiben muß. Das ist sicher erfüllt, soweit die $[-]$ im Exponent reell ist. Da aber für $\omega > \omega_k$ die Quadratwurzel rein imaginär wird, so ist der Weg so zu wählen, daß $i\omega/\sqrt{1-LC\omega^2}$ für $\omega > \omega_k$ positiv reell wird. Wenn die Wurzel im Gebiet $\omega < \omega_k$ positiv gewählt war, so wird das erreicht, indem man je einen Verzweigungsschnitt in der ω-Ebene von $+\omega_k$ nach $+\infty$ und von $-\omega_k$ nach $-\infty$ legt und den Integrationsweg nach Fig. 32b wählt. Für $t < 0$ läßt sich dieser Weg wieder in den die negativ-imaginäre Halbebene umspannenden Halbkreis deformieren, so daß die Integrale verschwinden.

Für $t > 0$ ist eine genauere Diskussion erforderlich. In allgemeinen Zügen wird ihr Resultat darin bestehen, daß die steile Front der Welle beim Vordringen in die Spule sich abflacht, da, wie oben festgestellt wurde, die höher frequenten Partialwellen sich mit geringerer Geschwindigkeit fortpflanzen, als die niedrig frequenten, und zwar ist die in (14) berechnete Größenordnung bis zur kritischen Frequenz $\omega = \omega_k$ maßgebend. Aber wegen der Quadratwurzel im Exponenten, die für $\omega > \omega_k$ imaginär wird, ist es auch für beliebige positive x doch vom Moment $t = 0$ ab nicht mehr möglich, den Integrationsweg in den negativen Halbkreis zu deformieren, wo die Integrale verschwinden würden. Das bedeutet, daß im Moment $t = 0$ sowohl P als J für alle positiven x plötzlich[1]) einen endlichen, wenn auch anfangs sehr kleinen Wert annehmen, als Folge der kapazitiven Wirkung zwischen den Windungen.

Lehrbücher zu Kapitel VIII bis XI.

E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900.
P. Duhem, Les theories électriques de J. Cl. Maxwell, étude historique et critique. Paris 1902.
P. Duhem, Leçons sur l'électricité et le magnétisme. T. I, II, III. Paris 1891.
M. Abraham (und A. Föppl), Theorie der Elektrizität, Bd. 1 (Einf. in d. Maxwellsche Theorie), 7. Aufl. Leipzig 1923.
J. H. Jeans, The mathematical theory of electricity and magnetism. 4. edit. Cambridge 1923.
J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. 1 (Allgemeine Mechanik der Elektrizität). Berlin 1926.

[1]) Bei Berücksichtigung des Verschiebungsstroms (s. den folgenden Abschnitt) würde hier eine Fortpflanzung mit Lichtgeschwindigkeit Platz greifen.

IV. Abschnitt.

Elektromagnetische Schwingungen.

Zwölftes Kapitel.

Allgemeine Sätze und Integrationsmethoden.

§ 1. Grundgleichungen und Eindeutigkeit der Lösungen.

Unter elektromagnetischen Schwingungen verstehen wir zeitlich periodische Lösungen der Maxwellschen Gleichungen beliebiger Frequenz, von den kurzwelligen Röntgenstrahlen über das gewöhnliche Licht und die Hertzschen Wellen bis hin zu den Frequenzen der drahtlosen Telegraphie. Ob die physikalische Darstellung dieser Vorgänge durch die Maxwellschen Gleichungen endgültig ist oder ob sie quantentheoretisch zu verfeinern sein wird, geht uns hier nichts an: die mathematische Behandlung der Wellenausbreitung wird stets durch die Maxwellschen Gleichungen bestimmt sein, auch wenn diese Gleichungen selbst künftig als Mittelungen von Quantenprozessen aufzufassen sein sollten. Die Emission und Absorption des Lichtes andererseits, welche zweifellos nicht in den Maxwellschen Gleichungen enthalten sind, liegen außerhalb unseres Gegenstandes. Dabei begreifen wir unter dem Namen „Maxwellsche Gleichungen“ im weiteren Sinne entgegen dem historischen Sachverhalt nicht nur die ihnen von Hertz und Heaviside gegebene vereinfachte Form, sondern auch die Lorentzschen Gleichungen der Elektronentheorie und ihre relativistische Vervollkommnung.

1. Eigentliche Maxwellsche Theorie. Die Maxwellschen Gleichungen lauten für ruhende Medien in bequemen (sogenannten rationellen, 4π-freien) Einheiten und in einem mathematisch bequemen Maßsystem (die elektrischen Größen einschließlich des elektrischen Stromes elektrisch, die magnetischen magnetisch gemessen):

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \qquad \text{(III)}\quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(II)}\quad \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J}) = +\operatorname{rot}\mathfrak{H}, \qquad \text{(IV)}\quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho.$$

$\mathfrak{B}$ ist die magnetische Induktion, $\mathfrak{D}$ die elektrische Verschiebung oder Erregung, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ elektrische und magnetische Feldstärke,

$\mathfrak{J}$ Leitungsstrom, ϱ Raumdichte der (wahren) elektrischen Ladung, c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit = $3{,}00 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

(IV) ist Definitionsgleichung für ϱ. Man folgert aus (II), daß in Nichtleitern ($\mathfrak{J} = 0$) ϱ zeitlich konstant ist, wegen $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, vgl. 1. Bd., S. 69, (27). Ebenso folgt aus (I) die zeitliche Konstanz von $\operatorname{div}\mathfrak{B}$, welche Größe man die (wahre) Raumdichte der magnetischen Quellen nennen kann. In (III) wird diese zeitliche Konstanz dahin spezialisiert, daß $\mathfrak{B}$ überall quellenfrei (solenoidal) verteilt sein soll.

Die Gl. (I) und (II) bekommen einen physikalischen Sinn erst dann, wenn man ihnen erfahrungsmäßige Aussagen über den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ hinzufügt. Diese lauten für isotrope Medien, bei Absehung von magnetischer oder elektrischer Sättigung und Hysterese:

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{J} = \sigma\,\mathfrak{E}.$$

Die positiven Faktoren ε, μ, σ heißen Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitvermögen.

Weiter aber ist es nötig, um die Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ definieren, d. h. messen zu können, durch Zusatzaxiome die energetischen und ponderomotorischen Größen einzuführen. Die Form der Gleichungen legt (vgl. unter 2) folgende Definitionen nahe:

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} W_e = \frac{1}{2}\mathfrak{E}\mathfrak{D} & = \text{Raumdichte der elektrischen Energie,} \\ W_m = \frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathfrak{B} & = \text{Raumdichte der magnetischen Energie,} \\ Q = \mathfrak{E}\mathfrak{J} & = \text{Joulesche Wärme pro Volumen- und Zeiteinheit,} \\ \mathfrak{S} = c\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H} & = \text{Energiefluß pro Flächen- und Zeiteinheit} = \text{Strahlungsvektor.} \end{cases}$$

Die Energiedichte wird also durch ein skalares Produkt, der Energiefluß durch ein Vektorprodukt gegeben. Im isotropen Falle entartet das skalare Produkt in das algebraische Produkt der absoluten Beträge.

Die Coulombsche Kraft zwischen zwei punktförmig konzentrierten elektrischen Ladungen e, e' bzw. zwei Magnetpolen m, m' lautet in unseren Einheiten zufolge von (VI):

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{F} = \frac{e\,e'}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m\,m'}{4\pi\mu r^2},$$

wo ε und μ die Konstanten des Zwischenmittels bedeuten. Daraus ergibt sich, daß wir zu den gewöhnlichen „konventionellen“ Einheiten übergehen, wie solche in dem vorangehenden Abschnitt III benutzt wurden, wenn wir in allen unseren Formeln ersetzen:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} e, \varrho, \mathfrak{J}, m & \text{durch } \sqrt{4\pi}\,(e, \varrho, \mathfrak{J}, m)_{\text{konv}}, \\ \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{B} & \text{durch } \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{B})_{\text{konv}}. \end{cases}$$

Wollen wir ferner vom elektrischen („elektrostatischen") zum magnetischen („elektromagnetischen") Maßsystem übergehen, so haben wir außerdem zu ersetzen

$$(3)\qquad \begin{cases} (e, \varrho, \mathfrak{J})_{\mathrm{el}} & \text{durch} \quad c\,(e, \varrho, \mathfrak{J})_{\mathrm{magn}}, \\ (\mathfrak{E}, \mathfrak{D})_{\mathrm{el}} & \text{durch} \quad \frac{1}{c}(\mathfrak{E}, \mathfrak{D})_{\mathrm{magn}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (I) bis (VI) gelten im ganzen unbegrenzten Raume, unbeschadet vorhandener Inhomogenitäten und Übergangsschichten. Für letztere folgen, da unendlich große Werte von $\dot{\mathfrak{B}}$ und $\dot{\mathfrak{D}}$ energetisch auszuschließen sind, aus (I) und (II) die Grenzbedingungen für die Tangentialkomponenten:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{\mathrm{tg}} \\ \mathfrak{H}_{\mathrm{tg}} \end{cases} \text{ stetig beiderseits der Grenzfläche}$$

und aus (IV) und (III) für die Differenz der Normalkomponenten beiderseits der Grenzfläche:

$$(5)\qquad \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1 = \eta, \quad \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 = 0;$$

η ist die (wahre) elektrische Oberflächenladung in der Grenzschicht; die entsprechende magnetische Größe ist in Übereinstimmung mit (III) gleich Null.

2. Energiesatz und Eindeutigkeit der Lösungen. Indem man (I) skalar mit $\mathfrak{H}$, (II) mit $\mathfrak{E}$ multipliziert, erhält man rechts

$$\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\,\mathrm{div}\,(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}),$$

vgl. 1. Bd., S. 69, (26), also im ganzen:

$$\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}} + \mathfrak{E}\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{E}\mathfrak{J} = -\,c\,\mathrm{div}\,(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}).$$

Mit den in (VI) erklärten Abkürzungen haben wir also:

$$(6)\qquad \dot{W} + Q + \mathrm{div}\,\mathfrak{S} = 0.$$

$W = W_e + W_m$ ist die Raumdichte der gesamten elektromagnetischen Energie; Gl. (6) formuliert den Poyntingschen Satz, den Energiesatz des elektromagnetischen Feldes. Er drückt aus, wie die Energie im Volumenelement abgeändert wird einerseits durch den Energiefluß $\mathfrak{S}$ (auch Poyntingscher Vektor genannt), andererseits durch die Wärmeproduktion Q. Im Nichtleiter ($Q = 0$) besagt (6) die raumzeitliche Erhaltung der elektromagnetischen Energie.

Es seien jetzt $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2$ Lösungen der Grundgleichungen, welche im Unendlichfernen verschwinden und für $t = 0$ im ganzen Raume identisch werden. Wir wollen zeigen, daß sie dann zu jeder Zeit $t > 0$ identisch sind. Zu dem Zwecke bilden wir die Felddifferenzen $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$, welche zusammen mit den nach (V)

zugehörigen Größen $\mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{z}$ wegen des linearen Charakters der Gl. (I) und (II) ebenfalls diesen Gleichungen genügen. Infolgedessen gilt auch Gl. (6), wobei jetzt unter $W, \mathfrak{S}, Q$ die mit unseren Felddifferenzen gebildeten Ausdrücke (VI) zu verstehen sind. Wir grenzen den Raum durch eine im Unendlichen gelegene Fläche $\mathfrak{Q}$ ab und integrieren über das Innere derselben, was wir durch Überstreichen andeuten. Es entsteht

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{W} + \overline{Q} = -\overline{\operatorname{div}\mathfrak{S}} = -\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{S}_n \, d\sigma. \tag{7}$$

Hier haben wir rechts beim Übergang von dem Raum- zum Oberflächenintegral den Gaußschen Satz [1. Bd., S. 70, (29)] verwendet.

Nach Voraussetzung verschwindet $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}$, und zwar, wie wir annehmen wollen, hinreichend stark, um die rechte Seite von (7) zum Verschwinden zu bringen. Es bleibt also:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{W} = -\overline{Q}. \tag{8}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist $\leqq 0$ [vgl. (VI) und (V)], also kann $\overline{W}$ zeitlich niemals zunehmen. $\overline{W}$ ist aber notwendig $\geqq 0$ und verschwindet für $t = 0$. Wir schließen daraus für jedes t:

$$\overline{W} = 0, \quad W = 0, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0,$$

also:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2, \quad \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2,$$

was zu beweisen war.

Der Beweisgang bleibt derselbe, wenn $\mathfrak{Q}$ im Endlichen liegt. Die Felder $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2$ sind jetzt nur innerhalb $\mathfrak{Q}$ definiert. Wir nehmen an, daß sie hier für $t = 0$ übereinstimmen. Außerdem müssen wir sie auf $\mathfrak{Q}$ der gleichen Randbedingung unterwerfen, da sie ja beide dasselbe Problem lösen sollen. Es genügt dazu, daß die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ (oder von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$) für jedes $t > 0$ gleich sind. Auch in diesem Falle verschwindet die rechte Seite von (7). Aus (8) folgt daraufhin (Überstreichung bedeutet jetzt Integration über das Innere von $\mathfrak{Q}$) $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$ für $t > 0$ und für das Innere von $\mathfrak{Q}$. Durch Anfangszustand und eine der genannten Grenzbedingungen auf $\mathfrak{Q}$ ist also auch jetzt das elektromagnetische Feld eindeutig bestimmt, bei übrigens beliebiger Verteilung der Materialkonstanten (Leiter, Dielektrika usw.) im Innern von $\mathfrak{Q}$. Wir können dabei auch anisotrope Körper zulassen; für diese sind nach (VI) W_e, W_m und Q positivdefinite Formen der Feldstärken, so daß unsere Schlußweise auch hier erhalten bleibt.

Es ist sehr bemerkenswert, daß der physikalisch-fundamentale Energiebegriff sich hier auch in mathematischer Hinsicht für die Zwecke des Eindeutigkeitsbeweises bewährt. Wir mögen darin ein Anzeichen

sehen für die tiefgehende Harmonie zwischen mathematischer und physikalischer Begriffsbildung.

Für die Schwingungsprobleme ist allerdings mit dem vorstehenden Beweis nicht viel gewonnen. Denn hier handelt es sich nicht um die Ausbreitung von einem gegebenen Anfangszustand aus, sondern um zeitlich periodisch wiederkehrende Zustände. Auch wird hier die Eindeutigkeit durch die Möglichkeit von Eigenschwingungen beeinträchtigt. Wohl aber ist der vorstehende Beweis lehrreich für die allgemeine Auffassung der Maxwellschen Gleichungen und für die kausale Bestimmtheit der durch sie dargestellten Vorgänge.

3. Zur mathematischen Behandlung von Schwingungszuständen. Die mathematische Behandlung rein periodischer Schwingungen wird sehr erleichtert durch den Gebrauch komplexer Größen. Es handle sich um ein Wechselfeld von der Schwingungsdauer τ, also von der „Kreisfrequenz“ (Schwingungszahl in 2π Zeiteinheiten) $\omega = 2\pi/\tau$. Dann setzen wir

$$\mathfrak{E} = Ee^{-i\omega t}, \quad \mathfrak{H} = He^{-i\omega t}, \tag{9}$$

mit der Verabredung, daß rechterhand eigentlich die reellen Teile gemeint sind. Die von t unabhängigen Ortsfunktionen E und H, die ebenso wie $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ Vektorcharakter haben, werden im allgemeinen komplexe Größen sein:

$$E = E_1 + iE_2, \quad H = H_1 + iH_2.$$

Wir nennen E und H die „komplexen Feldstärken“. Die Gl. (9) würden reell geschrieben lauten:

$$\mathfrak{E} = E_1 \cos\omega t + E_2 \sin\omega t, \quad \mathfrak{H} = H_1 \cos\omega t + H_2 \sin\omega t. \tag{10}$$

Es liegt aber auf der Hand, daß viel leichter mit den Ausdrücken (9) als mit (10) zu rechnen ist. Deshalb werden wir, wenn überhaupt, erst jedesmal am Schlusse der Rechnungen zu den reellen Teilen übergehen.

Die Bevorzugung von $-i\omega t$ vor $+i\omega t$ in (9) ist rein konventionell und belanglos, da es ja für die eigentlich gemeinten reellen Teile auf das Vorzeichen von i in keiner Weise ankommen kann; sie bietet aber gewisse Bequemlichkeiten, auf die wir sogleich zurückkommen werden.

Ein anschauliches Gegenstück zu unseren komplexen Darstellungen haben wir in den Vektordiagrammen der Wechselstromtechnik. Wenn hier Strom- und Spannungsgrößen je nach ihrer Phase in der Ebene der Zeichnung aufgetragen und vektoriell zusammengesetzt werden, so entspricht das vollkommen der Rechnung mit unseren komplexen Feldgrößen. Bekanntlich hat man das elektrotechnische Vektordiagramm um seinen Nullpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (unser ω) umgedreht zu denken; den Augenblickswert der dargestellten Größen erhält

man durch Projektion auf den horizontalen Durchmesser des Vektordiagramms. Wenn man in der Wechselstromtechnik von der gleichförmigen Umdrehung der Vektoren in der Regel absieht und sich nur für die relative Lage der Vektoren interessiert, so entspricht das dem Umstand, daß wir den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ in der Regel unterdrücken werden. Der Projektion der Vektoren auf den horizontalen Durchmesser der Figur entspricht bei uns offenbar die Bildung des reellen Teiles. Die Ebene des Vektordiagramms ist nichts anderes als die Gaußsche Ebene der komplexen Zahlen.

Eliminiert man aus den Maxwellschen Gl. (I) und (II) unter Benutzung der Relationen (V) und unter Voraussetzung der räumlichen Konstanz von ε, μ, σ die Feldstärke $\mathfrak{H}$, so erhält man für $\mathfrak{E}$ die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{E}=\Delta\mathfrak{E}. \tag{11}$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich für $\mathfrak{H}$ bei Elimination von $\mathfrak{E}$. Wir nennen (11) die „Wellengleichung“. Sie zeigt, daß die „Wellengeschwindigkeit“ gleich $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ ist und daß die Leitfähigkeit σ (vermöge der Jouleschen Wärmeproduktion) als Dämpfungsursache wirkt.

Setzen wir nun in (11) den Ausdruck (9) für $\mathfrak{E}$ ein, so entsteht die für alle monochromatischen Schwingungsvorgänge charakteristische Differentialgleichung:

$$\Delta u+k^2u=0,\quad k^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega}{c^2}; \tag{12}$$

hier kann u außer E auch H oder die komplexe Darstellung eines der anderen elektromagnetischen Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ usw. vertreten. Auch Gl. (12) werden wir „Wellengleichung“ (oder „Schwingungsgleichung“) nennen.

Die in (12) eingeführte Konstante k nennen wir „Wellenzahl“. Sie ist eine reziproke Länge. Im Vakuum ($\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$) wird nach (12):

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}. \tag{13}$$

Dabei ist λ definiert als der zur Schwingungsdauer τ gehörige Lichtweg: $\lambda=c\tau$. Die Bezeichnung „Wellenlänge“ für λ rührt bekanntlich daher, daß λ im einfachsten Falle der ebenen Welle zugleich die räumliche Periodizität des Schwingungsvorgangs ausmißt. (Bei allgemeineren Zuständen trifft diese Bedeutung von λ meist nur asymptotisch, in hinreichendem Abstand von der Quelle, zu.) In einem leitenden Medium ($\sigma\neq 0$), wo k^2 nach (12) komplex ist, wollen wir verabreden, daß von den beiden dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Werten von k immer derjenige gewählt werde, der einen positiv imaginären Bestandteil hat.

Eine nach der positiven x-Achse fortschreitende ebene Welle wird in komplexer Form dargestellt durch

$$u = A e^{ikx}. \tag{14}$$

Diese Aussage ist offenbar daran gebunden, daß wir den Zeitfaktor in der Form $e^{-i\omega t}$ angesetzt haben. Im Exponenten von e steht dann die Verbindung $kx - \omega t$, welche, konstant gesetzt, ein Vorschreiten des Schwingungszustandes nach der positiven x-Achse bei wachsendem t anzeigt. Der Faktor A faßt Amplitude a und Phasenkonstante α zusammen in der Form $A = a e^{i\alpha}$.

Die allgemeinste, nur von x abhängige Lösung der Gl. (12) lautet:

$$u = A e^{ikx} + B e^{-ikx}.$$

Hier stellt der zweite Summand eine nach der negativen x-Achse fortschreitende ebene Welle dar. Die Summe beider Terme bedeutet, insbesondere wenn $A = B$, eine stehende Welle.

Wir werden später (vgl. § 4, 2) sehen, daß diejenige Lösung von (12), welche eine vom Nullpunkt ($r = 0$) sich ausbreitende Kugelwelle bedeutet, dargestellt wird durch

$$u = A \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{15}$$

Eine nach dem Nullpunkt hin konvergierende Kugelwelle, die physikalisch keine Bedeutung hat, wäre entsprechend gegeben durch

$$u = B \frac{e^{-ikr}}{r};$$

beides natürlich wieder nur, wenn der Zeitfaktor in der Form $e^{-i\omega t}$ geschrieben wird. Darin, daß wir in den Gl. (14) und (15) die nach $+x$ oder $+r$ fortschreitende Welle mit $+i$ zu rechnen haben, liegt eine der oben genannten Bequemlichkeiten für unsere Schreibweise des Zeitfaktors.

Stets erhalten wir die Amplitude des Schwingungsvorgangs, wenn wir den absoluten Betrag (die „Norm“) dieser komplexen Darstellung bilden. Z. B. wird im Falle der ebenen Welle, Gl. (14), wo wir $A = a e^{i\alpha}$ setzten, bei Abwesenheit von Dämpfung (k reell):

$$|u| = |A|\,|e^{ikx}| = a. \tag{16}$$

Selbstverständlich ist die komplexe Schreibweise ohne weiteres nur zulässig im linearen Gebiet, nicht bei Produkten oder Quadraten; denn das Produkt der reellen Teile zweier komplexer Größen ist bekanntlich verschieden von dem reellen Teile ihres Produkts. Aber auch hier empfiehlt sich der Gebrauch des Komplexen insofern, als man den reellen Teil am übersichtlichsten als arithmetisches Mittel des komplexen und des konjugiert komplexen Ausdrucks berechnet.

Wir betrachten z. B. das Produkt zweier Schwingungsgrößen, die durch die (skalaren oder vektoriellen) komplexen Ausdrücke u und v gegeben sind, und fragen nach dem Zeitmittel des Produkts, auf das es praktisch meist allein ankommt. Wir bezeichnen das Zeitmittel mit $\overline{uv}$ und die konjugiert komplexen Ausdrücke mit $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$. Dann haben wir

$$uv = \tfrac{1}{2}(ue^{-i\omega t} + \tilde{u}e^{+i\omega t})\,\tfrac{1}{2}(ve^{-i\omega t} + \tilde{v}e^{+i\omega t})$$

und, da offenbar $e^{\pm 2i\omega t}$ im Mittel $= 0$ ist:

$$\overline{uv} = \tfrac{1}{4}(u\tilde{v} + v\tilde{u}). \tag{17}$$

Für $v = u$ folgt daraus noch einfacher:

$$\overline{u^2} = \tfrac{1}{2}uu = \tfrac{1}{2}|u|^2. \tag{18}$$

Hiervon macht die Elektrotechnik ausgiebigen Gebrauch beim Begriff des „effektiven Stromes“. Ist J die komplexe Darstellung eines Wechselstromvorganges, also der mit Richtung versehene Strom im Vektordiagramm, so ist $|J|$ die Stromamplitude, d. h. die Länge des Stromvektors. Andererseits definiert man

$$J_{\text{eff}}^2 = \overline{J^2}, \tag{19}$$

d. h. gleich dem quadratischen Mittelwert.

Nach Gl. (18) gilt also die Beziehung

$$|J| = \sqrt{2}\,J_{\text{eff}}. \tag{19'}$$

Setzt man ferner in (17) für u die komplexe Stromstärke J, für v die komplexe Spannung E, so wird $\overline{uv}$ gleich der Leistung N. Man erhält dann aus (17), wenn φ den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung bedeutet:

$$N = \tfrac{1}{4}(J\tilde{E} + E\tilde{J}) = \tfrac{1}{4}|J|\,|E|\,(e^{-i\varphi} + e^{+i\varphi}) = \tfrac{1}{2}|J|\,|E|\cos\varphi, \tag{20}$$

oder mit Rücksicht auf (19):

$$N = J_{\text{eff}}\,E_{\text{eff}}\cos\varphi. \tag{20'}$$

Wenn auch loser mit dem Vorhergehenden zusammenhängend, möge hier die formale Vereinfachung erwähnt werden, die man bei den Fourierreihen erzielt, wenn man statt der reellen trigonometrischen die komplexen Exponentialfunktionen benutzt. Gewöhnlich schreibt man die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^n (a_n \cos n x + b_n \sin n x),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\cos n\xi\, d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\sin n\xi\, d\xi,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, d\xi.$$

Vollkommen gleichbedeutend damit aber ist die einfachere Formel, in der das Glied mit $n = 0$ keine Ausnahmestellung mehr einnimmt:

$$(21) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, e^{-in\xi}\, d\xi,$$

oder auch

$$(21') \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, e^{in(x-\xi)}\, d\xi.$$

Der Zusammenhang zwischen unseren komplexen Koeffizienten c und den reellen a, b ist ersichtlich der folgende:

$$(21'') \qquad \left.\begin{array}{l} c_n = \dfrac{a_n - i b_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + i b_n}{2} \end{array}\right\} \cdots n > 0, \quad c_n = a_0 \cdots n = 0.$$

Bei einem Wechselstrom beliebiger Stromform wollen wir statt (21) und mit Rücksicht auf (21'') schreiben:

$$J(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(n)} c_n e^{in\omega t}, \quad c_{-n} = \tilde{c}_n.$$

Zur Berechnung des quadratischen Mittelwertes bildet man

$$J^2 = \frac{1}{4}\sum{}^{n}\sum{}^{m}\,(c_n e^{in\omega t} + \tilde{c}_n e^{-in\omega t})(c_m e^{im\omega t} + \tilde{c}_m e^{-im\omega t}).$$

Hier fallen bei der zeitlichen Mittelung alle Glieder fort, in denen das Produkt der Exponentialfunktionen nicht gleich 1 wird. Es bleibt daher die einfache Summe

$$(22) \qquad \bar{J^2} = \frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\,(c_n c_{-n} + 2\, c_n \tilde{c}_n + \tilde{c}_n \tilde{c}_{-n})$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\, c_n \tilde{c}_n = c_0^2 + 2\sum_{1}^{\infty}{}^{n} |c_n|^2.$$

Zur Bestimmung der Leistung N hat man im gleichen Falle $J(t)$ zu multiplizieren mit

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} e_m e^{im\omega t}, \quad e_{-m} = \tilde{e}_m$$

und zu bilden

$$N = \bar{J}\bar{E} = \frac{1}{4}\sum{}^{(n)}\,(c_n e_{-n} + c_n \tilde{e}_n + \tilde{c}_n e_n + \tilde{c}_n \tilde{e}_{-n})$$

$$= \frac{1}{2}\sum{}^{n}\,(c_n \tilde{e}_n + \tilde{c}_n e_n).$$

Bedeutet φ_n den Phasenwinkel zwischen der n-ten komplexen Teilspannung und dem n-ten komplexen Teilstrom, so wird ähnlich wie in (20)

$$(23)\quad N = \frac{1}{2}\sum^{(n)} |c_n|\,|e_n|\,(e^{-i\varphi_n} + e^{i\varphi_n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty{}(n)} |c_n|\,|e_n|\cos\varphi_n$$

$$= |c_0|\,|e_0|\cos\varphi_0 + 2\sum_{1}^{+\infty} |c_n|\,|e_n|\cos\varphi_n.$$

Beim Vergleich von (22), (23) mit (19), (20) hat man zu beachten, daß $|c_n|$ bzw. $|e_n|$ je die Hälfte der reellen Amplitude $|J_n|$ des n-ten Teilstroms bzw. der reellen Amplitude $|E_n|$ der n-ten Teilspannung bedeuten. Es ist nämlich nach (21″)

für $n>0$ $\quad |c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, für $n=0$ $\quad |c_0| = a_0$.

Wir schreiben daher:

$$|c_n| = \tfrac{1}{2}|J_n|, \quad |e_n| = \tfrac{1}{2}|E_n|, \quad |c_0| = |J_0|, \quad |e_0| = |E_0|$$

und haben statt (22) und (23)

$$(24)\quad \begin{cases} \overline{J^2} = |J_0|^2 + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1}^{\infty} |J_n|^2, \\ N = |J_0|\,|E_0|\cos\varphi_0 + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1}^{\infty} |J_n|\,|E_n|\cos\varphi_n. \end{cases}$$

Die erste Gleichung besagt mit Rücksicht auf (19) und (19′), daß das Quadrat des effektiven Gesamtstromes gleich ist der Summe der Quadrate der effektiven Teilströme. Die zweite Gleichung zeigt mit Rücksicht auf (20), daß die Gesamtleistung gleich ist der Summe der Leistungen aller Teilströme und zugehörigen Teilspannungen.

Auch in der Theorie der Fourierschen Integrale bewährt sich die komplexe Schreibweise. Wir ersetzen die übliche Formel [vgl. 1. Bd., S. 156, (11)]

$$(25)\quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi$$

durch die für manche Zwecke vorteilhaftere:

$$(26)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{i\alpha(x-\xi)}\,d\xi.$$

4. Elektronentheorie. Die Auffassung der Gl. (V) wird vertieft, wenn wir dieselben schreiben:

$$(\text{Va})\quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{J} = \Sigma\, \mathfrak{e}_i\, \mathfrak{v}_i.$$

Hier heißt $\mathfrak{P}$ die elektrische Polarisation oder das elektrische Moment der Volumeneinheit[1]), $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment der Volumeneinheit[1]) oder die Magnetisierung. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ werden hervorgerufen gedacht durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und sind daher diesen Größen proportional. Die Formel für $\mathfrak{J}$, in der die Summation über die Volumeneinheit[1]) zu erstrecken ist, zeigt, daß der Leitungsstrom als Konvektionsstrom bewegter Ladungen aufzufassen ist, in Metallen ebenso wie in Elektrolyten oder in ionisierter Luft. Die Gl. (Va) vermitteln den Übergang von der phänomenologischen zur atomistischen Darstellung der Elektrodynamik, d. h. zur Elektronentheorie.

Nach dieser ist ein Dielektrikum ($\varepsilon > 1$) vor dem leeren Raume ($\varepsilon = 1$) dadurch ausgezeichnet, daß in ihm Molekeln vorhanden sind, deren elektrische Elementarbestandteile durch das Feld $\mathfrak{E}$ verschoben werden, und zwar die entgegengesetzt geladenen in entgegengesetzter Richtung. Dadurch entstehen in den Molekeln elektrische Dipole, die sich zu dem resultierenden Moment $\mathfrak{P}$ zusammensetzen. Ebenso ist ein magnetisierbarer Körper ($\mu \gtrless 1$) vor dem Vakuum ($\mu = 1$) dadurch ausgezeichnet, daß in seinen Molekeln umlaufende elektrische Ladungen vorhanden sind, die als Elementarmagnete wirken und durch das Feld $\mathfrak{H}$ teilweise gerichtet werden. Die solcherweise in den Molekeln entstehenden magnetischen Momente setzen sich zu der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ zusammen. Nach derselben Vorstellungsweise entsteht ein Leitungsstrom $\mathfrak{J}$, wenn an der betreffenden Raumstelle bewegliche Ladungen vorhanden sind. In Nichtleitern, wo die Ladungen an die Molekeln gebunden sind, ist $\mathfrak{v} = 0$, also $\mathfrak{J} = 0$.

Statt der dritten Gl. (Va) schreiben wir auch

$$\text{(Vb)} \qquad \mathfrak{J} = \varrho\,\mathfrak{v},$$

wo ϱ die Raumdichte der Ladungen ist, indem wir voraussetzen, daß alle Ladungen der betrachteten Stelle gleiche Geschwindigkeit haben.

Die Elektronentheorie eignet sich nun weiterhin die atomistische Vorstellung an, daß die Ladungen nur in der Größe des elektrischen Elementarquantums $e = \pm 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ (in konventionellen elektrischen Einheiten) vorhanden sind, nämlich als positives Elektron oder Proton bzw. als negatives Elektron, Elektron im engeren Sinne. Es muß aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß diese wichtigste elektrodynamische Tatsache weder in den ursprünglichen Maxwellschen Grundgleichungen, noch in den Grundvorstellungen der Elektronentheorie organisch enthalten ist, daß also bisher „das Elektron ein Fremdling

[1]) Mit dieser abgekürzten Ausdrucksweise meint man bekanntlich: Man bilde die betreffende Größe für ein Volumenelement $d\tau$, welches zwar groß ist gegenüber den Molekulardimensionen, aber so klein, daß in ihm das beobachtbare elektromagnetische Feld als homogen angesehen werden kann, und dividiere durch $d\tau$.

in der Elektrodynamik ist“ (Einstein). Dieser Umstand zeigt mehr als alles andere, daß die gegenwärtige Grundlegung der Elektrodynamik in physikalischer Hinsicht noch keine endgültige sein kann, wenn sie auch in mathematischer Hinsicht allen Ansprüchen genügt.

§ 2. Invarianz der Maxwellschen Gleichungen gegenüber Lorentztransformationen.

Indem die Elektronentheorie die elektrodynamischen Eigenschaften der Materie durch bewegte oder bewegliche Elektronen erklärt, rechnet sie mit einem einheitlichen Medium, dem leeren Raume (dem „reinen Äther“). Für diesen ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Die Grundgleichungen des § 1 lauten dann einfach, wenn wir für $\mathfrak{Z}$ den Ausdruck (Vb) substituieren:

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \qquad \text{(III)}\quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0,$$

$$\text{(II)}\quad \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{E}} + \varrho\mathfrak{v}) = +\operatorname{rot}\mathfrak{H}, \qquad \text{(IV)}\quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho.$$

Um in die Bauart dieser Gleichungen einzudringen und zugleich ihre Integration vorzubereiten, zeigen wir, daß sie eine Gruppe von Transformationen in sich zulassen. Wir folgen damit den Richtlinien, die F. Klein in seinem „Erlanger Programm“ zunächst für die verschiedenen geometrischen Disziplinen gegeben und die er dann selbst auf Mechanik und Relativitätstheorie ausgedehnt hat.

1. Einführung der elektrodynamischen Potentiale. Wir genügen der Gl. (III), indem wir setzen

$$\text{(1)}\qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{A}$ heißt „Vektorpotential“. Gl. (I) schreibt sich dann so:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{E}\right) = 0.$$

Die in der Klammer stehende Größe ist also ein wirbelfreier Vektor und als solcher der Gradient einer skalaren Funktion. Wir nennen diese $-\varphi$ und haben

$$\text{(2)}\qquad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi.$$

φ heißt „skalares Potential“. Tragen wir (2) in (IV) bzw. (II) ein, so entsteht

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathfrak{A}} + \Delta\varphi = -\varrho,$$

$$\text{(4)}\qquad -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\dot{\varphi} + \frac{1}{c}\varrho\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A};$$

vgl. wegen der letzten Umformung 1. Bd., S. 69, (27). Man beachte dabei, daß diese Umformung nur gültig ist bei Benutzung rechtwinkliger (nicht krummliniger) Komponenten von $\mathfrak{A}$.

Wir können die beiden letzten Gleichungen übersichtlicher gestalten, wenn wir die Potentiale $\mathfrak{A}$ und φ einer Zusatzbedingung unterwerfen, durch die sie erst eindeutig bestimmt werden. Wir setzen nämlich

$$\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0. \tag{5}$$

Dann fallen in (4) die Gradienten beiderseits fort und (4) geht in eine reine Differentialgleichung für $\mathfrak{A}$ über:

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} = -\varrho\frac{\mathfrak{v}}{c}. \tag{4'}$$

Ebenso geht (3) in eine reine Differentialgleichung für φ über:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\varrho. \tag{3'}$$

Die linken Seiten beider Gl. (3') und (4') haben jetzt die Form der „Wellengleichung“ im Sinne von § 1, (11).

Der wahre Sinn dieser Beziehungen kommt aber erst zum Vorschein, wenn wir mit Minkowski[1]) die vierdimensionale Symmetrie zwischen Raum- und Zeitkoordinaten zum Ausdruck bringen. Wir benutzen ein rechtwinkliges Raumsystem $x\,y\,z$ und als vierte Koordinate den imaginären „Lichtweg“ $i\,c\,t$. Diese vier Koordinaten nennen wir auch der Reihe nach x_1, x_2, x_3, x_4 und definieren durch sie den vierdimensionalen „Koordinatenvektor“. Sodann fassen wir das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und das mit i multiplizierte skalare Potential zu einem „Viererpotential“ $\boldsymbol{\Phi}$ zusammen, ebenso die Größen $\varrho\frac{\mathfrak{v}}{c}$ und $i\varrho$ zu einem „Viererstrom“ P. Die Komponenten von $\boldsymbol{\Phi}$ und P nach den Koordinaten x_k mögen $\boldsymbol{\Phi}_k$ und P_k heißen; sie bedeuten Projektionen auf die Koordinatenachsen wie beim dreidimensionalen Vektor. Wir haben also drei „Vierervektoren“ eingeführt, deren Komponenten aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich sind.

Tabelle 1.

k	1	2	3	4
x_k	x	y	z	ict
$\boldsymbol{\Phi}_k$	$\mathfrak{A}_x$	$\mathfrak{A}_y$	$\mathfrak{A}_z$	$i\varphi$
P_k	$\varrho\frac{\mathfrak{v}_x}{c}$	$\varrho\frac{\mathfrak{v}_y}{c}$	$\varrho\frac{\mathfrak{v}_z}{c}$	$i\varrho$

[1]) Vgl. insbesondere die posthume Arbeit in Ann. d. Phys. **47**, 927, 1915.

Indem wir die einfachsten Vektoroperationen auf solche Vierervektoren übertragen, definieren wir als „Divergenz des Vierervektors“ die skalare Größe

$$\text{(6a)} \qquad \mathrm{Div}\,\Phi = \sum_1^4{}^{(k)} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k},$$

ferner als „Rotor“ $\mathrm{Rot}\,\Phi$ eine sechskomponentige Größe, einen „Sechservektor“ oder „antisymmetrischen Tensor“, mit den Komponenten

$$\text{(6b)} \qquad \mathrm{Rot}_{kh}\Phi = \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_h}, \qquad k, h = 1, 2, 3, 4,$$

endlich als „vierdimensionale Deltaoperation“ in einer schon von Cauchy gebrauchten Symbolik:

$$\text{(6c)} \qquad \square = \sum_1^4{}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Daraufhin fassen sich die Gl. (3′) und (4′) zusammen zu:

$$\text{(7)} \qquad \square \Phi = -P.$$

Die Zusatzbedingung (5) schreibt sich:

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Div}\,\Phi = 0$$

und die Gl. (1) und (2) können einheitlich dargestellt werden durch

$$\text{(9)} \qquad (\mathfrak{H}, -i\mathfrak{E}) = \mathrm{Rot}\,\Phi.$$

Bevor wir auf die weittragenden Folgerungen dieser überraschend schönen Darstellung eingehen, müssen wir einschaltungsweise die Struktur des Sechservektors in Gl. (9) erläutern.

2. Der Sechservektor des Feldes. Wir wollen uns vorstellen, daß das elektrische und magnetische Feld nur verschiedene Seiten einer umfassenden vierdimensionalen Feldgröße f sind. Die Zuordnung ihrer Komponenten f_{kh} zu den Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zeigt das folgende Schema:

Tabelle 2.

k \ h	1	2	3	4
1	0	f_{12}	f_{13}	f_{14}
2	f_{21}	0	f_{23}	f_{24}
3	f_{31}	f_{32}	0	f_{34}
4	f_{41}	f_{42}	f_{43}	0

$=$

k \ h	1	2	3	4
1	0	$+\mathfrak{H}_z$	$-\mathfrak{H}_y$	$-i\mathfrak{E}_x$
2	$-\mathfrak{H}_z$	0	$+\mathfrak{H}_x$	$-i\mathfrak{E}_y$
3	$+\mathfrak{H}_y$	$-\mathfrak{H}_x$	0	$-i\mathfrak{E}_z$
4	$+i\mathfrak{E}_x$	$+i\mathfrak{E}_y$	$+i\mathfrak{E}_z$	0

Hierzu die folgenden Bemerkungen:

1. Das Schema ist antisymmetrisch, d. h. es gilt

$$f_{kh} = -f_{hk} \quad \text{und daher} \quad f_{kk} = 0.$$

Die zunächst 16 Komponenten des „Tensors zweiten Ranges“ reduzieren sich daher auf sechs.

2. Die Doppelindizierung von f_{kh} zeigt an, daß die Komponentenbildung hier nicht wie beim Vierervektor in der Projektion auf eine Koordinatenachse besteht, sondern in der Projektion auf eine der sechs Koordinatenebenen. Dementsprechend ist das geometrische Sinnbild des Sechservektors nicht eine Strecke, sondern ein Ebenenstück [bzw. im allgemeinen zwei zueinander normale Ebenenstücke][1]).

3. Die Doppelindizierung bei $\mathfrak{H}$ ist insofern sinngemäß, als $\mathfrak{H}$ nicht ein polarer, sondern schon dreidimensional betrachtet ein axialer Vektor ist. $\mathfrak{H}_z$ bedeutet also eigentlich nicht eine Komponente nach der z-Achse, sondern in der $x\,y$-Ebene. Dem entspricht gerade unsere Doppelindizierung (f_{12} oder auch $\mathfrak{H}_{xy}$). Die Vorzeichenzuordnung wird dann durch die zyklische Folge der Indizes 1, 2, 3 geregelt, z. B. $\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_{zx} = -\mathfrak{H}_{xz} = f_{31} = -f_{13}$.

4. Während also $\mathfrak{H}$ durch die Raum-Raum-Komponenten, wird $\mathfrak{E}$ durch die Raum-Zeit-Komponenten von f gegeben. Die imaginäre Einheit in der Formel $i\mathfrak{E}_k = f_{4k}$, $k = x, y, z$ bzw. 1, 2, 3 entspricht dabei dem imaginären Charakter der Zeitkoordinate überhaupt.

5. Nunmehr verifiziert man unmittelbar, daß Gl. (9) die beiden Darstellungen (1) und (2) zusammenfaßt. Statt Gl. (9) können wir nämlich jetzt mit Rücksicht auf (6 b) deutlicher schreiben:

$$f_{kh} = \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_h} \tag{9 a}$$

und haben dann nach Tabelle 2 und 1 z. B.:

$$\mathfrak{H}_z = f_{12} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = \mathrm{rot}_z \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{E}_x = -if_{41} = -i\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

was bzw. mit (1) und (2) übereinstimmt.

6. Auch die in den Feldkomponenten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ geschriebenen Gl. (I) bis (IV) nehmen jetzt eine symmetrisch-vierdimensionale Form an. Sie lassen sich nämlich folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{cases} \text{(II)} + \text{(IV)} \text{ in } \cdots \sum \dfrac{\partial}{\partial x_h} f_{kh} = P_k, \\ \text{(I)} + \text{(III)} \text{ in } \cdots \sum \dfrac{\partial}{\partial x_k} f_{lm} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

In der ersten Gleichung wird nach h von 1 bis 4 summiert und k festgehalten, in der zweiten Gleichung wird h festgehalten, $k\,l\,m$ be-

[1]) Vgl. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **32**, 749, 1910, § 1.

deuten in zyklischer Folge die drei übrigen Indizes aus der Reihe 1, 2, 3, 4 nach Fortstreichung von h. Z. B. lautet die zweite Gleichung für $h = 1$ ausgeschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} f_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4} f_{23} = -i\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) - \frac{i}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}$$
$$= -i\left(\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}\right)_x$$

und dies liefert, gleich Null gesetzt, in der Tat die x-Komponente von Gl. (I).

Die in den Gl. (II) + (IV) bzw. (I) + (III) vorgenommenen Differentiationen bedeuten wieder eine Art Divergenzbildung („Vektordivergenz" oder nach Einstein „Verjüngung der Erweiterung des Feldtensors").

7. Auch die ursprünglichen Maxwellschen Gleichungen lassen eine entsprechende vierdimensionale Formulierung zu. Man muß dann aber zwei Sechservektoren einführen, die wir so definieren:

$$(\mathfrak{H}, -i\mathfrak{D}) = f_{ik}, \quad (\mathfrak{B}, -i\mathfrak{E}) = g_{ik} \tag{11}$$

und muß den Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ durch eine vierte Komponente $\mathfrak{J}_4 = i\varrho$ zu einem Vierervektor ergänzen. Dann schreiben sich die Gl. (I) bis (IV) des § 1:

$$\begin{cases} \text{(II) + (IV)} \cdots \sum \frac{\partial}{\partial x_h} f_{kh} = \mathfrak{J}_k, \\ \text{(I) + (III)} \cdots \sum \frac{\partial}{\partial x_k} g_{im} = 0 \end{cases} \tag{10a}$$

bei gleicher Bedeutung der Indizes wie in (10). Die zunächst überraschende Zusammenordnung der Größen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ einerseits, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ andererseits erläutert Mie[1]) durch die Bezeichnungen „Quantitätsgrößen" und „Intensitätsgrößen".

3. Die Gruppe der orthogonalen Transformationen. Die Vektorschreibweise in der gewöhnlichen (klassischen) Physik hat keinen anderen Zweck, als die Unabhängigkeit der Gleichungen von der Wahl der Koordinaten x, y, z zu veranschaulichen. Der Übergang von einem zu einem anderen rechtwinkligen Koordinatensystem wird vermittelt durch eine dreidimensionale orthogonale Transformation. Gleichungen, welche nicht invariant oder kovariant sind gegenüber diesen Tansformationen, sind physikalisch sinnlos.

Unsere Gl. (7) bis (9) lassen nun aber unmittelbar erkennen, daß die Maxwellschen Gleichungen nicht nur invariant sind gegenüber den dreidimensionalen orthogonalen Transformationen der x, y, z, sondern auch gegenüber den vierdimensionalen orthogonalen Transformationen

[1]) Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. 1912 und 1913, insbesondere erste Mitteilung, ebenda **37**, 511, 1912.

der x_1, x_2, x_3, x_4. Eine vierdimensionale orthogonale Transformation wird definiert durch die Invarianz des Abstandsquadrates eines beliebigen „Weltpunktes“ („Raumzeitpunktes“) vom Ursprunge 0000:

$$\sum x_i^2 = \sum x_i'^2$$

(Pythagoras in vier Dimensionen!) oder durch die Invarianz des „Linienelementes“ (Abstandes zweier benachbarter Punkte):

$$ds^2 = \sum dx_i^2 = \sum dx_i'^2$$

und wird dargestellt durch das folgende Schema:

Tabelle 3.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
x_4'	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}

mit den Relationen:

$$\text{(11a)} \qquad \begin{cases} \sum_{h=1}^{h=4} \alpha_{kh}^2 = 1, & \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{kh}^2 = 1, \\ \sum_{h=1}^{h=4} \alpha_{kh}\alpha_{lh} = 0, & \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{kh}\alpha_{kl} = 0. \end{cases}$$

Wir definieren nun als Vierervektor jedes Quadrupel von Größen, das sich beim Wechsel der Koordinaten ebenso transformiert wie der Koordinatenvektor selbst, also nach dem vorstehenden Schema 3. Es soll z. B. gelten:

$$\text{(12)} \qquad \Phi_k' = \sum_{h=1}^{h=4} \alpha_{kh}\Phi_h, \quad P_k' = \sum_{h=1}^{h=4} \alpha_{kh} P_h.$$

Ferner definieren wir als Sechservektor ein Sextupel von Größen, das sich transformiert nach dem Schema:

$$\text{(13)} \qquad f_{hk}' = \sum_l \sum_m^{(m>l)} \begin{vmatrix} \alpha_{hl} & \alpha_{hm} \\ \alpha_{kl} & \alpha_{km} \end{vmatrix} f_{lm}$$

Man leitet diese Formel aus der vorhergehenden ab, indem man etwa zunächst einen speziellen Sechservektor, nämlich den Produkttensor $T_{hk} = \Phi_h \Phi_k$ betrachtet, dessen Transformation durch diejenige des Vierervektors Φ bereits festgelegt ist. Aus der so entstehenden Transformation von T_{hk} folgt die für den Sechservektor f_{hk}, wenn man berücksichtigt, daß $f_{hk} = -f_{kh}$.

Daraufhin erkennen wir sofort, daß die Gl. (7) bis (9) erhalten bleiben beim Übergang zu einem beliebigen „gestrichenen“ System, und

zwar auf Grund derselben Rechnungen, welche im 1. Bd., S. 68 angedeutet wurden. Insbesondere rechnet man leicht nach, daß $\square = \square'$ eine invariante Differentialoperation ist, daß auch $\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{Div}'\,\boldsymbol{\Phi}'$ invariant ist und daß sich $\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{\Phi}$ transformiert wie ein Sechservektor. Das Entsprechende zeigt man auch auf Grund der Definitionen (12) und (13) für die ursprünglichen Feldgleichungen in der Form (10) oder (10a).

Da die somit nachgewiesene Invarianz kein Zufall sein kann, sondern im tiefsten Wesen der Elektrodynamik begründet sein muß, schließen wir: Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem (keinen absoluten Äther); alle zueinander orthogonalen vierdimensionalen Koordinatensysteme sind unter sich gleichberechtigt. Insbesondere pflanzen sich elektrodynamische Schwingungen im Vakuum in jedem Bezugssystem mit der Lichtgeschwindigkeit c fort, und zwar unabhängig von dem Bewegungszustand des Emissionszentrums (Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit).

4. Die spezielle Lorentz-Transformation. In der allgemeinen orthogonalen Transformation (allgemeine Drehung im vierdimensionalen Raum) steckt natürlich im besonderen die spezielle dreidimensionale Drehung. Da uns diese nicht interessiert, setzen wir voraus $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$. Das Transformationsschema lautet dann:

Tabelle 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1'	α_{11}	0	0	α_{14}
x_2'	0	1	0	0
x_3'	0	0	1	0
x_4'	α_{41}	0	0	α_{44}

Schreiben wir abkürzend $\alpha_{11} = \alpha$ und, dem imaginären Charakter von x_4 Rechnung tragend, $\alpha_{14} = i\alpha\beta$, so liefern die Orthogonalitätsbedingungen (11)

$$\alpha_{44} = \pm\alpha, \quad \alpha_{41} = \mp i\alpha\beta, \quad \alpha^2(1-\beta^2) = 1, \quad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

bevorzugen wir ferner überall das obere Vorzeichen, was keine Einschränkung ist, so lauten die Transformationsgleichungen:

$$(14) \qquad \begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x_2' = x_2, \\ x_4' = \dfrac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x_3' = x_3 \end{cases}$$

oder beim Übergang zu den Koordinaten x, y, z, t:

$$(14a) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - \beta c t}{\sqrt{1-\beta^2}}, & y' = y, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}}, & z' = z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lehren, daß das gestrichene Koordinatensystem gegen das ungestrichene mit der konstanten Geschwindigkeit

$$(14b) \qquad v = \beta c$$

in Richtung der positiven x-Achse fortschreitet. Machen wir nämlich $x' = \text{konst}$, so folgt aus $dx' = 0$ nach der ersten Gl. (14a)

$$\frac{dx}{dt} = \beta c.$$

Andererseits zeigt die zweite Gl. (14a), daß dann auch die Zeit mitzutransformieren ist, daß also $t' \neq t$ ist.

Indem wir (14b) in (14a) eintragen, entsteht die übliche Form der „Lorentz-Transformation“ und ihre Umkehrung:

$$(15) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, & y = y', \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1-\beta^2}}, & t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, & z = z'. \end{cases}$$

Durch den Grenzübergang $c = \infty$, $\beta = 0$ fallen wir auf die „Galilei-Transformation“ der klassischen Mechanik zurück:

$$(15a) \qquad \begin{cases} x' = x - vt & x = x' + vt' & y = y', \\ t' = t & t = t' & z = z'. \end{cases}$$

Die uns geläufige Vorstellung der absoluten Zeit ($t = t'$) ist also nur bedingt durch die Größe der Lichtgeschwindigkeit c und nur näherungsweise richtig.

Es ist hier nicht der Ort, die Fülle der Folgerungen zu ziehen, die aus den Gl. (15) für die Kinematik der Relativitätstheorie fließen: Die Relativierung der Gleichzeitigkeit, die Lichtgeschwindigkeit c als obere Grenze jeder materiellen Bewegung ($\beta < 1$), die Lorentz-Kontraktion (eine im „bewegten“ System gemessene „Ruhlänge“ erscheint vom „ruhenden“ System aus verkürzt um $\sqrt{1-\beta^2}$), die Einstein-Zeitdilation (eine im „bewegten“ System gemessene Zeit erscheint vom „ruhenden“ System aus verlängert um $1/\sqrt{1-\beta^2}$, z. B. eine Schwingungsdauer nach Rot verschoben), das Additionstheorem der Geschwindigkeiten, der

Michelson-Versuch u. a. m. Nur gewisse Folgerungen elektrodynamischer Art müssen hier erwähnt werden.

Zunächst transformiert sich der Vierervektor $\Phi = (\mathfrak{A}, i\varphi)$ wie unser Koordinatenvektor x. Wir haben also nach (14)

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\mathfrak{A}_x - \beta\varphi), & \mathfrak{A}_y' = \mathfrak{A}_y, \\ \varphi' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\varphi - \beta\mathfrak{A}_x), & \mathfrak{A}_z' = \mathfrak{A}_z. \end{cases}$$

Die Scheidung in skalares und Vektorpotential hängt also vom Standpunkt des Beobachters ab; zu $\mathfrak{A}_x'$ trägt ebensowohl φ wie $\mathfrak{A}_x$ bei usw.

Was sodann die Transformation des Feldes $f = (\mathfrak{H}, -i\mathfrak{E})$ betrifft, so ist diese allgemein in Gl. (13) enthalten. Spezialisieren wir auf die besonderen Verhältnisse der Lorentz-Transformation mit der x-Achse als Bewegungsrichtung, so haben wir alle α_{kh} gleich Null zu setzen mit Ausnahme von

$$\alpha_{11} = \alpha_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha_{14} = -\alpha_{41} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$$

und finden leicht:

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_x' = \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y' = \dfrac{\mathfrak{H}_y + \beta\mathfrak{E}_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \mathfrak{H}_z' = \dfrac{\mathfrak{H}_z - \beta\mathfrak{E}_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathfrak{E}_x' = \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y' = \dfrac{\mathfrak{E}_y - \beta\mathfrak{H}_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \mathfrak{E}_z' = \dfrac{\mathfrak{E}_z + \beta\mathfrak{H}_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

Elektrisches und magnetisches Feld bilden eine Einheit und sind nur relativ zum benutzten Bezugssystem voneinander zu scheiden. Beim Wechsel des Bezugssystems tragen die elektrischen Komponenten zu den magnetischen bei und umgekehrt. Ist z. B. in einem System $\mathfrak{H} = 0$, das Feld also elektrostatisch, so stellt der Beobachter im anderen System außer der elektrischen auch die magnetische Seite des Phänomens fest. (Geometrisches Analogon: Von einem Würfel sieht man bei Draufsicht nur die Vorderseite, bei schiefer Blickrichtung auch die Seitenfläche.)

Z. B. sei das Feld im ungestrichenen System das eines ruhenden Elektrons:

$$4\pi\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\frac{e}{r}, \quad \mathfrak{H} = 0.$$

Wegen des Faktors 4π vgl. Gl. (1) in § 1. Dann wird nach (17) für das gestrichene System, in dem sich das Elektron nach der negativen x-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt:

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}'_x = \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{E}_{y,z} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathfrak{E}_{y,z}, \\ \mathfrak{H}'_x = 0, \quad \mathfrak{H}'_y = \dfrac{\beta\,\mathfrak{E}_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{v\,e\,z}{4\pi c r^3\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \qquad\qquad \mathfrak{H}'_z = \dfrac{-\beta\,\mathfrak{E}_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{-v\,e\,y}{4\pi c r^3\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

Daraus folgt: Die magnetischen Kraftlinien verlaufen in Kreisen um die Bewegungsrichtung, ihre Intensität H ist:

$$(18a)\qquad 4\pi H = \frac{v\,e}{c r^2\sqrt{1-\beta^2}},$$

die elektrischen Krattlinien verlaufen im gestrichenen wie im ungestrichenen System als Gerade von dem jeweiligen Ort des Elektrons aus, sind aber nach der Medianebene ($x = 0$) des Elektrons zusammengedrängt, derart, daß sie für $\beta = 1$ ganz auf diese Ebene beschränkt sind. Indem man nämlich in (18) die Koordinaten x, y, z nach (15) durch x', y', z' ausdrückt und beispielsweise $t' = 0$ wählt, erhält man:

$$(18b)\qquad \begin{cases} 4\pi\,\mathfrak{E}'_x = \dfrac{e\,x'}{r^3\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 4\pi\,\mathfrak{E}'_y = \dfrac{e\,y'}{r^3\sqrt{1-\beta^2}}, \\ 4\pi\,\mathfrak{E}'_z = \dfrac{e\,z'}{r^3\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad r^2 = \dfrac{x'^2}{1-\beta^2} + y'^2 + z'^2. \end{cases}$$

Hiernach ist die Bestimmung des Feldes einer gleichförmig bewegten Ladung in der Relativitätstheorie lediglich eine Angelegenheit algebraischer Transformation, während sie in der älteren Elektrodynamik immerhin einige Integrationsumstände machte. Über das Feld einer beschleunigten Ladung werden wir im nächsten Paragraphen handeln.

Wir können die Gl. (17) noch etwas vereinfachen und verallgemeinern, wenn wir sie von der besonderen Wahl der x-Achse als Bewegungsrichtung loslösen. Bedeutet „longitudinal“ die Richtung parallel zur relativen Bewegung, „transversal“ eine Richtung senkrecht dazu, so werden die Gl. (17) gleichbedeutend mit der folgenden Darstellung:

$$(19)\qquad \begin{cases} \text{Longit.} & \text{Transvers.} \\ \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}, & \mathfrak{E}' = \dfrac{\mathfrak{E} + \dfrac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}, & \mathfrak{H}' = \dfrac{\mathfrak{H} - \dfrac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

Die im Zähler der transversalen Formeln stehenden Ausdrücke sind besonders wichtig. Sie stellen nämlich nach Lorentz die ponde-

romotorische Kraft dar, die auf die bewegte Einheitsladung bzw. den bewegten Einheitspol wirken.

Um diese Kräfte in vierdimensionaler Systematik einzuführen, nennen wir $\mathfrak{F}$ die elektrodynamische Kraft pro Volumeneinheit und stellen sie dar durch den Vierervektor:

$$(20) \qquad \mathfrak{F} = Pf \text{ mit den Komponenten } \mathfrak{F}_k = \sum_{h=1}^{h=4} P_h f_{kh}.$$

In der Tat bestätigt man, daß allgemein das Produkt eines Vierer- mit einem Sechservektor wieder ein Vierervektor ist und daß in unserem besonderen Falle die drei ersten Komponenten von $\mathfrak{F}$ mit $\varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}\right)$ identisch werden, z. B.

$$(20a) \qquad \mathfrak{F}_x = \varrho\left\{\frac{1}{c}\,(\mathfrak{v}_x \cdot 0 + \mathfrak{v}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{H}_y) + \mathfrak{E}_x\right\}.$$

Wir konstatieren also, daß Lorentz in seinem (auf die Volumeneinheit bezogenen) Ausdruck der ponderomotorischen Kraft gerade eine relativistisch sinnvolle Kovariante getroffen hat, wie überhaupt die Lorentzsche Elektronentheorie der legitime Vorläufer der Relativitätstheorie war. Größen, welche nicht Vektor- oder Tensorcharakter im Sinne der Lorentz-Gruppe besitzen bzw. invariant sind, haben überhaupt keine physikalische Bedeutung.

Es ist interessant, auch die vierte zeitliche Komponente des Ausdrucks (20) zu bilden. Sie lautet:

$$(20b) \qquad \mathfrak{F}_4 = \frac{i\,\varrho}{c}\,(\mathfrak{v}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{v}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{v}_z \mathfrak{E}_z)$$

und bedeutet die mit i/c multiplizierte, an der Volumeneinheit pro Zeiteinheit geleistete elektrische Arbeit. Den drei dynamischen oder ponderomotorischen Komponenten ordnet sich also als vierte eine imaginäre energetische Komponente zu. Auch dies ist ein charakteristischer Zug der vierdimensionalen „Weltphysik".

Hier würde sich naturgemäß die vierdimensionale Einordnung der Begriffe Energiedichte und Energiefluß anschließen. Es würde sich dabei zeigen, daß diese keine selbständigen Größen sind, sondern Bestandteile eines umfassenderen Tensors, des Spannungsenergietensors, dessen Divergenz wieder mit der Kraft $\mathfrak{F}$ zusammenhängt. Indessen würde uns dies zu weit führen. Wir begnügen uns daher, festzustellen: Der hier eingeschlagene Weg über die Invarianz der Maxwellschen Gleichungen ist ein wahrer Königsweg in das Gebiet der Relativitätstheorie und in die feineren Zusammenhänge der Elektrodynamik.

§ 3. Retardierte Potentiale und Feld einer beschleunigten Ladung.

Wir wenden uns zur Integration der Maxwellschen Gleichungen für den Fall einer beliebig bewegten Ladung. Dabei werden wir reichlichen Gebrauch machen von der vierdimensionalen Symmetrie der Gleichungen.

1. Darstellung des Viererpotentials Φ. Die Differentialgleichung (7) in § 2 stellt uns vor ein Problem der vierdimensionalen Potentialtheorie, das wir wie das entsprechende dreidimensionale lösen werden, nämlich mit Hilfe des Greenschen Satzes. Dabei tun wir zunächst so, als ob die vierte Koordinate x_4, so wie die drei ersten, reell wäre. Der Greensche Satz für vier Dimensionen lautet [vgl. die analoge Gl. (34) im 1. Bd., S. 73]:

$$\int (u \,\square\, v - v \,\square\, u)\, d\Sigma = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{1}$$

Links ist über ein vierdimensionales Gebiet Σ zu integrieren, rechts über die dreidimensionale Begrenzung S desselben, n ist die nach außen gerichtete Normale auf S.

Wir suchen zuvörderst das vierdimensionale Analogon zum Newtonschen Potential $v = 1/r$, d. h. eine punktsymmetrische Lösung der Gleichungen $\square v = 0$. Diese lautet[1]), wenn x_i' einen festen, x_i den variablen Weltpunkt bedeutet:

$$v = \frac{1}{R^2}, \qquad R^2 = \sum_{k=1}^{k=4} (x_k - x_k')^2.$$

Wir setzen dies in (1) ein und haben dann den Punkt O, $x_k = x_k'$, von dem Integrationsgebiet Σ auszuschließen, indem wir ihn etwa mit einer dreidimensionalen Kugel K umgeben. Gleichzeitig setzen wir $u = \Phi$. Aus (1) entsteht dann wegen der Differentialgleichungen für v und u

$$\int \frac{P}{R^2} d\Sigma = \int_K \left(\Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) dS. \tag{2}$$

Rechterhand hätten wir außer über K noch über eine den Integrationsraum im Unendlichen abschließende Fläche zu integrieren. Wir dürfen annehmen, daß die letztere im Limes keinen Beitrag liefert.

---

[1]) Allgemein wird im Raume von n Dimensionen die entsprechende Lösung der Potentialgleichung $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$:

$$u = \frac{1}{R^{n-2}}, \qquad R^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_k')^2.$$

Man bestätigt dies unmittelbar durch Differentiation.

Die Kugel K ziehen wir auf den Punkt O zusammen. Dabei nimmt das Element dS wie R^3 ab, während andererseits

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R^2} = -\frac{2}{R^3}\frac{\partial R}{\partial n} = +\frac{2}{R^3}$$

entsprechend zunimmt. Das Glied mit $\partial\Phi/\partial n$ verschwindet für $R = 0$, für Φ dürfen wir den Wert Φ_0 in O setzen. Aus (2) wird also

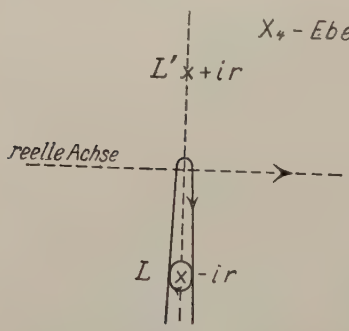
$$2\Phi_0\omega = \int \frac{P}{R^2}\,d\Sigma. \tag{2a}$$

Hier bedeutet ω die Oberfläche der Einheitskugel im vierdimensionalen Raume. Diese ist[1]) gleich $2\pi^2$. Gl. (2a) geht also über in die definitive Formel

$$4\pi^2\Phi_0 = \int \frac{P}{R^2}\,d\Sigma, \tag{3}$$

welche ganz analog ist zur Fundamentalformel der dreidimensionalen Potentialtheorie [1. Bd., S. 470, Gl. (3)]. Sie stellt uns den Wert von Φ in dem beliebigen Raumzeitpunkt O mit den Koordinaten x_1', x_2', x_3', x_4' dar; dabei können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Zeitskala so wählen, daß $x_4' = 0$ wird.

Fig. 33.



Formel (3) bedarf aber noch für unsere Zwecke einer wesentlichen Modifikation. Ort und Geschwindigkeit der Ladung sind uns gegeben für reelle Werte von t, und zwar für $t < 0$, d. h. für alle dem Zeitpunkt $t' = 0$, für den wir Φ berechnen wollten, vorhergehenden Zeiten. Die zugehörigen Werte $x_4 = ict$ sind negativ imaginär. Wir kennen also die Größe P nicht für reelle, sondern nur für negativ imaginäre Werte x_4. Deshalb werden wir die

[1]) Zum Beweis betrachte man das über den unendlichen vierdimensionalen Raum erstreckte Integral

$$J = \iiiint dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,e^{-\sum_1^4 x_k^2}.$$

Dieses ist nach Bd. 1, S. 28, Gl. (21) gleich der vierten Potenz von $\sqrt{\pi}$, also gleich π^2. Andererseits erhält man durch Einführung vierdimensionaler Polarkoordinaten:

$$J = \omega\int_0^\infty R^3 e^{-R^2}\,dR = \frac{\omega}{2},$$

mithin $\omega = 2\pi^2$, was zu beweisen war. Das entsprechende Verfahren läßt sich auf die Einheitskugel im n-dimensionalen Raume ausdehnen.

Integration nach x_4 von der reellen Achse aus deformieren in eine Schleife um die negativ imaginäre Achse, vgl. Fig. 33. An der Erfüllung der Differentialgleichung $\square \Phi = -P$ wird dadurch nichts geändert, da diese aus der analytischen Form des Ausdrucks (3) folgt. Für die Schleife in Fig. 33 dürfen wir annehmen, daß wir die zunächst nur für die imaginäre Achse gegebenen Werte von P nötigenfalls in ihre unmittelbare Umgebung fortsetzen können.

Wir werden weiterhin sehen, daß die nunmehr festgelegte vierdimensionale Integraldarstellung von Φ außerordentlich nützlich ist. Zunächst zeigen wir mit ihrer Hilfe, daß die Nebenbedingung (8) aus § 2 durch (3) befriedigt wird. Dazu ist es zunächst nötig, die Gleichung

$$\text{Div}\, P = 0 \tag{4}$$

zu betrachten. Diese ist mit der sogenannten Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik identisch und besagt nichts anderes als die raumzeitliche Erhaltung der Ladung, ist also insofern ein Fundament der ganzen Elektronenauffassung. In der Tat schreibt sich Div P folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}\text{Div}\, P = \sum_1^4 \frac{\partial P_k}{\partial x_k} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varrho \mathfrak{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho \mathfrak{v}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho \mathfrak{v}_z) + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{c}(\dot{\varrho} + \text{div}\, \varrho \mathfrak{v}),\end{aligned}$$

und dies ist, gleich Null gesetzt, die Kontinuitätsgleichung. Übrigens folgt sie auch aus (II), § 2, wenn man rechts und links die Divergenz im dreidimensionalen Sinne bildet und (IV) berücksichtigt.

Berechnen wir jetzt die vierdimensionale Divergenz unserer Integraldarstellung (3), so haben wir zunächst nach den Koordinaten x_k' des Weltpunktes O zu differentiieren. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial x_k'}\frac{1}{R^2} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{R^2}.$$

Daraufhin und mit Rücksicht auf (4) erkennt man die Richtigkeit der folgenden Umformungen:

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi^2 \,\text{Div}\, \Phi_0 &= \int \sum P_k \frac{\partial}{\partial x_k'}\frac{1}{R^2} d\Sigma = -\int \sum P_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{R^2} d\Sigma \\ &= \int \text{Div}\, P \frac{1}{R^2} d\Sigma = 0, \end{aligned}\right. \tag{4a}$$

was zu beweisen war.

Bei der hier vorgenommenen partiellen Integration ist berücksichtigt, daß an den Grenzen der Integration $\frac{1}{R^2}$ verschwindet. Dies ist der Fall für unseren komplexen Integrationsweg, ebenso wie für den ursprünglichen reellen.

Schließlich betrachten wir noch Gl. (9) bzw. (9a) aus § 2. Sie liefert uns mittels (3) folgende vierdimensionale Integraldarstellung für das Feld f:

$$(5)\quad 4\pi^2 f_{kh} = \int \left\{ P_h \frac{\partial}{\partial x_k'}\left(\frac{1}{R^2}\right) - P_k \frac{\partial}{\partial x_h'}\left(\frac{1}{R^2}\right)\right\} d\Sigma = 2\int (P\times\Re)_{kh}\frac{d\Sigma}{R^4}.$$

Unter $\Re$ ist hier der Vierervektor $x_k' - x_k$, also der vierdimensionale „Radiusvektor“ vom Orte der Ladung nach dem Aufpunkt und unter $P\times\Re$ der Sechservektor verstanden, der sich aus dem Produkt der beiden Vierervektoren P und $\Re$ ergibt, mit den Komponenten:

$$(P\times\Re)_{kh} = P_k\Re_h - P_h\Re_k.$$

Auch die vierdimensionale Darstellung (5) wird sich später als besonders nützlich und einer entsprechenden dreidimensionalen Darstellung überlegen erweisen.

2. Retardierte Potentiale und Liénard-Wiechertsche Näherung. Zur weiteren Behandlung der Potentialdarstellung (3) können wir entweder zuerst die Integration nach x_4 ausführen oder diejenige nach $x_1 x_2 x_3$. Wir schlagen zunächst den ersten Weg ein.

Mit Hinweis auf Fig. 33 suchen wir diejenigen Stellen auf, wo der Nenner R^2 verschwindet. Wir schreiben

$$(6)\qquad R^2 = r^2 + x_4^2,$$

wo r den dreidimensionalen Abstand des Integrationspunktes $x_1 x_2 x_3$ und des Aufpunktes $x_1' x_2' x_3'$ bedeutet, für den Φ berechnet werden soll. (Dabei erinnern wir daran, daß wir $x_4' = 0$ gesetzt haben.) Es gibt zwei Stellen, für die $R^2 = 0$ ist, nämlich

$$(6a)\qquad x_4 = -ir \quad \text{und} \quad x_4 = +ir.$$

Die erstere nennen wir L („Lichtpunkt“), die letztere L'. Für L ist

$$(6b)\qquad t = -\frac{r}{c}.$$

In der Umgebung von L wird nach (6) und (6a)

$$(7)\qquad R^2 = (x_4 + ir)\frac{dR^2}{dx_4},$$

$$(7a)\qquad \frac{dR^2}{dx_4} = 2x_4 = -2ir.$$

Wir können nun das Schleifenintegral der Fig. 33 nach dem Cauchyschen Satz in einen Umlauf um L deformieren und für R^2 den Wert (7) einsetzen:

$$\int \frac{P dx_4}{R^2} = \frac{iP}{2r}\oint \frac{dx_4}{x_4 + ir}.$$

Rechterhand ist P für den Wert von x_4 im Lichtpunkt, also für $t = -r/c$ zu bilden. Das Integral liefert (vgl. den Umlaufssinn in Fig. 33) den Wert $-2\pi i$, das Integral links wird also gleich $\pi P/r$. Gl. (3) geht daher über in

$$4\pi\Phi = \iiint P_{t=-\frac{r}{c}} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{r}. \tag{8}$$

Daraus folgt für den imaginären und reellen Bestandteil φ und $\mathfrak{A}$ von Φ:

$$\begin{cases} 4\pi\varphi = \int \varrho_{t=-\frac{r}{c}} \dfrac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{r}, \\ 4\pi c\mathfrak{A} = \int (\varrho\mathfrak{v})_{t=-\frac{r}{c}} \dfrac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{r}. \end{cases} \tag{8a}$$

Die vorstehenden Formeln werden „retardierte Potentiale“ genannt, und zwar aus folgendem Grunde: Um die Wirkung im Aufpunkt O zur Zeit $t' = 0$ zu berechnen, hat man nicht die gleichzeitigen Orte und Geschwindigkeiten der Ladungselemente aufzusummieren, sondern diejenigen früheren Zeitpunkte zu betrachten, zu denen die Wirkung von ihnen ausgehen muß, um zur Zeit $t' = 0$ den Punkt O zu erreichen. Die hierbei verstrichene Zeit r/c heißt „Latenszeit“. Handelte es sich z. B. um eine bewegte kugelförmig verteilte Ladung, so würde die Integration in (8) oder (8a) nicht über eine Kugel, sondern über ein Gebiet zu erstrecken sein, das je nach der Lage des Aufpunktes und je nach der Bewegung der Kugel mehr oder minder verzerrt wäre.

Wir beschreiben nun den anderen Weg, indem wir zuerst die Integration nach $x_1\,x_2\,x_3$ ausführen. Dabei werden wir allerdings annehmen, daß der Aufpunkt O so weit von der Ladung entfernt liegt, daß wir diese als punktförmig, als „Elektron“, behandeln können. Nach der Bedeutung von $P = \varrho\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, i\right)$ setzen wir, unter e die Ladung des Elektrons verstanden:

$$\iiint P\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = e\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, i\right) = \frac{-e}{c}\dot{\mathfrak{R}}. \tag{9}$$

Hier bedeutet $\dot{\mathfrak{R}}$ die Ableitung[1]) des „Radiusvektors“ $\mathfrak{R} = (x_k' - x_k)_{k=1\ldots4}$ $= (\mathfrak{r}, -ict)$ nach t, also

$$\dot{\mathfrak{R}} = -(\mathfrak{v}, ic). \tag{9a}$$

[1]) Man beachte, daß $\dot{\mathfrak{R}} = d\mathfrak{R}/dt$ kein Vierervektor ist, weil dt keine invariante Bedeutung in der Weltgeometrie hat. Dasselbe gilt von der später zu benutzenden Größe $\ddot{\mathfrak{R}}$. Konsequenter wäre es, statt $\dot{\mathfrak{R}}$ und $\ddot{\mathfrak{R}}$ die Größen $\mathfrak{B} = d\mathfrak{R}/d\tau$ und $d\mathfrak{B}/d\tau$ einzuführen, wo $d\tau$ das Element der Minkowskischen „Eigenzeit“ ist. Dies ist hier der Kürze halber unterlassen, wurde aber bei demselben Problem durchgeführt in einer Abhandlung des Verfassers in Sitzungsber. d. Münch. Akad. 1911, „Über die Struktur der γ-Strahlen“, § 7.

Infolgedessen geht Gl. (3) über in

$$4\pi^2\Phi = \frac{-e}{c}\int \frac{\dot{\mathfrak{R}}}{R^2}\,dx_4. \tag{10}$$

Der Integrationsweg ist die Schleife in Fig. 33 und kann wieder in einen Umlauf um L deformiert werden. In der Umgebung von L ist R^2 durch Gl. (7) gegeben. Im Gegensatz zu (7a) haben wir aber jetzt die Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ des Elektrons als Funktionen von x_4 aufzufassen. Wir berechnen daher jetzt:

$$\frac{dR^2}{dx_4} = \frac{1}{ic}\frac{d}{dt}(\mathfrak{R}\mathfrak{R}) = \frac{2}{ic}(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}}), \tag{11}$$

wo $\dot{\mathfrak{R}}$ durch (9a) gegeben ist. Daraufhin liefert (10)

$$4\pi^2\Phi = \frac{-ie}{2}\frac{\dot{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}}}\oint \frac{dx_4}{x_4 + ir}$$

und dies gibt, da der Wert des Integrals wieder $-2i\pi$ ist:

$$4\pi\Phi = \frac{-e\dot{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}}}. \tag{12}$$

Im Lichtpunkt ist $x_4 = -ir$, also $\mathfrak{R} = (\mathfrak{r}, +ir)$; mit Rücksicht auf (9a) wird daher

$$\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}} = -\mathfrak{r}\mathfrak{v} + cr = cr\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right),$$

$\mathfrak{v}_r$ ist die Komponente von $\mathfrak{v}$ in der Richtung Elektron → Aufpunkt.

Indem wir noch in (12) zu dem imaginären Bestandteil φ und dem reellen $\mathfrak{A}$ übergehen, erhalten wir die Formeln von Liénard und Wiechert:

$$4\pi\varphi = \frac{e}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}, \qquad 4\pi c\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}. \tag{12a}$$

Die Werte von r, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_r$ sind, der Ableitung entsprechend, für den Lichtpunkt zu nehmen, d. h. nicht für die Zeit $t = 0$, für welche die Potentiale berechnet werden, sondern für die frühere Zeit $t = -r/c$. Der Faktor $1 - \mathfrak{v}_r/c$ erinnert an den Doppler-Effekt.

Wollte man die Formeln (12a) aus den Formeln (8a) durch Übergang zu einer Punktladung gewinnen, so müßte man die oben genannte Verzerrung berücksichtigen und würde dann z. B. bei der Integration von ϱ nach x_1, x_2, x_3 nicht e, sondern $e/(1 - \mathfrak{v}_r/c)$ bekommen. Doch wäre dies viel mühsamer als das von uns jetzt eingeschlagene Verfahren und würde spezielle geometrische Überlegungen nötig machen[1]),

[1]) Vgl. z. B. Lorentz, Enz. d. Math. Wiss. V, 2, S. 186 oder Abraham, Theorie der Elektrizität, 4. Aufl., 2. Bd., § 11, S. 77.

während wir uns hier auf den wohlbekannten Formalismus der Cauchyschen Residuenrechnung stützen konnten.

Schließlich behandeln wir in aller Kürze:

3. Das Feld einer beliebig bewegten Ladung. Wir gehen aus von der vierdimensionalen Gl. (5) und spezialisieren sie für eine Punktladung, indem wir die Integration nach $x_1 x_2 x_3$ wie in (9) und (10) ausführen:

$$2\pi^2 f = \frac{e}{c} \oint \frac{\mathfrak{R} \times \dot{\mathfrak{R}}}{R^4} dx_4. \tag{13}$$

Die Integration nach x_4 besteht wieder aus einem Umgang um L (Fig. 33). Dabei ist aber zu beachten, daß L jetzt kein einfacher, sondern ein Pol zweiter Ordnung des Integranden ist. Führen wir die Hilfsgröße $u = x_4 + ir$ ein, so wird $u = 0$ in L [Gl. (6a)]. Wir werden nun Zähler und Nenner des Integranden nach Potenzen von u entwickeln und den Faktor von u^{-1} bestimmen. Dabei beachten wir, daß

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{dx_4} = \frac{1}{ic} \frac{d}{dt}$$

ist. Die Entwicklung des Zählers lautet:

$$\mathfrak{R} \times \dot{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{R} \times \dot{\mathfrak{R}})_L + \frac{u}{ic} (\mathfrak{R} \times \ddot{\mathfrak{R}})_L + \cdots \tag{14}$$

Ferner ist mit Rücksicht auf $R_L^2 = 0$, ähnlich wie in (11)

$$R^2 = \frac{2u}{ic} (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})_L + \left(\frac{u}{ic}\right)^2 (\dot{\mathfrak{R}}^2 + \mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{R}})_L + \cdots,$$

also

$$R^4 = 4\left(\frac{u}{ic}\right)^2 \left\{ (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})_L^2 + \frac{u}{ic} (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})_L (\dot{\mathfrak{R}}^2 + \mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{R}})_L + \cdots \right\}. \tag{14a}$$

Nach (14) und (14a) lautet das Glied mit u^{-1} in der Entwicklung des Integranden von (13):

$$\frac{ic}{4} \left\{ \frac{\mathfrak{R} \times \ddot{\mathfrak{R}}}{(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})^2} - \mathfrak{R} \times \dot{\mathfrak{R}} \frac{\dot{\mathfrak{R}}^2 + \mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{R}}}{(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})^3} \right\}_L.$$

Mit $-2\pi i$ multipliziert, liefert es uns den Wert des Integrals in (13). Also wird

$$\frac{4\pi f}{e} = \frac{\mathfrak{R} \times \ddot{\mathfrak{R}}}{(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})^2} - \mathfrak{R} \times \dot{\mathfrak{R}} \frac{\dot{\mathfrak{R}}^2 + \mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{R}}}{(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})^3}. \tag{15}$$

Diese Darstellung faßt die recht unübersichtlichen Formeln[1]) einheitlich zusammen, die sonst für den elektrischen und magnetischen Bestandteil $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ des Feldes gegeben werden. Man bestätigt dies,

[1]) Vgl. z. B. Abraham, Theorie der Elektrizität, 4. Aufl., 2. Bd., S. 89, Gl. (73).

indem man in (15) einträgt (es handelt sich um die Werte von $\mathfrak{R}$, $\dot{\mathfrak{R}}$, $\ddot{\mathfrak{R}}$ im Lichtpunkte):

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{r},\ ir), \quad \dot{\mathfrak{R}} = -(\mathfrak{v},\ ic), \quad \ddot{\mathfrak{R}} = (-\dot{\mathfrak{v}},\ 0). \tag{16}$$

Geht man nämlich zunächst zur gleichförmigen Bewegung des Elektrons über, setzt also $\ddot{\mathfrak{R}} = 0$, so entsteht aus (15)

$$\frac{4\pi f}{e} = -\frac{(\mathfrak{R}\times\dot{\mathfrak{R}})\dot{\mathfrak{R}}^2}{(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})^3}. \tag{17}$$

Diese Gleichung ist identisch [1]) mit den Formeln (18) des vorigen Paragraphen, die dort ohne Integration aus der Lorentz-Transformation abgeleitet wurden. Zieht man (17) von (15) ab, so bleibt das reine Beschleunigungsfeld übrig:

$$\frac{4\pi f}{e} = \frac{(\mathfrak{R}\times\ddot{\mathfrak{R}})(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}}) - (\mathfrak{R}\times\dot{\mathfrak{R}})(\mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{R}})}{(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{R}})^3}. \tag{18}$$

Hieraus folgt nach (16) in dreidimensionaler Schreibweise:

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi\mathfrak{H}}{e} = \dfrac{(\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{v}})(\mathfrak{r}\mathfrak{v} - cr) - (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})(\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}})}{(cr - \mathfrak{r}\mathfrak{v})^3}, \\ \dfrac{4\pi\mathfrak{E}}{e} = \dfrac{(\mathfrak{r}c - r\mathfrak{v})(\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}}) + \dot{\mathfrak{v}}r(\mathfrak{r}\mathfrak{v} - cr)}{(cr - \mathfrak{r}\mathfrak{v})^3}. \end{cases} \tag{19}$$

Man schließt von hieraus unmittelbar:

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{r}}{r}\times\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{E} = 0.$$

$\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ stehen also auf dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ und aufeinander senkrecht: wir haben ein typisch transversales Feld.

Setzen wir speziell voraus, daß $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ gleichgerichtet sind (geradlinige Bewegung) und bezeichnen wir in üblicher Weise die absoluten Beträge von $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ mit v und $\dot{v}$, so gilt

$$v\dot{\mathfrak{v}} = \dot{v}\mathfrak{v} \text{ und auch } \begin{cases} \dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{r}\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}}), \\ (\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{v}})(\mathfrak{r}\mathfrak{v}) = (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})(\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}}). \end{cases}$$

Infolgedessen vereinfacht sich (19) zu:

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi\mathfrak{H}}{e} = \dfrac{-\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{v}}}{c^2r^2\left(1 - \dfrac{\mathfrak{r}}{r}\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right)^3} = \dfrac{-\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}}{c^2r^2(1 - \beta\cos\vartheta)^3}, \\ \dfrac{4\pi\mathfrak{E}}{e} = \dfrac{\mathfrak{r}\left(\dfrac{\mathfrak{r}}{r}\dot{\mathfrak{v}}\right) - r\dot{\mathfrak{v}}}{c^2r^2\left(1 - \dfrac{\mathfrak{r}}{r}\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right)^3} = \dfrac{r\dot{v}\cos\vartheta - r\dot{\mathfrak{v}}}{c^2r^2(1 - \beta\cos\vartheta)^3}. \end{cases} \tag{19a}$$

[1]) Für die Umrechnung ist zu beachten, daß die früheren Formeln (18a) sich auf die mit der Beobachtungszeit gleichzeitige Lage ($t' = 0$) des Elektrons, unsere jetzigen dagegen auf den Lichtpunkt beziehen. Der Übergang von dem einen zum anderen Standpunkt erfordert die Auflösung einer quadratischen Gleichung.

Hier bedeutet (vgl. Fig. 34 im folgenden Paragraphen) ϑ den Winkel zwischen der Richtung von $\mathfrak{v}$ bzw. $\dot{\mathfrak{v}}$ und dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ (Richtung Ladung $\rightarrow$ Aufpunkt). Der Größe nach gilt:

$$4\pi E = 4\pi H = \frac{e\dot{v}}{c^2 r} \frac{\sin\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^3}. \tag{20}$$

Mit dem Abstand r nehmen also diese Feldgrößen nur wie r^{-1} ab; das Geschwindigkeitsfeld (17), welches wie r^{-2} abnimmt, ist also auf große Entfernungen gegen das Beschleunigungsfeld zu vernachlässigen. Auch im allgemeinen Falle ($\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ verschieden gerichtet) besteht die Gleichheit von E und H und die genannte Abhängigkeit von r zu Recht; nur sind E und H dann nicht durch die einfache Formel (20) gegeben.

§ 4. Hertzscher Vektor, Ausstrahlung eines schwingenden Dipols.

Das einfachste Modell einer Lichtquelle im klassischen Sinne ist schon von Heinrich Hertz[1]) entwickelt worden. Es besteht aus einem schwingenden Dipol. Man denke sich eine Ladung ortsfest im Nullpunkt und eine entgegengesetzt gleiche Ladung in unmittelbarer Nähe periodisch bewegt. Das Moment des Dipols bzw. seine Änderungsgeschwindigkeit ist

$$\mathfrak{p}(t) = e\mathfrak{l}, \qquad \dot{\mathfrak{p}}(t) = e\dot{\mathfrak{l}} = e\mathfrak{v}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{l}$ die jeweilige Elongation der bewegten Ladung e ist.

Im vorigen Paragraphen haben wir das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ einer punktförmigen Ladung betrachtet, welches, wenn $v \ll c$, nach (12a) gegeben wird durch

$$4\pi\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{cr} = \frac{1}{cr}\dot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Hier weist das Argument $t - \frac{r}{c}$ darauf hin, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nicht für den Zeitpunkt t der Beobachtung, sondern für den um die Latenszeit r/c zurückliegenden Zeitpunkt zu bilden ist. Für das Folgende ist es aber bequemer, statt $\dot{\mathfrak{p}}/c$ das Moment $\mathfrak{p}$ selbst zu betrachten, also von dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ überzugehen zu einem neuen, dem „Hertz"schen Vektor Π, den wir definieren durch:

$$4\pi\Pi = \frac{1}{r}\mathfrak{p}\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{2}$$

Dann besteht zwischen $\mathfrak{A}$ und Π die Beziehung:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\dot{\Pi}. \tag{3}$$

---

[1]) In der Abhandlung: Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwellschen Theorie, Ann. d. Phys. **36**, 1, 1888. Ges. Werke II, S. 146.

Für das zugehörige skalare Potential schließt man aus Gl. (5) in § 2:

also $$\dot{\varphi} + \operatorname{div} \dot{\Pi} = 0,$$

(4) $$\varphi = -\operatorname{div} \Pi.$$

Unser Π genügt derselben Differentialgleichung wie $\mathfrak{A}$, vgl. § 2, Gl. (4'), nämlich im ganzen Raume mit Ausschluß des Nullpunktes der Gleichung:

(5) $$\Delta \Pi = \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}.$$

Diese Gleichung gilt für jede rechtwinklige Komponente von Π einzeln [vgl. die Bemerkung zu Gl. (4) in § 2]. Wie man bei Zerlegung von Π nach krummlinigen Koordinaten zu verfahren hat, werden wir in 4 nachtragen. Schließlich stellt sich das Feld $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ nach den Gl. (1) und (2) des § 2 mit Rücksicht auf die vorstehenden Gl. (2) und (3) folgendermaßen dar:

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \dot{\Pi}, \\ \mathfrak{E} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi. \end{cases}$$

1. Direkte Behandlung des elektrischen Dipols. Es ist nicht überflüssig, die vorangehenden Beziehungen unmittelbar aus den Maxwellschen Gleichungen abzuleiten, da der Umweg über das Viererpotential und seine vierdimensionale Integration nicht ganz der Einfachheit des gegenwärtigen Problems entspricht.

Wir beginnen mit dem Ansatz (6) für $\mathfrak{H}$, durch den wir bereits Gl. (III) in § 2 befriedigen. Gehen wir damit in (I) ein, so ergibt sich $\operatorname{rot}\left(\frac{1}{c^2} \ddot{\Pi} + \mathfrak{E}\right) = 0$, also unter ψ eine zunächst unbekannte skalare Funktion verstanden:

(6a) $$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\Pi} + \operatorname{grad} \psi;$$

Eintragen von (6) in (II) liefert für alle Punkte außerhalb des Nullpunktes, wo $\varrho v = 0$ ist, mit Rücksicht auf Bd. 1, S. 69, Gl. (27):

(6b) $$\mathfrak{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi = -\Delta \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi.$$

Der Vergleich von (6a) und (6b) zeigt:

$$\psi = \operatorname{div} \Pi, \quad \Delta \Pi = \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}.$$

Wir haben also Gl. (5) wiedergewonnen und sehen gleichzeitig, daß (6a) und (6b) in den Ausdruck (6) für $\mathfrak{E}$ übergehen. Gl. (IV) ist außerhalb des Nullpunktes nach (6b) identisch befriedigt.

Es bleibt uns also nur noch übrig, Gl. (5) zu integrieren. Die besondere Vereinfachung, die sich hierfür jetzt darbietet, besteht darin, daß wir nur nach einer um den Nullpunkt symmetrischen Lösung zu

suchen haben. Wir führen also die Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein und setzen Unabhängigkeit von ϑ und φ voraus. Gl. (44) im 1. Bd., S. 76 liefert dann für eine beliebige rechtwinklige Komponente von Π:

$$\Delta \Pi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Pi).$$

Wir können also Gl. (5) schreiben

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \Pi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Pi).$$

Dies ist die Form der „Gleichung der schwingenden Saite“ [1. Bd., S. 270, Gl. (10)]. Ihre allgemeine Lösung lautet nach d'Alembert:

$$r \Pi = f_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{r}{c} \right).$$

Hier sind f_1 und f_2 willkürliche Funktionen. Die erstere bedeutet einen Ausstrahlungs-, die letztere einen Einstrahlungsvorgang. Bei beiden sind die Flächen gleicher Phase (Flächen von gleichem f) bei gegebenem t Kugeln $r = \text{const}$; aber bei den ersten dehnen sich die Kugeln mit der Zeit aus ($dr/dt = +c$), bei der zweiten ziehen sie sich zusammen ($dr/dt = -c$). Nur der erstere Vorgang ist physikalisch sinnvoll. Wir setzen also $f_2 = 0$ und bestätigen so durch unsere einfache Integrationsmethode Gl. (2). (2) zusammen mit (6) stellen das Feld eines beliebig schwingenden Dipols dar.

2. Das Feld einer harmonischen, linearen Schwingung. Wir gehen nun zum Falle rein periodischer (harmonischer) Schwingungen über und setzen [wegen der komplexen Schreibweise und der Bezeichnung $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, vgl. § 1, **3**)]

$$\mathfrak{p}(t) = p e^{-i\omega t}, \quad \mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c} \right) = p e^{-i\omega t + ikr}.$$

p ist das maximale Moment des Dipols = Ladung × Amplitude der Ausschwingung. Unterdrücken wir den allen folgenden Formeln gemeinsamen Faktor $p e^{-i\omega t}$, vgl. § 1, **3**, so gehen die Gl. (2) und (5) über in

$$4\pi \Pi = \frac{1}{r} e^{ikr}, \tag{7}$$

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0. \tag{7a}$$

Zu (7) bemerken wir, daß der Vektorcharakter von Π in dem hier unterdrückten konstanten Faktor p steckt. Den Ausdruck (7) nannten wir (vgl. S. 397) „Funktion der Kugelwelle“. Sie spielt bei der Integration der Gl. (7a) dieselbe Rolle wie das Newtonsche Potential $1/r$ bei der Integration der Gleichung $\Delta \Pi = 0$ und geht in dieses für $k = 0$ über. Indem wir weiterhin unter Π den Ausdruck (7) verstehen, schreiben wir (6):

$$\mathfrak{H} = -ik \operatorname{rot} \Pi, \quad \mathfrak{E} = k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi. \tag{8}$$

Handelt es sich um eine linear-polarisierte Schwingung und legen wir die z-Achse in die Schwingungsrichtung, so wird $\Pi = \Pi_z$; mit den Abkürzungen:

$$(9)\quad \Pi' = \frac{d\Pi}{dr} = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\frac{e^{ikr}}{r}, \quad \Pi'' = \frac{d}{dr}\frac{\Pi'}{r} = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{ikr}}{r}$$

berechnen wir:

$$(9a)\quad \begin{cases} \operatorname{div}\Pi = \dfrac{\partial \Pi_z}{\partial z} = \dfrac{z}{r}\Pi', \\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi = \begin{cases} \dfrac{xz}{r}\Pi'', \\ \dfrac{yz}{r}\Pi'', \\ \dfrac{1}{r}(\Pi' + z^2\Pi''), \end{cases} \qquad \operatorname{rot}\Pi = \begin{cases} \dfrac{y}{r}\Pi', \\ -\dfrac{x}{r}\Pi', \\ 0. \end{cases} \end{cases}$$

Mithin folgt aus (8):

$$(10)\quad 4\pi\mathfrak{E} = \begin{cases} \dfrac{xz}{r}\Pi'', \\ \dfrac{yz}{r}\Pi'', \\ k^2\Pi + \dfrac{1}{r}(\Pi' + z^2\Pi''), \end{cases} \qquad 4\pi\mathfrak{H} = \begin{cases} -ik\dfrac{y}{r}\Pi', \\ +ik\dfrac{x}{r}\Pi', \\ 0. \end{cases}$$

Die Ausrechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem wir uns in der Nähe des Dipols oder in hinreichender Entfernung befinden. „In der Nähe“ heißt: r vergleichbar mit der Wellenlänge λ; „hinreichende Entfernung“ bedeutet $r \gg \lambda$. Im letzteren Falle ist $kr \gg 1$. Wir beschränken uns hier auf diesen Fall. Die interessanten Umstände, die im ersteren Falle auftreten (fortgesetzte Abschnürung elektrischer Kraftlinien vom Dipol, Hinausdrängung der früher entstandenen unter dem Einfluß neugebildeter Kraftlinien), erläutert Hertz l. c. durch eine Serie berühmter Figuren.

Für $kr \gg 1$ wird bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $1/kr$ nach (9) und (10):

$$4\pi\Pi' = \frac{ik}{r}e^{ikr}, \quad 4\pi\Pi'' = -\frac{k^2}{r^2}e^{ikr},$$

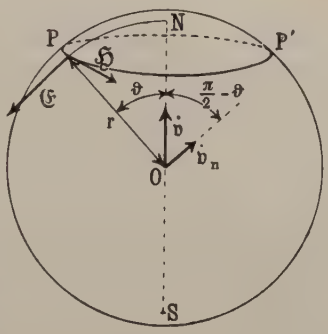
$$(11)\quad 4\pi\mathfrak{E} = \begin{cases} -k^2\dfrac{xz}{r^2}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ -k^2\dfrac{yz}{r^2}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ +k^2\dfrac{x^2+y^2}{r^2}\dfrac{e^{ikr}}{r}. \end{cases} \qquad 4\pi\mathfrak{H} = \begin{cases} k^2\dfrac{y}{r}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ -k^2\dfrac{x}{r}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ 0. \end{cases}$$

Aus dieser Darstellung folgt, unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor x, y, z, unter ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{r}$ und der z-Achse, unter E und H die resultierenden Feldstärken verstanden:

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r}\mathfrak{E} = \mathfrak{r}\mathfrak{H} = \mathfrak{E}\mathfrak{H} = 0, \\ 4\pi E = 4\pi H = k^2 \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\dfrac{e^{ikr}}{r} = k^2 \sin\vartheta \dfrac{e^{ikr}}{r}. \end{cases}$$

Wir konstatieren also denselben transversalen Charakter des elektromagnetischen Feldes wie am Ende des vorigen Paragraphen: $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht zueinander und zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$, die resultierenden Feldstärken E und H unter sich gleich, beide gleich Null längs der z-Achse, d. h. in der Verlängerung der Dipolschwingung, die magnetischen Kraftlinien in Kreisen um die z-Achse, die elektrischen Kraftlinien in den Meridianebenen durch die z-Achse verlaufend.

Fig. 34.



Dagegen ist in der Nähe des Dipols, wo kr nicht groß ist, das Feld nicht rein transversal, wovon man sich an Hand der Formeln (10) leicht überzeugt. Im Sinne des vorigen Paragraphen bedeutet dies (vgl. den Schluß desselben), daß sich hier dem „Beschleunigungsfelde" das „Geschwindigkeitsfeld" der bewegten Ladung überlagert. — Zur Erläuterung diene Fig. 34. Hier ist die Dipolschwingung durch den Beschleunigungspfeil $\dot{\mathfrak{v}}$ angedeutet. Mit dem Abstand r des Aufpunktes P vom Orte O des Dipols ist eine Kugel um O geschlagen. Die Durchstoßungspunkte der z-Achse mit dieser Kugel sind als Nordpol und Südpol N und S markiert. Auf der Kugel ist ein Parallelkreis PP' und ein Meridiankreis NP gezogen. Die Richtungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ im Aufpunkt P verlaufen dann als Tangenten an diese Kreise.

Um den Vergleich dieser Ergebnisse mit denen des vorigen Paragraphen zu erleichtern, wollen wir nachträglich von der Annahme rein harmonischer Schwingungen absehen, also für Π den allgemeineren Ausdruck (2) statt des spezielleren (7) zugrunde legen. Die auch jetzt festzuhaltende Annahme, daß wir uns in hinreichend großer Entfernung vom Dipol befinden, hat zur Folge, daß wir in (2) und analogen Ausdrücken Differentiationen nur nach dem Argument von $\mathfrak{p}$ auszuführen haben, nicht auch nach dem Faktor $1/r$; z. B.

$$4\pi \operatorname{div} \Pi = \frac{z}{cr} \frac{\dot{\mathfrak{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Als Darstellung des Feldes ergibt sich durch dieselben Rechnungen wie oben:

$$(13)\quad 4\pi\mathfrak{E} = \begin{Vmatrix} \frac{xz}{c^2r^2}\,\frac{\ddot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \\ \frac{yz}{c^2r^2}\,\frac{\ddot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \\ -\frac{x^2+y^2}{c^2r^2}\,\frac{\ddot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \end{Vmatrix} \qquad 4\pi\mathfrak{H} = \begin{Vmatrix} -\frac{y}{c^2r}\,\frac{\ddot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \\ +\frac{x}{c^2r}\,\frac{\ddot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \\ 0. \end{Vmatrix}$$

Bezüglich Transversalität und gegenseitiger Lage von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gelten offenbar dieselben Aussagen wie oben. Für die resultierenden Feldstärken erhält man jetzt:

$$(14)\qquad 4\pi E = 4\pi H = \frac{\sin\vartheta}{c^2 r}\,\ddot{\mathfrak{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{e\dot{v}}{c^2 r}\sin\vartheta.$$

Hier ist, wie in (1), $\dot{\mathfrak{p}}(t) = e\mathfrak{v}$, also $\ddot{\mathfrak{p}}(t) = e\dot{\mathfrak{v}}$ gesetzt. Natürlich ist, wie unsere Formel (14) andeutet, die Beschleunigung $\dot{v}$ nicht für den Zeitpunkt t, sondern für den früheren Zeitpunkt $t - \frac{r}{c}$ zu nehmen. Ferner zeigt (14), daß es für einen bestimmten Radiusvektor r nicht auf die Beschleunigung $\dot{v}$ selbst, sondern auf die Beschleunigungskomponente

$$\dot{v}_n = \dot{v}\sin\vartheta$$

normal zum Radiusvektor r ankommt. Diese Beschleunigungskomponente ist in Fig. 34 eingezeichnet.

Wir übersehen nun unmittelbar den Zusammenhang unserer jetzigen Formeln (14) mit den Formeln (20) vom Schluß des vorigen Paragraphen. Der ganze Unterschied besteht in dem Faktor $(1-\beta\cos\vartheta)^3$. Für $v \ll c$, $\beta \ll 1$, welchen Fall wir in diesem Paragraphen voraussetzten, wird dieser Faktor gleich 1. Unsere jetzigen Formeln entsprechen also einer ruhenden oder langsam bewegten Lichtquelle, die früheren dem Falle eines rasch bewegten Elektrons, wie es z. B. für die Theorie der Röntgenstrahlung in Betracht zu ziehen ist.

3. Ausgestrahlte Energie. Um die Strahlung einer ruhenden oder bewegten Lichtquelle zu bestimmen, berechnen wir an Hand von Fig. 34 den Energiefluß durch die dort gezeichnete Kugel vom Radius r. Der Energiefluß pro Zeit- und Flächeneinheit ist nach § 1, Gl. (VI) gegeben durch

$$\mathfrak{S} = c\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}$$

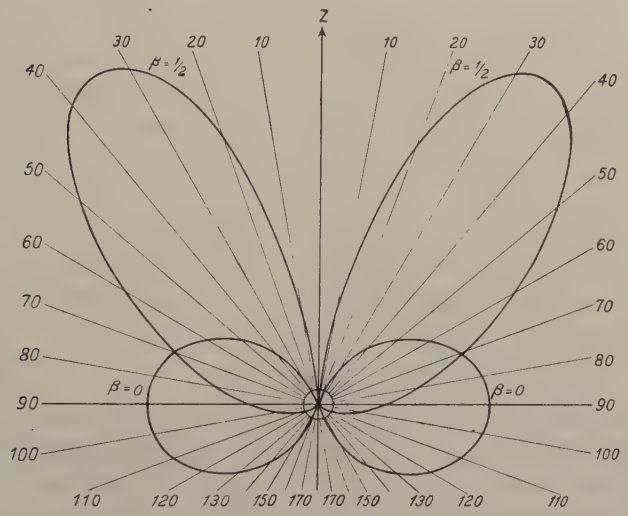
und wird in unserem Falle wegen $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{H}$ und $E = H$ nach Gl. (14), also für eine ruhende Lichtquelle, berechnet:

$$\mathfrak{S} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16 \pi^2 c^3 r^2} \sin^2 \vartheta. \tag{15}$$

Seine Richtung ist senkrecht gegen die Kugelfläche, radial nach außen. Dagegen wird dieselbe Größe nach den Gl. (20) und (20 a) des vorigen Paragraphen, also für eine bewegte Lichtquelle:

$$\mathfrak{S} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16 \pi^2 c^3 r^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6}. \tag{15 a}$$

Fig. 35.



Wir stellen beide Formeln in dem Polardiagramm der Fig. 35 als Funktion von ϑ dar. Das untere Kurvenpaar, welches symmetrisch zur Äquatorebene $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ gestaltet ist, stellt die Ausstrahlung einer ruhenden Lichtquelle nach (15) dar, wobei die Schwingungsrichtung in die z-Achse ($\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$) fallend zu denken ist. Das obere Kurvenpaar ist für $\beta = {}^1/_2$ gezeichnet, stellt also die Emission einer sehr schnell in der z-Richtung bewegten Ladung bei übrigens gleicher momentaner Gesamtausstrahlung dar. Die Kurve ist jetzt keineswegs symmetrisch gestaltet, sondern eilt in der Bewegungsrichtung ($\vartheta = 0$) vor. Natürlich müssen wir, um die räumliche Verteilung der Emission zu erhalten, beide Kurvenzüge um die z-Richtung herumrotieren. Im ersteren Falle entsteht dabei ein wulstförmiger Körper, im zweiten ein trompetenförmiger. Die zweite Kurve erklärt, soweit das vom

Standpunkt der Wellentheorie aus möglich ist, eine gewisse Einseitigkeit bei der Emission der Röntgenstrahlung nach der Richtung des primären Kathodenstrahls, durch dessen Bremsung die Röntgenstrahlung erzeugt wird. Die erste Kurve ist z. B. für die Streuung des Lichtes oder auch für die Verteilung der sekundären Röntgenstrahlung maßgebend.

Von der spezifischen Ausstrahlung $\mathfrak{S}$ pro Flächeneinheit gehen wir über zu der gesamten Ausstrahlung S durch die ganze Kugelfläche vom Radius r hindurch. Zu dem Ende haben wir die Gl. (15), (15a) zu integrieren. Das Kugelelement ist, unter φ die geographische Breite auf der Kugel verstanden:

$$d\sigma = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Nach der Vorschrift

$$S = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathfrak{S} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

finden wir

$$(16) \quad S = \frac{e^2 \dot{v}^2}{8\pi c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{8\pi c^3} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) \, dx = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi c^3} \text{ [1]}$$

bzw.

$$(16a) \quad S = \frac{e^2 \dot{v}^2}{8\pi c^3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\vartheta}{(1 - \beta\cos\vartheta)^6} \, d\vartheta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{8\pi c^3} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^6} \, dx$$

$$= \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi c^3} \frac{1 + \frac{1}{5}\beta^2}{(1 - \beta^2)^4}.$$

Der Kugelradius r ist, wie es sein muß, herausgefallen. Die letzte Formel zeigt, nebenbei bemerkt, daß mit der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit $\beta \longrightarrow 1$ nicht nur die spezifische Ausstrahlung $\mathfrak{S}$ in der Frontrichtung, sondern auch bei gleichem $\dot{v}$ die gesamte Ausstrahlung S systematisch zunimmt.

Schließlich spezialisieren wir (16) für den Fall einer harmonischen Schwingung und gehen zum Zeitmittel über. Ist a die Schwingungsamplitude, ω die Schwingungsfrequenz in 2π sec, so wird

$$\overline{v^2} = \tfrac{1}{2} a^2 \omega^2, \quad \overline{\dot{v}^2} = \tfrac{1}{2} a^2 \omega^4,$$

also nach (16) mit $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$(17) \qquad \overline{S} = \frac{e^2 a^2}{12\pi c^3} \omega^4 = \frac{c e^2 a^2}{12\pi} k^4 = \frac{4\pi^3}{3} \frac{e^2 a^2}{\lambda^4}.$$

---

[1]) Beim Übergang zu konventionellen Einheiten [e zu ersetzen durch $\sqrt{4\pi e}$, vgl. § 1, Gl. (2)] erhält man statt (16) die in der Literatur häufig benutzte Formel:

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}.$$

Dieselbe Formel[1]) erhält man natürlich auch aus der speziell für einen harmonischen Schwingungsdipol abgeleiteten Gl. (12).

Gl. (17) enthält das berühmte $1/\lambda^4$-Gesetz, mit dem Lord Rayleigh das Himmelsblau erklärt hat. Denken wir uns nämlich unseren Dipol angeregt durch eine auffallende Lichtwelle, so wird das maximale Dipolmoment ea unabhängig von der anregenden Wellenlänge [nämlich gleich $A(n^2-1)$, wo A die auffallende Amplitude, n der Brechungsindex ist]. Infolgedessen zeigt (17), daß in dem reemittierten („zerstreuten") Lichte die blaue Farbe (kleines λ) überwiegt. Umgekehrt muß in dem von einem trüben Medium hindurchgelassenen Lichte die rote Farbe überwiegen: der Himmel und das ferne Gebirge sind blau, die Sonne beim Untergang rot.

4. Verallgemeinerungen. Es hat keine Schwierigkeit, die Formeln unter **1** so zu verallgemeinern, daß sie Gültigkeit haben für den Fall eines elektromagnetischen Mediums von beliebigen (aber räumlich festen) Materialkonstanten ε, μ, σ. Wir brauchen nur statt (6) zu setzen:

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \dfrac{1}{c}\operatorname{rot}(\varepsilon\dot{\Pi} + \sigma\Pi), \\ \mathfrak{E} = -\left(\dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\Pi} + \dfrac{\sigma\mu}{c^2}\dot{\Pi}\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi \end{cases}$$

und jetzt Π (genauer gesagt Π_x, Π_y, Π_z) der Differentialgleichung zu unterwerfen:

$$(19)\qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\Pi} + \frac{\sigma\mu}{c^2}\dot{\Pi} = \Delta\Pi;$$

dann sind die Gl. (I) bis (IV) in § 1 erfüllt. Allerdings läßt sich die Integration der Gl. (19) nicht so einfach und allgemein wie in **1** durchführen, da die d'Alembertsche Lösung bei Hinzutreten eines Dämpfungsgliedes (unseres Gliedes mit $\dot{\Pi}$) versagt.

Wir gehen daher, wie in **2**, zum Falle harmonischer (zeitlich reinperiodischer) Schwingungen über, denken uns also die Abhängigkeit von der Zeit in der Form $e^{-i\omega t}$ gegeben und unterdrücken weiterhin in allen Formeln für Π, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, ... diesen Faktor. Gl. (19) geht dann über in [vgl. § 1, **3**, Gl. (12)]

$$(19')\qquad \Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \quad k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega}{c^2}$$

---

[1]) Es ist ja wegen Gleichheit von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{S} = c\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} = c\mathfrak{E}^2$$

und nach der Regel (18) in § 1, **3**, wenn $\mathfrak{E}$ den komplexen Ausdruck (12) bedeutet und wenn wir den in (12) unterdrückten Faktor $p = ea$ des maximalen Dipolmoments hinzufügen:

$$\overline{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2}cp^2|\mathfrak{E}|^2 = \frac{1}{2}\frac{ck^4\sin^2\vartheta}{(4\pi)^2 r^2}e^2a^2.$$

Hieraus folgt durch Integration über die Kugel vom Radius r wieder gerade Gl. (17).

und läßt sich bei Einführung von Polarkoordinaten für jede rechtwinklige Komponente von Π ähnlich wie in **1** schreiben:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Pi) + k^2 r\Pi = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist wieder:

$$r\Pi = Ae^{+ikr} + Be^{-ikr}.$$

Von den beiden Gliedern rechts ist das zweite zu streichen, da wir k mit positiv-imaginärem Bestandteil rechnen (vgl. § 1, **3**); anderenfalls würde Π mit wachsendem r exponentiell zunehmen. Wir erhalten dann, wenn wir den Amplitudenfaktor A speziell wählen:

$$4\pi\Pi = \frac{1}{r}e^{ikr}, \tag{20}$$

wie in Gl. (7), jedoch mit dem Unterschied, daß jetzt k komplex ist.

Die Gl. (18) gehen nunmehr über in

$$\begin{cases} \mathfrak{H} = -i\dfrac{\varepsilon\omega + i\sigma}{c}\operatorname{rot}\Pi = -\dfrac{ic}{\mu\omega}k^2\operatorname{rot}\Pi, \\ \mathfrak{E} = k^2\Pi + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi. \end{cases} \tag{18'}$$

Die Ausrechnung liefert, wenn wir wieder die Richtung von Π in die z-Achse fallen lassen, genau die Gl. (10), mit dem einzigen Unterschied, daß bei $\mathfrak{H}$ der Faktor k zu ersetzen ist durch $\dfrac{\varepsilon\omega + i\sigma}{c}$. Dementsprechend bleiben die früheren Schlüsse über die Transversalität des Feldes erhalten; nur werden E und H nicht mehr einander gleich, sondern unterscheiden sich wegen eines konstanten (falls $\sigma \neq 0$ komplexen) Faktors nach Größe und Phase.

Um uns von der Beschränkung auf rechtwinklige Komponenten freizumachen, denken wir uns jetzt $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ und Π nach beliebigen krummlinigen Koordinaten in Komponenten zerlegt. Statt (18′) machen wir den allgemeineren Ansatz

$$\begin{cases} \mathfrak{H} = -i\dfrac{\varepsilon\omega + i\sigma}{c}\operatorname{rot}\Pi = -\dfrac{ic}{\mu\omega}k^2\operatorname{rot}\Pi, \\ \mathfrak{E} = k^2\Pi + \operatorname{grad}U. \end{cases} \tag{18''}$$

U ist eine frei verfügbare skalare Funktion, die wir jetzt besser nicht zu div Π spezialisieren. Durch den Ansatz (18″) sind die Gl. (I) und (III) in § 1 befriedigt. Die Gl. (II) verlangt nun

$$\operatorname{grad}U - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi + k^2\Pi = 0. \tag{19''}$$

Mit der speziellen Annahme $U = \operatorname{div}\Pi$ würde sich daraus die direkte Verallgemeinerung von (19′) für krummlinige Koordinaten, nämlich

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot})\Pi + k^2\Pi = 0$$

ergeben. Daß auch Gl. (IV) erfüllt ist (was für rein periodische Vorgänge eigentlich selbstverständlich ist), erkennt man, wenn man die Divergenz von Gl. (19″) bildet.

Unsere letzten Formeln lassen eine bemerkenswerte Umkehrung zu. Wir wollen im folgenden von einem magnetischen Dipol statt von einem elektrischen sprechen. Wir denken uns also z. B. in Richtung der z-Achse einen Magnetpol hin und her schwingen. Alsdann werden, umgekehrt wie früher, die magnetischen Kraftlinien in den Meridianebenen durch die Dipolachse, die elektrischen in Kreisen um dieselbe verlaufen. Für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie (Kap. 16) schematisiert der magnetische Dipol eine Rahmenantenne, so wie der elektrische Dipol eine gewöhnliche Linearantenne schematisiert. In der Tat pulsiert bei der Rahmenantenne das magnetische Feld in Richtung der Normalen zur Drahtwicklung, welche hier die Dipolachse darstellt, während es bei der Linearantenne das elektrische Feld ist, welches in der Dipolachse, d. h. längs der Erstreckung des Antennendrahtes, schwingt.

Wir beschreiben das Feld eines solchen magnetischen Dipols, und zwar sogleich für eine Umgebung von beliebigen elektromagnetischen Konstanten, wenn wir statt (18) den Ansatz machen:

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = -\dfrac{1}{c}\operatorname{rot}(\mu\dot{\Pi}), \\ \mathfrak{H} = -\left(\dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\Pi} + \dfrac{\sigma\mu}{c^2}\dot{\Pi}\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi. \end{cases}$$

Um hierdurch den Maxwellschen Gleichungen (I) bis (IV) in § 1 zu genügen, ist es wieder nur nötig, daß Π der Gl. (19) oder bei harmonischen Schwingungen der Gl. (19′) genügt. Daraus folgt für Π dieselbe Darstellung (20) wie beim elektrischen Dipol. Die Ausrechnung von (21) für harmonische Schwingungen liefert sodann im wesentlichen dieselben Formeln wie (11), nur mit Vertauschung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und mit etwas abgeänderten Konstanten, nämlich:

$$(22)\qquad 4\pi\mathfrak{H} = \begin{cases} -k^2\dfrac{xz}{r^2}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ -k^2\dfrac{yz}{r^2}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ +k^2\dfrac{x^2+y^2}{r^2}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \end{cases} \qquad 4\pi\mathfrak{E} = \begin{cases} \dfrac{-\mu\omega k}{c}\dfrac{y}{r}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ \dfrac{+\mu\omega k}{c}\dfrac{x}{r}\dfrac{e^{ikr}}{r}, \\ 0. \end{cases}$$

Diese Darstellung bestätigt unsere Aussage, daß nun die magnetischen Kraftlinien in den Meridianebenen durch die z-Achse, die elektrischen in Kreisen um die z-Achse verlaufen. Wir kommen im 16. Kapitel auf Schwingungen von diesem Typus zurück.

Die Verallgemeinerung von (21) für krummlinige Komponenten von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und Π schreiben wir, speziell bei harmonischen Schwingungen:

$$(21') \qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \dfrac{i\mu\omega}{c} \operatorname{rot} \Pi, \\ \mathfrak{H} = k^2 \Pi + \operatorname{grad} U, \end{cases}$$

wobei dann die Vektorfunktion Π und die skalare Funktion U wieder der Differentialgleichung (19″) zu genügen haben; die spezielle Wahl $U = \operatorname{div} \Pi$ ist auch hier zulässig, aber in der Folge nicht ratsam.

Es wird nicht überflüssig sein, an dieser Stelle den Unterschied hervorzuheben zwischen dem konstanten magnetischen Dipol, wie er in der atomistischen Theorie des Magnetismus auftritt, und dem schwingenden magnetischen Dipol, den wir im vorstehenden behandelt haben. Die Ampèresche Vorstellung permanenter Molekularströme findet in der Elektronentheorie ihr Gegenbild in zirkularen Elektronenbahnen. Eine z. B. in der xy-Ebene gelegene zirkulare Schwingung läßt sich bekanntlich ersetzen durch zwei der Phase nach gegeneinander um $\pi/2$ versetzte lineare Schwingungen in der x- und y-Richtung, also durch zwei Hertzsche Vektoren Π_x und Π_y. Ihre Überlagerung stellt also einen Ampèreschen Molekularstrom in der xy-Ebene dar oder, was dasselbe ist, einen magnetischen Dipol in der z-Achse. Allerdings mit einem wesentlichen Unterschied: Die beiden linearen, also auch die zirkulare Schwingung sind von Ausstrahlung begleitet; infolge des Energieverlustes nimmt die Amplitude der Linearschwingungen bzw. der Radius des Schwingungskreises ab. Was wir zur Erklärung des Atommagnetismus benötigen, ist aber ein Dipol von zeitlich konstantem Moment. Wir müssen also, um zur elektronentheoretischen Darstellung des Magnetismus zu gelangen, von der Ausstrahlung absehen. In dieser unvermeidlichen Folgerung dürfen wir heutzutage einen deutlichen Fingerzeig in Richtung auf die Quantentheorie sehen, deren stationäre Elektronenbahnen, entgegen den Grundregeln der Elektrodynamik, ebenfalls als strahlungslos definiert werden.

Etwas ganz anderes ist der schwingende magnetische Dipol, wie er für die drahtlose Telegraphie in Betracht kommt. Bei diesem ist die Ausstrahlung wesentlich und physikalisch real. Ein z. B. nach der z-Achse schwingender magnetischer Dipol entspricht nicht einem konstanten Kreisstrom in der xy-Ebene, sondern einem Wechselstrom. Dieser schwingende magnetische Dipol wird durch die vorstehende Theorie wiedergegeben — der konstante magnetische Dipol ist vom Standpunkt der klassischen Elektrodynamik unerklärbar.

Dreizehntes Kapitel.

Theorie der Beugung.

§ 1. Verzweigte Lösungen der Schwingungsgleichung.

Während beim gewöhnlichen Vorgang des Sehens und beim Gebrauch optischer Instrumente die geometrische oder Strahlenoptik zur Darstellung der Erscheinungen im wesentlichen ausreicht, tritt die Wellenoptik besonders bei der Erklärung der Beugungserscheinungen in ihr Recht. Die Strahlenoptik ergibt sich als Limes der Wellenoptik für $\lambda = 0$ (vgl. hierzu § 3, 4). Die klassische Behandlung der Beugungserscheinungen kann als erstes Glied einer Näherungsentwicklung bei kleinem λ aufgefaßt werden (vgl. ebenfalls § 3). In diesem Näherungscharakter liegt die große Kraft der gewöhnlichen Beugungstheorie begründet und ihre Fähigkeit, sich den kompliziertesten Randbedingungen (Öffnung von beliebiger Begrenzung, Gitter) anzupassen, Aufgaben, die bei exakter Behandlung unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten würden.

Im Gegensatz dazu wollen wir in diesem Paragraphen die Beugungsprobleme bei beliebiger Größe von λ behandeln, im Sinne mathematischer Randwertaufgaben. Dabei müssen wir uns allerdings auf die allereinfachsten Fälle beschränken und müssen die Randbedingungen so weit idealisieren, daß man füglich bezweifeln kann, ob diese Behandlung vom physikalischen Standpunkt aus als „exakte Lösung“ des betreffenden Beugungsproblems angesprochen werden kann.

Abgesehen von den ihnen innewohnenden analytischen Schwierigkeiten sind die von uns zu besprechenden Beugungsprobleme, begrifflich betrachtet, die einfachsten Beispiele von Schwingungsaufgaben. Handelt es sich doch dabei um eine vertiefte Auffassung der fundamentalen Tatsache des Schattenwerfens undurchsichtiger Körper.

1. Formulierung des mathematischen Problems. Wir betrachten einen ebenen Schirm S von beliebiger Berandung R. Irgendwo vor demselben befinde sich eine Lichtquelle Q. Den Schirm denken wir unendlich dünn, aber trotzdem völlig undurchlässig. Wir erreichen dies elektromagnetisch, wenn wir ihn als vollkommenen Leiter ($\sigma = \infty$) erklären. In einem vollkommenen Leiter kann sich kein elektrisches Feld behaupten. Es ist daher im Innern desselben $\mathfrak{E} = 0$. Wegen der Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ [XII, § 1, (4)] folgt daraus für das Außenfeld auf der Vorder- und Rückseite des Schirmes:

(1) $\mathfrak{E} = 0$ in tangentieller Richtung.

Da die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ im allgemeinen nicht stetig ist, also außen nicht zu verschwinden braucht, kann man auch sagen: Die elektrischen Kraftlinien stehen senkrecht auf der Oberfläche des Schirmes, wie in der Elektrostatik.

Der so definierte „undurchsichtige Schirm“ ist verschieden von dem „schwarzen Schirm“ der Optik. Der schwarze Körper nimmt nach Definition alle auffallende Energie auf und reflektiert keine. Unser undurchsichtiger Schirm dagegen nimmt kein Feld auf und reflektiert vollkommen. Man kann ihn auch als „blanken Körper“ bezeichnen. Der schwarze Körper läßt sich durch elektromagnetische Grenzbedingungen überhaupt nicht definieren. Wir werden in der nächsten Nummer sehen, wie wir ihn, wenn auch nur approximativ, von unserem Standpunkt aus fassen können.

Wir wählen vorübergehend die Oberfläche des Schirmes zur xy-Ebene, also seine Normale zur z-Achse. In der Lichtquelle Q denken wir uns einen schwingenden elektrischen Dipol [vgl. XII, § 4, 2)] von der Frequenz ω $\left(\text{der „Wellenzahl“ } k = \frac{\omega}{c}\right)$ und unterscheiden die beiden Fälle:

A. Die Achse des Dipols liegt parallel zur Schirmebene, z. B. in der x-Achse, $\Pi = \Pi_x$;

B. die Achse des Dipols ist senkrecht zum Schirme, also nach der z-Achse gerichtet, $\Pi = \Pi_z$.

Nach Gl. (8) l. c. werden die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}$:

$$\text{A. } \mathfrak{E}_x = k^2 \Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi_x}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi_x}{\partial x};$$

$$\text{B. } \mathfrak{E}_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}, \qquad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}.$$

Die obige Gl. (1) ist also befriedigt, wenn wir für die Oberfläche von S verlangen:

$$\text{A. } \Pi_x = 0, \qquad \text{B. } \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = 0.$$

Wir setzen für beide Fälle:

$$4\pi \Pi = u e^{-i\omega t},$$

u ist dann eine (komplexe) Funktion des Aufpunktes P und des Ortes Q der Lichtquelle:

(2) $$u = u(P, Q).$$

Zu ihrer mathematischen Festlegung haben wir die Bedingungen:

1. u erfüllt in den Koordinaten von P die Schwingungsgleichung [vgl. Gl. (7a) l. c.]

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

2. u wird für $P = Q$ unendlich wie $1/r$ [vgl. Gl. (7) l. c.] und ist sonst überall endlich und stetig [1]).

3. Auf S wird im Falle A. $u = 0$, im Falle B. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

4. Hierzu tritt noch eine Bedingung [2]) in unendlich großer Entfernung, welche den Charakter der fortschreitenden Wellen sichert, also eine Einstrahlung aus dem Unendlichen ausschließt.

Gehen wir zum Sonderfall der ebenen Welle über, lassen wir also den Dipol Q (unter entsprechender Steigerung seiner Amplitude und Anderung seiner Phase) in bestimmter Richtung ins Unendliche rücken, so können wir den Vorgang wie üblich in zwei Teile zerlegen (unter Einfallsebene wird die durch die Richtung der einfallenden Welle und die Normale des Schirmes gelegte Ebene verstanden):

A. Polarisationsebene parallel zur Einfallsebene, d. h. elektromagnetisch: $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Einfallsebene, also parallel zum Schirme, sagen wir in der x-Richtung gelegen;

B. Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene, d. h. elektromagnetisch: $\mathfrak{H}$ parallel zum Schirme, ebenfalls in der x-Richtung.

Dann können wir setzen:

$$\text{A.}\quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_x = u e^{-i\omega t}, \qquad \text{B.}\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x = u e^{-i\omega t}.$$

u ist in beiden Fällen eine (komplexe) Funktion des Aufpunktes P und des (etwa gegen die Schirmnormale gemessenen) Einfallswinkels α:

$$u = u(P, \alpha). \tag{2a}$$

Wegen Gl. (1) gilt im Falle A. ersichtlich wieder $u = 0$ auf dem Schirme; im Falle B. schließen wir aus (1) und aus der Maxwellschen Gleichung

$$\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}}_y = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \quad \text{auf} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Infolgedessen gelten bei der jetzigen Definition von u in den Fällen A. und B. wieder die obigen Bedingungen 3. Ebenfalls gilt nach Gl. (12) von S. 396 die Bedingung 1. Statt der Bedingungen 2. und 4. dagegen haben wir jetzt zu verlangen:

2'. u ist überall endlich und stetig.

4'. u verhält sich im Unendlichen wie eine in der Richtung α einfallende ebene Welle [vgl. Gl. (14) von S. 397].

---

[1]) Am Rande von S muß man ein Unendlichwerden von grad u zulassen, jedoch nur von solchem Betrage, daß $r\partial u/\partial r$ im Limes $r = 0$ verschwindet (r = Abstand vom Rande), vgl. § 2, Gl. (11).

[2]) Vgl. A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresber. d. D. Math. Vereinigung **21**, 309, 1912.

2. Die Idee der Riemannschen Räume. Eine so einfache Randbedingung wie 3. ist man versucht, nach der Methode der Spiegelung zu erfüllen. Man wird also zum Quellpunkt Q (wir kehren zu der ursprünglichen Formulierung des Problems mit punktförmiger Singularität zurück) in bezug auf die Schirmebene den Spiegelpunkt Q' konstruieren. Das verbietet aber die Bedingung 2., nach welcher Q die einzige Singularität von u in dem physikalisch als Beobachtungsfeld in Betracht kommenden Raume sein soll. Der Spiegelpunkt darf also nicht in dem „physikalischen Raume" liegen. Dies führt dazu, einen „mathematischen Hilfsraum" hinzuzunehmen, der mit dem physikalischen Raume zusammen einen Riemannschen Doppelraum [1]) bildet. Die Herstellung desselben beschreiben wir so: Wir nehmen zwei Exemplare des dreidimensionalen Raumes her, schneiden sie längs S auf und heften die beiden „Ufer" der Schnittfläche wechselseitig aneinander. S heißt auch „Verzweigungsschnitt", der Rand R von S „Verzweigungslinie" — alles in Anlehnung an die Terminologie der „Riemannschen Flächen" (vgl. 1. Bd., S. 139), jedoch mit dem Unterschied, daß unser Riemannscher Raum euklidisch-metrisch, die Riemannsche Fläche aber nur im Sinne der Analysis situs festgelegt ist.

Unsere Aufgabe ist nun, eine Lösung U der Differentialgleichung 1. zu finden, welche in diesem Riemannschen Raume eindeutig und stetig ist und nur die eine Singularität Q besitzt. Wir nennen sie die „Hauptlösung" für unseren Riemannschen Raum oder auch, im Hinblick auf den physikalischen Raum, „verzweigte Hauptlösung". Die Hauptlösung für den schlichten Raum

$$U_0 = \frac{1}{R} e^{ikR} \tag{3}$$

ist zwar auch eindeutig in unserem Riemannschen Raume, aber sie hat in diesem nicht eine, sondern zwei Singularitäten, nämlich außer der Stelle Q ($R = 0$) auch die im anderen Raumexemplar an gleicher Stelle gelegene Singularität Q_1. Wir suchen also im Gegensatz zu U_0 eine Lösung U, die sich in bezug auf den Doppelraum ebenso verhält wie U_0 in bezug auf den schlichten Raum. Wir werden alsbald sehen,

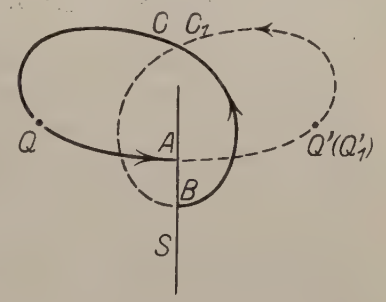
---

[1]) Dem mathematischen Physiker ist die Vorstellung Riemannscher Räume aus der Theorie des magnetischen Blattes geläufig. Für das magnetische Potential stationärer Ströme spielen die (als unendlich dünn gedachten) stromführenden Leiter die Rolle von Verzweigungslinien; das zwischen ihnen ausgespannte magnetische Blatt bedeutet einen Verzweigungsschnitt und entspricht im optischen Falle unserem Schirme. Übrigens handelt es sich im magnetischen Falle um eine Verzweigung unendlich hoher Ordnung, da das Potential beim Überschreiten des Verzweigungsschnittes je um einen konstanten Periodizitätsmodul ($4\pi J$ in gewöhnlichen Einheiten) zunimmt, während wir im optischen Falle zunächst den Fall endlicher Verzweigung (z. B. den Doppelraum) zu betrachten haben.

wie sich eine solche Lösung in einfachen Fällen wirklich herstellen läßt, und zwar, dank der Einfachheit der mathematischen Fragestellung, in verhältnismäßig einfacher und geschlossener Form.

In unserem Doppelraum läßt sich der Spiegelungsprozeß nunmehr ausführen, ohne in dem physikalischen Raume eine unerlaubte Singularität zu schaffen. Der Spiegelpunkt Q' zu Q liegt ja in dem mathematischen Hilfsraum, wie wir durch Fig. 36 erläutern. Überschreiten wir, von Q ausgehend, den Schirm im Punkte A, so treten wir in das andere Raumexemplar über und gelangen (auf punktiertem Wege) zu dem mit Q in bezug auf S symmetrisch gelegenen Punkte Q'. Gehen wir von hieraus über C_1 nach der Vorderseite des Verzweigungsschnittes, so überschreiten wir den Schirm zum zweiten Male, etwa in B, und treten dadurch wieder in den physikalischen Raum ein. In diesem gelangen wir etwa über den Punkt C, der mit C_1 zwar zusammenliegt, aber nicht identisch ist, nach Q zurück. Wir bemerken noch, daß die hier eingeführte Verzweigung längs S ganz dem physikalischen Sachverhalt entspricht. Denn die optischen Felder diesseits und jenseits von S haben physikalisch nichts miteinander zu tun. Sie sind durch den vollkommenen Leiter vollkommen voneinander getrennt. Die analytische Fortsetzung des Feldes auf der Vorderseite führt uns nicht zu dem Felde im physikalischen Raum auf der Rückseite, sondern führt uns in den mathematischen Hilfsraum hinein.

Fig. 36.



Man erkennt nun ohne weiteres:

Ist $U(P, Q)$ bzw. $U(P, Q')$ die verzweigte Hauptlösung mit der Unendlichkeitsstelle Q bzw. Q', so haben wir in

$$u = U(P, Q) \mp U(P, Q') \tag{4}$$

die Lösung unseres Beugungsproblems vor uns, wobei das obere Vorzeichen im Falle A., das untere im Falle B. gilt. Ebenso bei der Beugung der ebenen Welle:

Ist $U(P, \alpha)$ bzw. $U(P, \alpha')$ die verzweigte Hauptlösung, welche einer im physikalischen Raume in der Richtung α bzw. einer im mathematischen Hilfsraum in der Richtung α' einfallenden Welle entspricht, so haben wir als Lösung des Beugungsproblems der ebenen Welle bei der Polarisation A. oder B.:

$$u = U(P, \alpha) \mp U(P, \alpha'). \tag{4a}$$

In jedem Falle ist stillschweigend vorausgesetzt, daß unsere Hauptlösungen U den Bedingungen (4) bzw. (4′) im Unendlichen genügen, welche dort den Charakter der fortschreitenden Welle zu sichern hatten. Bei der Untersuchung der Spezialfälle in der nächsten Nummer wird darauf besonders zu achten sein.

Im Anschluß an Fig. 36 betrachten wir die entsprechenden Beugungsprobleme für den „komplementären“ Schirm. Darunter verstehen wir, wie üblich, einen Schirm S', der denjenigen Teil der Ebene von S bedeckt, den S frei läßt und umgekehrt (vgl. auch die Fig. 37a, b). Das Problem ist von dem vorigen nur dadurch verschieden, daß wir jetzt den physikalischen Raum anders abzugrenzen haben. Jetzt bildet S' den Verzweigungsschnitt, der den physikalischen Raum von dem mathematischen Hilfsraum trennt; beim Durchgang durch den früheren Schirm S dagegen bleibt man im physikalischen Raumexemplar. Deshalb gehört der Punkt Q' jetzt zum physikalischen Raume und darf nicht als Spiegelpunkt benutzt werden. Dagegen gehört der mit Q' vereinigt liegende Punkt Q_1' dem mathematischen Raume an. So wie Q' symmetrisch zu Q in bezug auf S liegt, liegt Q_1' symmetrisch zu Q in bezug auf S'. Wir haben daher jetzt unseren Spiegelpunkt nach Q_1' zu verlegen, bzw. wir haben die Einfallsrichtung α' durch die im anderen Raumexemplar gelegene, mit α' gleichgerichtete Einfallsrichtung α_1' zu ersetzen, um die Grenzbedingungen für S' zu erfüllen. Die Gl. (4) und (4a) stellen also gleichzeitig die Lösungen der betreffenden Beugungsprobleme für den komplementären Schirm S' dar, wenn man nur Q' durch Q_1', α' durch α_1' ersetzt.

Wir kommen ergänzungsweise auf das Problem des schwarzen Körpers zurück und behaupten, daß der Ansatz

$$u = U(P,Q) \quad \text{bzw.} \quad u = U(P,\alpha) \tag{5}$$

(also ohne Hinzufügung einer gespiegelten Wirkung) in einfachster Weise der physikalischen Vorstellung der Schwärze gerecht wird. Eine Grenzbedingung wie $u = 0$ oder $\partial u/\partial n = 0$ ist jetzt natürlich nicht erfüllt. Aber es ist erreicht, daß die Welle, die die Vorderseite des Schirmes trifft, in diesem verschwindet (nämlich in den mathematischen Hilfsraum übertritt), und daß (mangels einer Lichtquelle im mathematischen Hilfsraum) keine merkliche Strahlung vom Schirme in den physikalischen Raum zurückkehrt. Dies entspricht ja in der Tat den für den schwarzen Körper maßgebenden Vorstellungen (vgl. S. 434): fehlende Reflexion und vollkommene Absorption.

Allerdings ist auf diese Weise der schwarze Körper nicht eindeutig beschrieben. Wir könnten ersichtlich statt eines Riemannschen Doppelraumes einen dreifachen, vierfachen oder unendlichfachen Riemannschen Raum benutzen, nach demselben Schema, wie wir den Rie-

mannschen Doppelraum konstruierten, also durch fortgesetzte Aneinanderheftung weiterer Raumexemplare. Diese höheren Räume, insbesondere der unendlich hohe, werden der Vorstellung der Schwärze noch besser gerecht als der Doppelraum, da sie ja die eintretende Lichtenergie noch weniger in den physikalischen Raum zurückgelangen lassen als dieser. Von einer mathematisch-eindeutigen Realisierung des schwarzen Körpers kann aber auch beim unendlich vielfachen Riemannschen Raum nicht die Rede sein. Es zwingt uns ja nichts, die Verzweigungslinien in den mathematischen Raumexemplaren mit derjenigen im physikalischen Raume identisch zu wählen oder auch nur in jenen dieselbe Differentialgleichung der Lichtausbreitung zugrunde zu legen wie in diesem. Das Problem des schwarzen Körpers ist eben der Natur der Sache nach nicht eindeutig und willkürfrei mathematisch zu formulieren[1]).

Zugunsten unserer Auffassung des schwarzen Körpers und unserer Einführung verzweigter Lösungen überhaupt spricht der Umstand, daß die experimentelle Realisierung des schwarzen Körpers, wie sie bei den thermodynamischen Strahlungsmessungen allgemein benutzt wird, im Grunde denselben Weg geht. Der schwarze Körper besteht hier bekanntlich aus einem gleichmäßig temperierten Hohlraum, der mit einem kleinen Loch versehen ist. Dieses Loch spielt ganz dieselbe Rolle wie unser Verzweigungsschnitt, indem es jede auffallende Strahlung verschwinden läßt; der Hohlraum ist durch dieses Loch an den Beobachtungsraum gerade so angeheftet, wie unser mathematischer Hilfsraum an unser physikalisches Raumexemplar.

Wir wollen noch auf einen allgemeinen Zusammenhang aufmerksam machen zwischen der verzweigten Hauptlösung $U(P_1 Q)$ im n-fachen Riemannschen Raume und der unverzweigten Lösung U_0, Gl. (3), im schlichten Raume. Sind P_1, P_2, ..., P_{n-1} die in den aufeinanderfolgenden Raumexemplaren an gleicher Stelle mit P gelegenen Punkte, so gilt offenbar

$$(6)\quad U(P,Q) + U(P_1,Q) + U(P_2,Q) + \cdots U(P_{n-1},Q) = U_0(P,Q),$$

d. h. die symmetrische Funktion ersten Grades unserer verzweigten Lösung ist gleich der unverzweigten. In der Tat ist die Summe linker Hand eine im schlichten Raume eindeutige Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, welche nur in dem einen Punkte $P = Q$ wie $1/R$ unendlich wird, muß also mit der Hauptlösung U_0 identisch sein. [Die entsprechende Beziehung besteht auch, wenn wir links P festhalten und Q ersetzen durch die in den aufeinanderfolgenden Raumexemplaren an gleicher Stelle gelegenen Punkte Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}, entsprechend der allgemeinen Symmetriebeziehung (6) im 1. Bd., S. 572.]

[1]) Vgl. hierzu auch § 3, Schluß von 3; ferner W. Voigt, Compendium der theoret. Phys. (Leipzig 1896), Bd. 2, S. 768 und Göttinger Nachr. 1899, S. 1.

Ein solcher Zusammenhang zwischen U und U_0 gilt aber nur für die symmetrische Funktion ersten Grades; diejenigen höheren Grades sind zwar natürlich ebenfalls im schlichten Raume eindeutig, genügen aber nicht derselben Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ wie die Funktion U selbst und können daher nicht durch U_0 ausgedrückt werden. Hierin unterscheidet sich die Schwingungsgleichung oder auch die Potentialgleichung im Raume von der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ in der Ebene, deren verzweigte Lösungen auf algebraischem Wege berechnet werden können, weil hier sämtliche symmetrische Funktionen (nach Vereinigung von u mit der konjugierten Funktion v zu der Funktion $u + iv$ einer komplexen Veränderlichen) rational bekannt sind.

Fig. 37a.

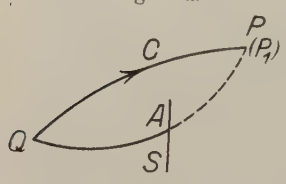
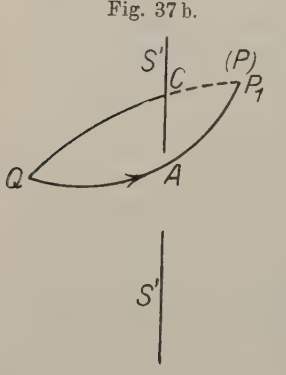


Fig. 37b.



Unser Satz (6) ist eine Verallgemeinerung und Präzisierung des sogenannten Babinetschen Prinzips. Dieses besagt, daß zwei „komplementäre" Schirme (vgl. oben) Beugungsbilder geben, deren Schwingungsvektoren sich in jedem Aufpunkt ergänzen zu der ungestörten Schwingung des einfallenden Lichtes, wie sie bei Abwesenheit der Schirme in dem betreffenden Aufpunkt vorhanden sein würde.

Ähnlich wie in Fig. 36 sei in Fig. 37a S der Schirm (statt eines Schirmes S könnten wir auch ein System von Schirmen, also im komplementären Falle ein System von Öffnungen betrachten). Wir gelangen von der Quelle Q nach dem Aufpunkt P im physikalischen Raume über den Punkt C. Gehen wir dagegen von Q über A durch den Schirm S hindurch, so gelangen wir in den mathematischen Hilfsraum (punktierter Weg) und zum Punkte P_1, der von P verschieden ist. Indem wir den Schirm als schwarz behandeln, stellen wir den Zustand in P dar durch

$$U(P,Q).$$

Von Fig. 37a unterscheidet sich Fig. 37b nur durch die schon oben im Anschluß an Fig. 36 beschriebene andere Abgrenzung des physikalischen Raumes. Als physikalischer Raum hat nämlich jetzt alles Gebiet zu gelten, das wir ohne Überschreitung von S' erreichen können. Deshalb verläuft der Weg QAP_1 ganz im physikalischen Raume, während der Punkt P und der (punktierte) Weg CP im mathematischen Hilfsraum liegt. Der im Punkte P_1 des physikalischen Raumes zu beobachtende Zustand wird dargestellt durch

$$U(P_1, Q).$$

Verabreden wir noch, den schwarzen Körper durch einen Riemannschen Doppelraum (nicht durch einen höheren Riemannschen Raum) darzustellen, so gilt nach Satz (6):

$$U(P,Q) + U(P_1,Q) = U_0, \tag{6a}$$

d. h. die im Falle der Fig. 37a und 37b an entsprechenden Stellen auftretende Lichtverteilung setzt sich zusammen zu der Beleuchtung U_0, wie sie bei Abwesenheit der Schirme vorhanden sein würde. Dies ist das Babinetsche Prinzip.

Zugleich zeigt unsere Darstellung, daß dieses Prinzip denselben Grad von Unsicherheit besitzt wie die Vorstellung des schwarzen Körpers selbst, indem Gl. (6a) nur dann zutrifft, wenn wir den schwarzen Körper durch unseren Doppelraum definieren, und strenggenommen hinfällig werden würde, wenn wir eine andere Definition (z. B. durch einen unendlichfachen Riemannschen Raum) zugrunde legen würden.

3. Die auf einer Riemannschen Fläche eindeutige Funktion der ebenen Welle. Wir beginnen mit einer Darstellung der in der schlichten Ebene eindeutigen Funktion der ebenen Welle [XII, § 1, Gl. (14)]

$$u_0 = e^{ikx} \tag{7}$$

durch ein komplexes Integral. Indem wir Polarkoordinaten r, φ einführen, einen Amplitudenfaktor A hinzufügen und als Einfallsrichtung statt der x-Achse ($\varphi = 0$) einen beliebigen Winkel α wählen, haben wir statt (7)

$$u = A\, e^{ikr\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{7a}$$

Wir erhalten ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung, wenn wir A als Funktion von α denken und irgendwie über α integrieren:

$$u = \int A(\alpha) e^{ikr\cos(\varphi - \alpha)}\, d\alpha. \tag{8}$$

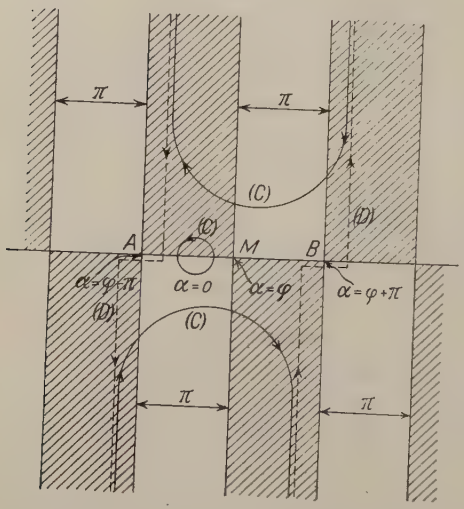
Wir wählen als Integrationsweg einen positiven Umgang in der komplexen α-Ebene um den Punkt $\alpha = 0$ und sorgen dafür, daß $A(\alpha)$ in diesem Punkte einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $1/2\pi i$ habe. Dann geht nach dem Cauchyschen Satze (8) über in (7). Wir wählen insbesondere $A(\alpha)$ als periodische Funktion von α mit der Periode 2π, nämlich

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1}. \tag{9}$$

Den Umgang um den Nullpunkt können wir beliebig deformieren, sofern wir dabei keinen Pol von A (keine der Stellen $\alpha = \pm 2\pi m$, m ganzzahlig) überschreiten. Wollen wir den Weg ins Unendliche der α-Ebene auslaufen lassen, so müssen wir Sorge tragen, daß hier die zu integrierende Funktion verschwindet. Wir schraffieren in Fig. 38 diejenigen Felder, in denen $\cos(\varphi - \alpha)$ einen positiv-imaginären Bestandteil hat; sie sind,

wie man leicht nachrechnet, begrenzt durch die Geraden $\alpha = \varphi \pm m\pi$ (m ganzzahlig). Im Unendlichen dieser schraffierten Felder wird der reelle Teil von $i\cos(\varphi - \alpha)$ negativ unendlich, also die Exponentialfunktion in (8) Null. Der in Fig. 38 eingezeichnete Integrationsweg besteht aus den beiden Schlingen C, die ins Unendliche zweier schraffierter Nachbarfelder auslaufen, und aus zwei Verbindungswegen D. Die letzteren haben wir so gewählt, daß sie durch eine Verschiebung um 2π ineinander übergehen und sich daher wegen des entgegengesetzten Durchlaufungssinnes gegenseitig aufheben. Integrieren wir also in (8) lediglich über die beiden Schlingen C, so ist dieser Integrationsweg immer noch äquivalent mit dem Umgang um $\alpha = 0$ und der Ausdruck (8) immer noch identisch mit (7). — Nunmehr läßt sich der Übergang von der schlichten Ebene zur Riemannschen Fläche mit n-fachem Verzweigungspunkt $r = 0$ unmittelbar bewerkstelligen. Wir setzen statt (9)

Fig. 38.



$$(9\,a)\quad A(\alpha) = \frac{1}{2\pi n}\,\frac{e^{i\alpha/n}}{e^{i\alpha/n}-1},$$

d. h. wir sorgen dafür, daß A die Periode $2\pi n$ annimmt und übrigens den Pol vom Residuum $1/2\pi i$ für $\alpha = 0$ beibehält. Als Integrationsweg benutzen wir nach wie vor die beiden Schlingen C (wohlgemerkt, ohne die Verbindungswege D). Jetzt wird

$$(10)\qquad u = \frac{1}{2\pi n}\int \frac{e^{i\alpha/n}}{e^{i\alpha/n}-1}\, e^{ikr\cos(\varphi-\alpha)}\, d\alpha.$$

Wir haben zu zeigen, daß dieser Ausdruck in Anlehnung an die Bedingungen (1), (2'), (3), (4') von S. 434 und 435 den folgenden Forderungen genügt:

1. u erfüllt die Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in den Koordinaten r, φ des Aufpunktes. Dies folgt unmittelbar daraus, daß wir u als Superposition ebener Wellen von der Form (7a) hergestellt haben.

2. u ist überall endlich und stetig. Dies zeigt für $r > 0$ die Darstellung durch ein stets konvergentes komplexes Integral, bei dem wir den Durchgang durch einen singulären Punkt allemal vermeiden können. Nur der Verzweigungspunkt $r = 0$ bedarf einer besonderen Betrachtung.

Für $r = 0$ wird die die Konvergenz erzeugende Exponentialfunktion gleich 1; daß das Integral trotzdem nicht divergiert, folgt daraus, daß das alsdann verbleibende Integral sich mit $z = e^{i\alpha/n}$ schreiben läßt:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z-1};$$

dieses gibt, bei der Integration über unsere Schlingen C, den endlichen Wert $1/n$. Anders der Differentialquotient $\partial u/\partial r$, welcher für $r = 0$ punktweise ∞ wird, wie die Näherungsformeln des § 2, **2** zeigen werden.

3. u ist auf unserer Riemannschen Fläche eindeutig. Setzen wir nämlich in (10) $\beta = \alpha - \varphi$, so entsteht

$$u = \frac{1}{2\pi n} \int \frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}} e^{ikr\cos\beta}\, d\beta, \tag{10a}$$

also ein Ausdruck, der in sich zurückkehrt, wenn wir φ um $2\pi n$ wachsen lassen, d. h. wenn wir mit unserem Aufpunkt einen vollen Umlauf auf der Windungsfläche ausführen. Während der Integrationsweg in α, Gl. (10), sich mit φ verschiebt (worauf wir in der folgenden Figur zurückkommen werden), liegt er in Gl. (10a) vermöge der Definition von β fest.

4. u verhält sich im Unendlichen des ersten Blattes wie die ebene Welle (7) und verschwindet im Unendlichen der übrigen Blätter. Als erstes Blatt bezeichnen wir dabei die Gesamtheit der Punkte für die $|\varphi| < \pi$, das zweite, dritte, ... n-te Blatt wird dann bestimmt durch

$$\pi < \varphi < 3\pi, \quad 3\pi < \varphi < 5\pi \ldots - 3\pi < \varphi < -\pi.$$

Zum Beweise brauchen wir nur nochmals Fig. 38 zu betrachten.

Befinden wir uns im ersten Blatt, so liegt der Pol $\alpha = 0$ innerhalb der Strecke A, B; er fällt im besonderen mit A bzw. B zusammen, wenn $\varphi = +\pi$ bzw. $-\pi$ ist. Wird nun $r = \infty$, so verschwindet die Exponentialgröße $e^{ikr\cos(\varphi-\alpha)}$ für alle Punkte der schraffierten Felder (nicht nur für das Unendlichferne derselben), weil sie hier überall einen negativen (wegen des Faktors r) unendlich großen reellen Exponenten hat. Das eine der beiden Schleifenintegrale C (im Falle unserer Figur dasjenige der positiven Halbebene) können wir daher zum Verschwinden bringen, indem wir es durch die Punkte B und M hindurch ganz auf schraffiertem Gebiete führen. Machen wir das entsprechende mit dem anderen Schleifenintegral, so bleibt der Integrationsweg an dem Pol $\alpha = 0$ hängen. Der übrige Teil des Integrals verschwindet auch jetzt, und es bleibt nur der Umgang um $\alpha = 0$ übrig, welcher uns wegen des Residuums $1/2\pi i$ bei dem Faktor (9a) wieder zum Ausdruck (7) der ebenen Welle zurückführt. Befinden wir uns dagegen in einem der anderen Blätter, so liegt der Pol $\alpha = 0$ außerhalb der Strecke AB; dann können wir beide Schleifenintegrale ohne weiteres auf schraffiertes Gebiet überführen und dadurch zum Verschwinden bringen. Im Unend-

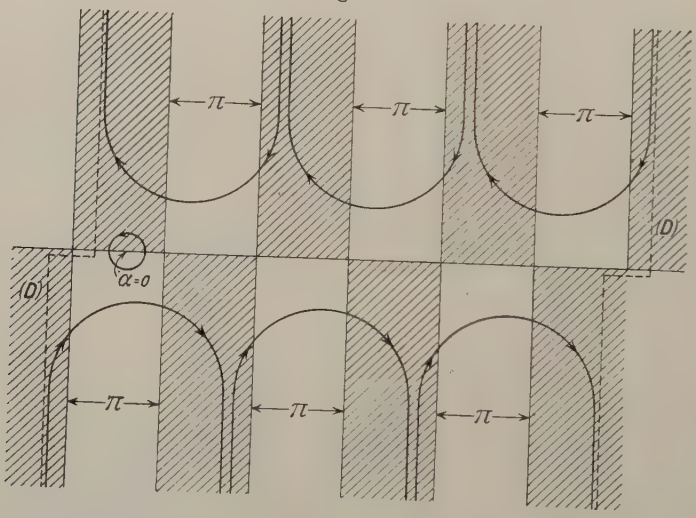
lichen aller übrigen Blätter, mit Ausnahme des ersten, verschwindet also unsere Lösung u. Die im ersten Blatte, und zwar in der Richtung $\varphi = 0$ einfallende ebene Welle pflanzt sich also nicht bis ins Unendliche der übrigen Blätter fort (in jedem endlichen Abstande r vom Verzweigungspunkt ist ihre Wirkung dagegen natürlich auch in diesen Blättern nachweisbar).

Der Vollständigkeit halber beweisen wir noch die zu Gl. (6) analoge Gleichung:

$$(11)\quad u(\varphi) + u(\varphi + 2\pi) + u(\varphi + 4\pi) + \cdots u(\varphi + 2(n-1)\pi) = u_0 = e^{ikx},$$

welche besagt, daß die Summe der Werte unserer verzweigten Lösung je in den n übereinanderliegenden Punkten unserer n Blätter gleich der

Fig. 39.



unverzweigten Funktion u_0 der ebenen Welle ist. Zum Beweise zeichnen wir in Fig. 39 die Integrationswege nebeneinander, welche der Lage unseres Punktes im ersten, zweiten, ... Blatte entsprechen, und fügen die beiden Verbindungen D hinzu, welche sich ja wegen der Periodizität um $2\pi n$ gegenseitig aufheben. In der Summe erhalten wir einen geschlossenen Umlauf um den einzigen Pol $\alpha = 0$ und daher nach dem Cauchyschen Satz wegen des Residuums $1/2\pi i$ in diesem Pol den Wert e^{ikx}, wie es die rechte Seite der Gl. (11) behauptet.

Von Interesse, insbesondere mit Rücksicht auf die bestmögliche Definition des schwarzen Körpers (vgl. S. 438), ist noch der Grenzfall der Gl. (10) für $n = \infty$. Hier ergibt sich einfach:

$$(12)\qquad u = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikr\cos(\varphi - \alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha}$$

bei gleicher Wahl des Integrationsweges wie in Fig. 38. Die endlichblättrige Riemannsche Fläche artet dabei in eine unendliche Windungsfläche aus. Im ersten Blatt derselben, $|\varphi| < \pi$, fällt eine ebene Welle ein; sie tritt in die angehängten Nachbarblätter $\pi < \varphi < 3\pi$ und $-\pi > \varphi > -3\pi$ noch etwas über, während die folgenden Blätter mehr und mehr von Lichterregung frei bleiben.

Die hier gegebene Herstellung verzweigter Lösung wurde erstmalig[1]) bei einem etwas komplizierten Problem (Beugung eines unperiodischen Röntgenimpulses statt einer periodischen ebenen Welle) entwickelt und ist in den Enzyklopädieartikel von P. Epstein[2]) übernommen worden. Der vom Verfasser ursprünglich eingeschlagene Weg[3]) (über Potentialfunktionen unendlich hoher Ordnung) war viel umständlicher.

4. Lösungen für den Riemannschen Raum. Der Riemannsche Raum habe eine und nur eine gerade, unbegrenzte Verzweigungslinie, die wir zur z-Achse machen. Er bestehe aus n Raumexemplaren („Blättern"), die sich derart um die Verzweigungslinie herumlegen, daß wir nach n-facher Umlaufung derselben zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Würden wir eine ebene Welle senkrecht zur Verzweigungslinie (also in der xy-Ebene) einfallen lassen, so würden wir auf den zweidimensionalen Fall der Riemannschen Fläche zurückkommen. Wir betrachten daher eine ebene Welle, deren Normale die Richtungskosinus α, β, γ mit der xyz-Achse bildet. Die unverzweigte Lösung im schlichten Raume lautet:

$$u_0 = e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \tag{13}$$

Wir führen Polarkoordinaten in der xy-Ebene ein:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, & \alpha &= \varrho\cos\varphi' \\ y &= r\sin\varphi, & \beta &= \varrho\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \quad \varrho = \sqrt{1-\gamma^2} > 0.$$

Dann schreibt sich (13):

$$u_0 = e^{ik\{r\varrho\cos(\varphi-\varphi')+\gamma z\}}. \tag{13a}$$

Wir ersetzen nun, ganz wie in der vorigen Nummer, den Einfallswinkel φ' durch eine (komplexe) Integrationsvariable α und fügen einen Amplitudenfaktor $A(\alpha)$ hinzu, den wir zunächst durch Gl. (9) bestimmen. Es entsteht

$$u = e^{ik\gamma z}\int A(\alpha)\, e^{ikr\varrho\cos(\varphi-\alpha)}\, d\alpha. \tag{13b}$$

---

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. **46**, 11, 1901.

[2]) Enzykl. d. Math. Wiss. V, 3, Art. 24, S. 492 ff.

[3]) Math. Ann. **47**, 317, 1896. Vgl. auch Math. Ann. **45**, 263, 1894, wo bereits eine verzweigte Lösung für die Probleme der Wärmeleitung angegeben worden war. H. Poincaré vergleicht in Acta Math. **20**, 313, 1897 die Methode der verzweigten Lösungen mit der von ihm bei entsprechenden Beugungsproblemen verwendeten Methode der Reihenentwicklungen.

Verfügen wir über den Integrationsweg in (13b) ebenso wie in Fig. 38, sei es, daß wir einen Umgang um den Punkt $\alpha = 0$ machen oder über die beiden Schleifen C integrieren, so geht (13b) ersichtlich wieder über in (13a) (mit dem belanglosen Unterschied, daß das Einfallsazimut φ' den speziellen Wert Null annimmt).

Den Übergang zum n-fachen Riemannschen Raume bewerkstelligen wir jetzt, indem wir für $A(\alpha)$ den Ausdruck (9a) einsetzen. Dadurch entsteht aus (13b):

$$u = \frac{e^{ik\gamma z}}{2\pi n} \int \frac{e^{i\alpha/n}}{e^{i\alpha/n} - 1} e^{ikr\varrho\cos(\varphi - \alpha)} d\alpha; \tag{14}$$

die Integration ist wie in Fig. 38 über die Schleifen C zu führen. Daß die Einteilung der α-Ebene in schraffierte und nicht schraffierte Felder dieselbe bleibt wie in Fig. 38, folgt daraus, daß der jetzt im Exponenten hinzukommende Faktor ϱ einen reellen positiven Wert hat.

Genau so wie in der vorigen Nummer beweist man nun, daß der Ausdruck (14) den dortigen Forderungen 1., 2., 3., 4. sowie der Gl. (11) genügt. Insbesondere läßt sich die zu (10a) analoge Form, welche die n-Deutigkeit unserer Funktion im schlichten Raume, die Eindeutigkeit im n-fachen Riemannschen auch formal zum Ausdruck bringt, unmittelbar herstellen durch die Substitution $\alpha - \varphi = \beta$:

$$u = \frac{e^{ik\gamma z}}{2\pi n} \int \frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}} e^{ikr\varrho\cos\beta} d\beta. \tag{14a}$$

Wir wenden uns von der ebenen Welle zur „Funktion des leuchtenden Punktes", also zu einer Lösung mit Unendlichkeitspunkt. Die betreffende unverzweigte Lösung lautet nach Gl. (3):

$$U_0 = \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Hier ist, unter Benutzung der oben definierten Polarkoordinaten,

$$R^2 = r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{15}$$

Wenn wir φ' durch α ersetzen, wollen wir R_α statt R schreiben; ferner wollen wir einführen:

$$\cos i\varrho = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}. \tag{15a}$$

Dann wird

$$R_\alpha^2 = 2rr'(\cos i\varrho - \cos(\varphi - \alpha)). \tag{15b}$$

Mit dem ursprünglichen Ausdruck für U_0 ist nun der folgende identisch:

$$U = \int A(\alpha) \frac{e^{ikR_\alpha}}{R_\alpha} d\alpha, \tag{16}$$

wenn wir $A(\alpha)$ durch (9) erklären und als Integrationsweg in der α-Ebene zunächst einen den Pol $\alpha = 0$ unmittelbar umschließenden

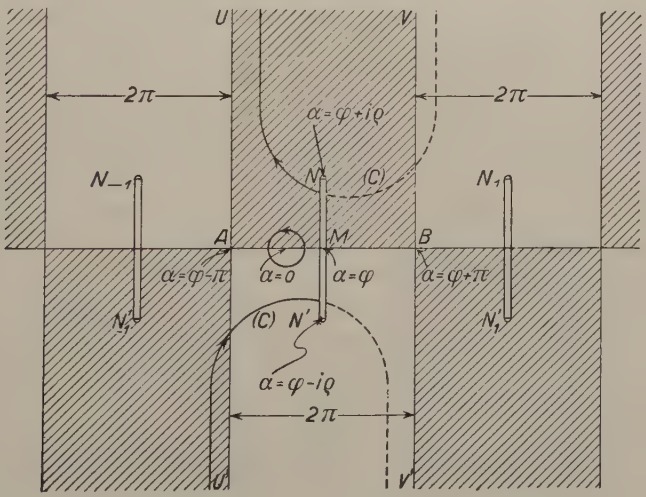
Umgang wählen. (Das Azimut φ' wird dabei zu Null spezialisiert.) Wir haben diesen Umgang zu deformieren und müssen daher überlegen, wie sich der Wertevorrat von R_α in der α-Ebene abbildet.

Wir behaupten, daß der Linienzug (Fig. 40)

$$\begin{array}{ccccccccccc} U & \rightarrow & A & \rightarrow & M & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \rightarrow & B & \rightarrow & V \\ \varphi - \pi + i\infty, & & \varphi - \pi, & & \varphi, & & \varphi + i\varrho, & & \varphi, & & \varphi + \pi, & & \varphi + \pi + i\infty \end{array}$$

der reellen Achse der R_α-Ebene entspricht. In der Tat: längs der Geraden UA ist $\alpha = \varphi - \pi + ia$, wo a eine positiv reelle Zahl ist, daher $\cos(\varphi - \alpha) = \cos(-\pi + ia) = -\cos ia$ negativ reell, also R_α^2

Fig. 40.



nach (15b) positiv reell und R_α selbst bei geeigneter Vorzeichenwahl negativ reell. Gehen wir sodann bei reellem $\alpha - \varphi$ von A bis M, so bleibt R_α negativ reell. Für die Strecke MN ist $\alpha = \varphi + ia$. Der Punkt N entspricht demjenigen Werte $a = \varrho$, für den nach (15b) $R_\alpha = 0$ wird. Würden wir über N hinausgehen, so würde R^2 negativ, also R_α imaginär werden. Wir müssen also, um auf der positiv-reellen R_α-Achse weiterzugehen, in N umkehren und nach M zurückgehen. Dann gehören zu den Strecken NM, MB und BV zunehmend positive Werte von R_α. Das von dem Linienzug $UAMNMBV$ in der α-Ebene umschlossene Gebiet haben wir schraffiert, um anzudeuten, daß es der positiv-imaginären R_α-Ebene entspricht.

Außer im Punkte $N(\alpha = \varphi + i\varrho)$ verschwindet R_α natürlich auch im Punkte $N'(\alpha = \varphi - i\varrho)$ und in allen um Vielfache von 2π differierenden Punkten $N_1, N_2, \ldots, N_{-1}, N_1', \ldots$ Die Verbindungslinie NN' bzw. $N_1, N_1', \ldots$ ist eine Verzweigungslinie für R_α. Bei

ihrer Überschreitung kommen wir, ebenso wie bei der Überschreitung einer anderen Stelle unseres Linienzuges, aus der positiv-imaginären in die negativ-imaginäre R_α-Ebene oder umgekehrt. Unsere α-Ebene ist also ihrerseits als zweiblättrige Riemannsche Fläche zu denken, entsprechend den zwei Werten $\pm R_\alpha$. Diejenigen Gebiete des oberen, in Fig. 40 dargestellten Blattes, welche nicht schraffiert sind und negativ-imaginären R_α entsprechen, sind im unteren Blatte schraffiert zu denken, da sie dort positiv-imaginären R_α entsprechen, und umgekehrt. In unserer Figur punktieren wir solche Wege, die im unteren Blatte dieser Riemannschen Fläche verlaufen, und ziehen die im oberen Blatte verlaufenden aus.

Nunmehr sind wir vorbereitet, unseren ursprünglichen Umgang um den Punkt $\alpha = 0$ nach oben und unten hin zu deformieren. Unser Integrationsweg muß, wo er im oberen (unteren) Blatte ins Unendliche gezogen wird, auf schraffiertem (nicht schraffiertem) Gebiet verlaufen, weil nur in diesem Falle die Exponentialgröße e^{ikR_α} verschwindet, wie es für die Konvergenz des Integrals notwendig und hinreichend ist. Dieser Bedingung genügen unsere beiden Schleifenwege (C), welche zusammen mit zwei in der Figur nicht eingezeichneten und sich gegenseitig aufhebenden Verbindungswegen $U \longrightarrow U'$ und $V' \longrightarrow V$ mit dem ursprünglichen Umlauf äquivalent sind. Da bei der Deformation eines Integrationsweges Verzweigungspunkte nicht überschritten werden dürfen, müssen die beiden Wege C den Verzweigungsschnitt NN' überschreiten, wobei sie in das untere Blatt übertreten und von da ab punktiert verlaufen.

Der Übergang vom schlichten zum n-fachen Riemannschen Raume ist nun ein Leichtes. Wir setzen in (16) für $A(\alpha)$ den früheren Ausdruck (9a) ein und behalten den aus den beiden Schleifen (C) bestehenden Integrationsweg bei. Die so entstehende Funktion

$$U = \frac{1}{2\pi n} \int \frac{e^{i\alpha/n}}{e^{i\alpha/n} - 1} \frac{e^{ikR_\alpha}}{R_\alpha} d\alpha \tag{17}$$

erfüllt dann die folgenden Bedingungen:

1. Sie genügt der Wellengleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ [wie jeder Ausdruck der Form (16) bei beliebigem $A(\alpha)$].

2. U ist für alle Lagen des Aufpunktes P endlich und stetig, außer wenn P mit dem Quellpunkt Q zusammenfällt, d. h. wenn

$$r = r', \quad z = z', \quad \varphi = \varphi' = 0$$

wird. Der erste Teil dieser Behauptung ist von selbst einleuchtend, da U durch ein konvergentes komplexes Integral gegeben ist, dessen Integrationsweg wir (scheinbar) stets so führen können, daß er nicht durch den Pol $\alpha = 0$ des Integranden hindurchführt. Der zweite Teil unserer

Behauptung folgt daraus, daß die Schlingen (C) zwischen die beiden Verzweigungspunkte N und N' „eingepflockt“ sind.

Wird nun $r = r'$ und $z = z'$, also $\varrho = 0$, so rücken die beiden Verzweigungspunkte NN' in den Punkt M zusammen und unsere Wege (C) führen notwendig durch M hindurch. Ein Unendlichwerden des Integrals ist auch jetzt noch nicht gegeben, wenn nicht gleichzeitig $\varphi = 0$ wird. Da nämlich der Punkt M bestimmt ist durch $\alpha = \varphi$, so wird in M für $\varphi = 0$ auch $\alpha = 0$, d. h. der Pol des Integranden rückt in den Punkt M hinein, und die Integrationswege C führen notwendig durch den Pol hindurch.

Man beachte, daß diese Schlußweise strikte voraussetzt $\varphi = 0$ (oder gleich einem Vielfachen von $2\pi n$). Ist dagegen zwar $r = r'$, $z = z'$, aber $\varphi = 2\pi, 4\pi, \ldots$ oder $2(n-1)\pi$, so ist der Pol $\alpha = 0$ verschieden von dem Punkte M, der durch $\alpha = \varphi$ definiert war; die durch M hindurchführenden Schleifen C gehen also nicht durch den Pol hindurch und unser Integral, wird nicht unendlich. Man kann dies auch so ausdrücken: Unser Quellpunkt Q mit $\varphi' = 0$ liegt im „ersten Blatte“ unseres Riemannschen Raumes. Unsere Funktion U wird nur für $P = Q$ im ersten Blatte unendlich, nicht für die an gleicher Stelle in den „anderen Blättern“ gelegenen Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. Daß sie für $P = Q$ gerade wie U_0 unendlich wird, können wir aus Gl. (6) von S. 439 ablesen. Da nämlich hier $U(P, Q), \ldots, U(P_{n-1}, Q)$ endlich sind, muß $U(P, Q)$ für $P = Q$ genau so unendlich werden wie U_0.

Natürlich kann man Gl. (6) durch eine zu Fig. 39 analoge Schlußweise verifizieren, indem man n gegeneinander je um 2π verschobene Schleifenpaare C zu einem geschlossenen Umlauf um den Pol $\alpha = 0$ ergänzt.

3. Daß U in unserem n-fachen Riemannschen Raume eindeutig ist, folgt aus der Bauart unserer Formel und wird auch äußerlich erkennbar durch die Substitution $\alpha - \varphi = \beta$, ähnlich wie in Gl. (14a).

4. Für $r = \infty$ verschwindet U im 2ten, 3ten, …, $(n-1)$ten Blatt $(|\varphi| > \pi)$ unseres Riemannschen Raumes, wie wir sogleich zeigen werden. Daß es auch im ersten Blatte $(|\varphi| \leqq \pi)$ verschwindet, folgt daraufhin aus Gl. (6), in der außer $U(P_1, Q), \ldots, U(P_{n-1}, Q)$ die rechte Seite $U_0(P, Q)$ für $r = \infty$ Null wird. Zum Beweise der ersten Behauptung bemerken wir: Überall da, wo in Fig. 40 R_α einen positiv-imaginären Bestandteil hat, verschwindet e^{ikR_α} für $r = \infty$. Infolgedessen verschwinden die ausgezogenen Wegstücke (C) auf schraffiertem, die punktierten auf nicht schraffiertem Wege. Wir können aber die Schlingen C so führen, daß sie, soweit ausgezogen, nur auf schraffiertem, soweit punktiert, nur auf unschraffiertem Wege verlaufen. Wir brauchen zu dem Ende lediglich die obere Schlinge (C) so weit herunterzuziehen, daß sie durch M und B geht, die untere so weit heraufzuziehen, daß

sie durch M und A verläuft. Der Pol in $\alpha = 0$ stört dabei keineswegs, da er nach Voraussetzung ($|\varphi| < \pi$) außerhalb der Strecke AB liegt.

Der Grenzübergang zur unendlichen Windungsfläche ($n = \infty$) läßt sich ersichtlich sowohl in Gl. (14) wie in Gl. (17) ebenso ausführen wie früher in Gl. (12).

Indem wir noch einmal auf das zweidimensionale Problem zurückkommen, können wir auch hier nach einer verzweigten Lösung mit Unendlichkeitsstelle oder, wie wir sagen können, nach der „Funktion der leuchtenden Linie" fragen. Sie wird durch eine zu (17) ganz analoge Formel bei gleicher Wahl des Integrationsweges dargestellt[1]), wobei nur die Größe e^{ikR}/R durch ihr zweidimensionales Analogon $H_0^1(kR)$ zu ersetzen ist [vgl. den nächsten Paragraphen, Gl. (3)]. Hier bedeutet H die „erste Hankelsche Funktion" vom Index 0. Die Unendlichkeitsstelle dieser Funktion sowie der daraus abgeleiteten verzweigten Lösung ist indessen nicht, wie bei der Funktion des leuchtenden Punktes, eine solche erster Ordnung, sondern, wie in der zweidimensionalen Potentialtheorie, eine logarithmische.

5. Anwendungen und Erweiterungen. Mit den in den vorangehenden Nummern konstruierten Funktionen läßt sich zunächst das Problem des unendlich dünnen, vollkommen reflektierenden Beugungsschirmes von der Gestalt einer Halbebene lösen, unter Anwendung des Spiegelungsverfahrens nach Gl. (4) bzw. (4a). Dabei ist die Lösung für den zweifachen Riemannschen Raum (die zweiblättrige Riemannsche Fläche) zu benutzen. Die n-fache oder ∞-fache Verzweigung kommt in Betracht für die schwarze Halbebene.

Wir können aber mit unseren verzweigten Lösungen auch den Fall eines vollkommen reflektierenden Keiles behandeln. Die klassische Realisierung dieses Falles ist der Fresnelsche Doppelspiegel, für dessen Theorie, wie bekannt, die Beugungserscheinungen an der Kante des Keiles (der Geraden, in der die beiden Spiegel zusammenstoßen) maßgebend sind. Sei $\theta = \pi n/m$ der im Luftraum, also $2\pi - \theta$ der innerhalb des Keilmaterials gemessene Winkel. Der Luftraum außerhalb des Keiles sei unser Gebiet 1, für welches das Beugungsproblem gestellt ist. Wir spiegeln es fortgesetzt an den Flanken des Keiles. Das Ausgangsgebiet zusammen mit $2m - 1$ spiegelbildlichen Wiederholungen desselben füllen den Raum n-fach lückenlos aus.

---

[1]) Vgl. Math. Ann., l. c. **47**, 348. Die dreidimensionale Erweiterung der dort gegebenen zweidimensionalen Lösung wurde zunächst für den Fall der Potentialtheorie (vgl. Proc. Lond. Math. Soc. **28**, 395, 1896) entwickelt. Die Übertragung auf die Wellentheorie gab H. S. Carslaw, ebenda **30**, 121, 1898. Vgl. auch Proc. Edinburgh Math. Soc. **19**, 71, 1901, wo der Fall der ebenen Welle im Riemannschen Raume behandelt wird. Nähere Diskussion bei C. W. Oseen, Arkiv f. Mat. Astr. och Fysik **7**, Nr. 25, 34, 40.

Im Gebiet 1 sei der leuchtende Punkt Q_1 gegeben. Durch einmalige Spiegelung an einer der beiden Keilflanken entstehe der Spiegelpunkt Q_1'. Man kann, statt die Spiegelung an der anderen Keilflanke fortzusetzen, das Punktepaar $Q_1\,Q_1'$ um die Keilkante durch den Winkel $2\,\theta$ fortgesetzt, nämlich $(m-1)$-mal drehen, wobei die Paare $Q_2\,Q_2', \ldots, Q_m, Q_m'$ entstehen mögen. Jeder dieser Punkte werde zum Quellpunkt einer n-fach verzweigten Lösung U gemacht. Dann erhält man in

$$u = \sum_{i=1}^{i=m} U(P, Q_i) \mp \sum_{i=1}^{i=m} U(P, Q_i') \tag{18}$$

die Lösung des Beugungsproblems mit der Oberflächenbedingung $u = 0$ (oberes Vorzeichen) bzw. $\partial u/\partial n = 0$ (unteres Vorzeichen) auf beiden Keilflanken. Der Beweis liegt darin, daß nicht nur die beiden Begrenzungsebenen des Ausgangsgebiets, sondern auch alle ihre spiegelbildlichen Wiederholungen im n-fachen Riemannschen Raume symmetrisch liegen zu sämtlichen Quellpunkten Q_i, Q_i'.

Schreibt man auf der einen Keilflanke (a) $u = 0$, auf der anderen (b) $\partial u/\partial n = 0$ vor[1]), so hat man bei dem (wie oben definierten) Keilwinkel $\theta = \pi n/m$ nicht $2\,m$, sondern $4\,m$ Spiegelungen vorzunehmen, und zwar an der Flanke (a) und ihren Bildern solche mit Vorzeichenumkehr, an der Flanke (b) und ihren Bildern solche mit Vorzeichengleichheit. Man kommt dann zu einer $2\,n$-fachen Bedeckung des Raumes, also zu $2\,n$-fach verzweigten Funktionen.

Die Übertragung auf den Fall der (zwei- oder dreidimensionalen) ebenen Welle ist evident. Ist der Winkel θ kein rationales Vielfaches von π, so hat man statt des n-fachen den ∞-fachen Riemannschen Raum heranzuziehen.

Von Interesse ist der rechtwinklige Keil, $\theta = 3\,\pi/2$. Die Lösung ist dann im dreiblättrigen Riemannschen Raume eindeutig. Dieser Fall ist von F. Reiche[2]) nach der hier angedeuteten Methode diskutiert. Denkt man an die wirkliche Ausführung eines Beugungsspaltes, verglichen mit der Größe der Wellenlänge des Lichtes, so ähnelt die einzelne Spaltbacke weniger einer unendlich dünnen Halbebene als einer tiefen Tunnelwandung. Die Verhältnisse beim Austritt der Lichtwelle kann man dann beiderseits angenähert als Beugung an einem rechteckigen Keil beschreiben.

---

[1]) Diese „gemischte" Grenzbedingung hat Interesse für die Hydrodynamik, vgl. N. Zeilon, Schwedische Akademie Handlingar, 3. Serie, **1**, 1, 1924. Die Differentialgleichung ist dabei diejenige der Potentialtheorie ($k = 0$); das ursprüngliche Gebiet ist eine Kreisscheibe, welche durch reziproke Radien (s. unten) in die Halbebene, d. h. einen Keil vom äußeren Winkel $\theta = 2\,\pi$ verwandelt wird, so daß $2\,n = 4$ wird. Die erforderlichen Lösungen sind dann im schlichten Raume vierdeutig.

[2]) Ann. d. Phys. **37**, 131, 1912.

Das Problem des Keiles läßt sich noch anders und in gewissem Sinne einfacher behandeln. Man frage zunächst, unter θ den Keilwinkel verstanden, nach einer Lösung der Wellengleichung, welche im Azimut φ die Periode 2θ hat. Diese läßt sich genau so gewinnen wie die Lösung (17) mit der Periode $2\pi n$. Man hat nur in (17) [oder den entsprechenden Formeln (10) und (14)] $2\pi n$ zu ersetzen durch 2θ, also α/n durch $\alpha\pi/\theta$. Die so entstehende Funktion $U_{2\theta}$ ist, wie wir sagen können, eindeutig in einem Keile vom Öffnungswinkel 2θ, dessen Flanken periodisch aufeinander bezogen sind. Indem wir diesen Keil halbieren und in die eine Hälfte den Pol Q, in die andere seinen Spiegelpunkt Q' setzen, bilden wir

$$u = U_{2\theta}(P, Q) \mp U_{2\theta}(P, Q'). \tag{18a}$$

Wir erfüllen dadurch die Randbedingung $u = 0$ bzw. $\partial u/\partial n = 0$ für beide Keilflanken des halbierten Gebietes[1]).

Die jetzige Formel, verglichen mit der früheren (18), zeigt offenbar an, daß die in (18) angedeuteten Summationen sich ausführen lassen und $U_{2\theta}$ ergeben. Dies gilt auch in dem Falle θ/π irrational, wo die Summen in (18) unendlich sind.

Mit Hilfe der hier verwendeten Methode kann man auch den Fall erledigen, wo die Lichtquelle nicht periodisch, sondern nach einer beliebig vorgeschriebenen Funktion der Zeit strahlt[2]). Solche Funktionen finden Anwendung bei der Beugung der Röntgenstrahlen und sind Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

A. Rubinowicz[3]) integriert diese Gleichung für einen beliebigen Keilwinkel θ und verwendet die so erhaltene Funktion, um die Lösungen der vorstehenden Differentialgleichung auf einer beliebigen Riemannschen Fläche bei beliebigem Anfangszustand schrittweise zu konstruieren.

Es ist bisher nicht gelungen, die Lösung für den Fall zweier paralleler Verzweigungslinien oder, zweidimensional gesprochen, für eine Riemannsche Fläche mit zwei im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten in endlicher Form zu konstruieren. Eine solche Lösung würde die exakte Behandlung des Spaltproblems gestatten (exakt im mathematischen Sinne bei vollkommen reflektierenden, unendlich dünnen Spalt-

[1]) H. M. Macdonald (Electric waves, S. 186, Cambridge 1902) stellte zuerst eine solche Lösung auf anderem Wege her. A. Wiegrefe (Diss. Göttingen 1912; Ann. d. Phys. **39**, 449, 1912) behandelt weitere hierher gehörige Fälle, desgleichen H. S. Carslaw (Proc. Lond. Math. Soc. **18**, 291, 1919).

[2]) Vgl. die S. 445, Anm. 1 zitierte Abhandlung. Die dortige Lösung wird auf anderem Wege abgeleitet von H. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. 1907, S. 191 und 1910, S. 422.

[3]) Math. Ann. 1927 (im Erscheinen).

backen, nicht exakt im physikalischen Sinne). Schwarzschild[1]) hat, ausgehend von der verzweigten Lösung für die Halbebene, das Spaltproblem durch ein sukzessives alternierendes Verfahren in konvergenter Form approximiert.

In der räumlichen Potentialtheorie gewinnt man aus der Lösung für eine gerade Verzweigungslinie diejenige für eine kreisförmige durch reziproke Radien[2]) und konstruiert von da aus das Potential der Kreisscheibe mittels Spiegelung. Das entsprechende optische Problem wäre die Beugung an dem kreisförmigen Schirme (z. B. Nebeltröpfchen) oder an der kreisförmigen Blende (Pupille, Fernrohr). Leider aber ist die Transformation durch reziproke Radien auf die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ nicht anwendbar. Letztere geht nämlich bei der Inversion an der Einheitskugel $r = 1$ über in die Differentialgleichung[3]) $\Delta u + k^2 u/r^4 = 0$. Die invertierte Lösung ist also keine Lösung der Wellengleichung mit konstantem, sondern mit variablem (und im Inversionszentrum singulärem!) Brechungsindex. Infolgedessen müssen bereits bei kreisförmiger Berandung des Beugungsschirmes andere Methoden (Reihenentwicklungen) ausgebildet werden, wenn man zu einer mathematisch exakten Lösung gelangen will.

Erwähnt sei noch ein Problem der Elastizitätstheorie, nämlich das der Bruchfestigkeit einer geritzten Oberfläche. Sieht man den Ritz als unendlich schmal an (Keilwinkel im elastischen Material gleich 2π), so hat man die elastischen Grenzbedingungen für die beiden Seiten einer Halbebene zu erfüllen und gelangt zum Ziele mit Hilfe von zweideutigen (auf der zweiblättrigen Riemannschen Fläche eindeutigen) Lösungen der elastischen Differentialgleichungen[4]).

§ 2. Konvergente und semikonvergente Entwicklungen der verzweigten Lösungen.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen komplexen Integrale lassen sich auf zweierlei Arten annähern, durch konvergente Reihen, welche unpraktisch sind, oder durch divergente (semikonvergente) Reihen, welche sich als äußerst wirksam erweisen werden. Der Grund für dieses gegensätzliche Verhalten der beiden Reihen liegt in der Kleinheit der Wellenlänge: da aus dimensionellen Gründen unsere Lösungen von dem Verhältnis r/λ oder, was dasselbe bedeutet, von dem Produkt kr abhängen, so interessieren uns praktisch nur die Entwicklungen in der Nähe des

[1]) Math. Ann. **55**, 177, 1902.

[2]) Vgl. die Anm. 1, S. 450 zitierte Abhandlung „Über verzweigte Potentiale im Raume", London Math. Soc. **28**, 395, 1896.

[3]) F. Pockels, Über die partitielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (Leipzig 1891), insbesondere S. 205.

[4]) K. Wieghardt, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **55**, 60, 1907.

wesentlich singulären Punktes $kr = \infty$, wo es keine konvergenten Reihen gibt, während die konvergenten Reihen in der Nähe des Punktes $kr = 0$ nur ein theoretisches Interesse beanspruchen können.

1. Vorbereitendes über Besselsche Funktionen. Wir knüpfen an Gl. (8) in § 1 an, welche bei beliebiger Wahl von A eine Lösung der Wellengleichung darstellt und setzen darin

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{ip(\alpha - \pi/2)},$$

unter p eine beliebige (rationale oder irrationale, positive oder negative) Zahl verstanden. Indem wir als Integrationsvariable $\beta = \alpha - \varphi$ einführen, erhalten wir:

$$(1) \qquad \begin{cases} u = e^{ip\varphi} Z_p(kr), \\ Z_p(\varrho) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int e^{i\varrho \cos\beta} e^{ip(\beta - \pi/2)} d\beta. \end{cases}$$

$Z_p(\varrho)$ ist die allgemeinste „Zylinderfunktion“ vom Argument ϱ und dem Index p. Sie genügt der „Besselschen Differentialgleichung“ (1. Bd., VI, § 4, 4), die wir von unserem Ausgangspunkte aus folgendermaßen ableiten. Der Ausdruck (1) ist eine Lösung der in Polarkoordinaten r, φ geschriebenen Wellengleichung

$$(1a) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0.$$

Infolgedessen haben wir für Z:

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dZ}{dr} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) Z = 0.$$

Setzen wir noch $kr = \varrho$, so können wir einfacher schreiben

$$(2) \qquad \frac{d^2 Z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dZ}{d\varrho} + \left(1 - \frac{p^2}{\varrho^2}\right) Z = 0.$$

Die verschiedenen Lösungen dieser Besselschen Differentialgleichung entstehen, wenn wir über den in (1) angedeuteten Integrationsweg in verschiedener Weise verfügen. Zur Orientierung sei bemerkt: In der Ausgangsformel (8), § 1, konnte der Integrationsweg für α beliebig gewählt werden. Bei der Substitution $\beta = \alpha - \varphi$ würde er dann aber im allgemeinen von φ abhängig werden. Soll also Z nur Funktion von ϱ sein, so muß der Integrationsweg in (8), § 1, und daher auch in (1) ins Unendliche auslaufen. Fig. 41 zeigt, ähnlich wie Fig. 38, diejenigen Gebiete (schraffiert), in denen $i\varrho\cos\beta$ bei komplexem β einen negativen reellen Teil hat, in dessen Unendlichem also das Integral

konvergiert. Die geradlinien Begrenzungen dieser Gebiete sind für reelles ϱ gezeichnet (bei komplexem ϱ deformieren sie sich).

Wir können nun unser Integral (1) aus dem Unendlichen jedes der schraffierten Gebiete nach dem Unendlichen jedes anderen führen. Aber nur zwei von diesen Integralen sind linear unabhängig. Die übrigen setzen sich aus ihnen mit konstanten Koeffizienten $e^{2\pi i m p}$ (m ganzzahlig) zusammen. Als die beiden unabhängigen Integrale wählen wir aus:

$$(3)\qquad \begin{cases} H_p^1(\varrho) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\text{I}}^{\text{II}} e^{i\varrho\cos\beta}\, e^{ip(\beta-\pi/2)}\, d\beta, \\ H_p^2(\varrho) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\text{II}}^{\text{III}} e^{i\varrho\cos\beta}\, e^{ip(\beta-\pi/2)}\, d\beta. \end{cases}$$

Die Integrationsgrenzen I, II, III deuten auf das Unendliche der schraffierten Gebiete I, II, III hin. Die Wege für H^1 und H^2 sind mit Rücksicht auf Späteres speziell durch die Punkte $\beta = 0$ und $\beta = \pi$

Fig. 41.

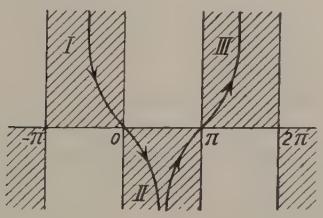
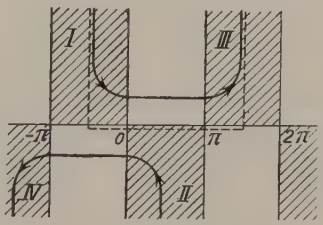


Fig. 42.



hindurchgelegt, und zwar unter 45^0 gegen die reelle β-Achse geneigt, können aber im übrigen natürlich beliebig deformiert werden. Insbesondere sieht man, daß die Aufeinanderfolge der Wege von H^1 und H^2 identisch wird mit dem direkten Übergang von I nach III.

Wir definieren

$$(4)\qquad J_p(\varrho) = \frac{1}{2}\,(H_p^1(\varrho) + H_p^2(\varrho)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\text{I}}^{\text{III}} e^{i\varrho\cos\beta}\, e^{ip(\beta-\pi/2)}\, d\beta$$

und stellen den hier gemeinten Weg noch einmal in Fig. 42 (obere Hälfte) dar. H^1 und H^2 sind die sogenannten Hankelschen Funktionen, vgl. VIII, § 3, 8, J die Besselsche[1]) Funktion im engeren Sinne. Die ersteren werden unendlich für $\varrho = 0$, die letztere bleibt für $\varrho = 0$ und $p \geqq 0$ endlich. In der Tat wird das Verhalten aller drei Funk-

[1]) Sie kommt für $n = 0$ schon in Daniel Bernoullis Theorie der schwingenden Saite (1732) und in Fouriers Théorie analytique de la chaleur (1822) vor.

tionen für $\varrho = 0$ gegeben durch den für die betreffenden Integrationsgrenzen zu bildenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi i p}\, e^{ip(\beta - \pi/2)},$$

woraus das Unendlichwerden an der Grenze II bzw. Endlichbleiben an den Grenzen I und III unmittelbar folgt. Bei ganzzahligem $p = n$ läßt sich der Weg I $\rightarrow$ III, wie Fig. 42 durch den gestrichelten Linienzug andeutet, auf ein Stück der reellen Achse von der Länge 2π reduzieren, da sich dann die Wege parallel der imaginären Achse aufheben. Man kann (bei geringfügiger Abänderung der Integrationsgrenzen) schreiben:

$$J_n(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\varrho\cos\beta}\, e^{in(\beta - \pi/2)}\, d\beta \tag{5}$$

und kommt somit auf die ursprüngliche Besselsche Integraldarstellung für ganze Indizes zurück, vgl. VIII, § 3, Gl. (12). Ihre naturgemäße Verallgemeinerung für beliebige Indizes, auf die es uns bei den Beugungsproblemen gerade ankommt, ist unsere Formel (4). Gl. (5) läßt auch den Grund für die von uns vorgenommene Normierung erkennen: Der Faktor $1/2\pi$ bewirkt, daß $J_0(0) = 1$ ist, der Faktor $e^{-in\pi/2}$ hat zur Folge, daß $J_n(\varrho)$ für reelles ϱ reell wird.

Vertauschen wir in (4) β mit $-\beta$, so entsteht

$$J_p(\varrho) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{II}}^{\text{IV}} e^{i\varrho\cos\beta}\, e^{-ip(\beta + \pi/2)}\, d\beta \tag{4 a}$$

mit dem in Fig. 42 (untere Hälfte) dargestellten Integrationswege.

$J_p(\varrho)$ läßt sich in die folgende (natürlich auch aus unserem Integral zu erhaltende) Reihe entwickeln:

$$J_p(\varrho) = \frac{\varrho^p}{2^p\, \Pi(p)} \left(1 - \frac{\varrho^2}{2(2p+2)} + \frac{\varrho^4}{2\cdot 4\,(2p+2)\,(2p+4)} - \cdots\right), \tag{4 b}$$

vgl. VIII, § 3, Gl. (6). J verschwindet also wie ϱ^p bei positivem p. Das Verhalten von H^1 und H^2 bei $\varrho = 0$ und ganzzahligem p ist in VIII, § 3 untersucht. Insbesondere gilt für $p = 0$ in der Umgebung von $\varrho = 0$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \dfrac{i\pi}{2} H_0^1(\varrho) = -J_0(\varrho) \log \dfrac{\gamma\varrho}{2i} + \cdots & \gamma = 1{,}7811 \;\; = e^C, \\[2ex] \dfrac{i\pi}{2} H_0^2(\varrho) = +J_0(\varrho) \log \dfrac{\gamma i\varrho}{2} + \cdots & C = 0{,}57722 = \text{Mascheronische Konstante, vgl. I, § 4, Gl. (38).} \end{array}\right. \tag{6}$$

Bei beliebigem p gilt:

(6a) $$H^1_{-p}(\varrho) = e^{ip\pi} H^1_{+p}(\varrho), \quad H^2_{-p}(\varrho) = e^{-ip\pi} H^2_{+p}(\varrho),$$

wie man leicht sieht, wenn man in den Integraldarstellungen (3) β mit $-\beta$ vertauscht.

Wir erwähnen ferner die sogenannten Umlaufrelationen[1]) der Hankelschen Funktionen. Man leitet dieselben von unserem Standpunkt[2]), d. h. von den Definitionsgleichungen (3) für H^1_p und H^2_p ausgehend, folgendermaßen ab: Man setze für ϱ ein $\varrho e^{i\vartheta}$ und lasse ϑ kontinuierlich variieren von 0 bis $m\pi$, wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist. Dabei verschieben sich die Schraffierungen in Fig. 41 und mit ihnen die Integrationswege für H^1 und H^2 in kontinuierlicher Weise mit ϑ. Indem man die verschobenen Integrationswege aus den ursprünglichen zusammensetzt, erhält man lineare Beziehungen zwischen den Werten H^1, H^2 vom Argument $\varrho e^{m\pi i}$ und denen vom Argument ϱ. Insbesondere ergibt sich für $m = \pm 1$ bei beliebigem p:

(6b) $$H^1_p(\varrho e^{i\pi}) = e^{-(p+1)i\pi} H^2_p(\varrho), \quad H^2_p(\varrho e^{-i\pi}) = e^{(p+1)i\pi} H^1_p(\varrho),$$

von denen die zweite aus der ersten hervorgeht, wenn man in letzterer ϱ mit $\varrho e^{-i\pi}$ vertauscht. Für $p = 0$ wird z. B.:

(6c) $$H^1_0(\varrho e^{i\pi}) = -H^2_0(\varrho).$$

Von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen ist das Verhalten von H^1 und H^2 bei großem ϱ. Alsdann verschwindet $e^{i\varrho\cos\beta}$ in allen Punkten der schraffierten Gebiete der Fig. 41 und wird in allen Punkten der unschraffierten Gebiete unendlich groß (ϱ als reell vorausgesetzt). Unser Integrationsweg für H^1 überschreitet also, von verschwindenden Werten in I kommend, bei $\beta = 0$ einen „Paß“ mit rechts und links ansteigenden großen Werten des Integranden und senkt sich in II wieder zu verschwindenden Werten hinab. Entsprechendes gilt für H^2 mit Bezug auf den „Paß“ in $\beta = \pi$. Nur die unmittelbare Umgebung der Paßhöhe liefert merkliche Beiträge zum Integral. Die Paßhöhen selbst nennen wir auch, wegen des Verhaltens der zu integrierenden Funktion in der Umgebung des Passes, „Sattelpunkte“.

Dabei wird man den Sattel in der Richtung des steilsten Abfalles („steepest descent“) des absoluten Betrages der Exponentialfunktion verlassen und in der Richtung des steilsten Anstiegs erklimmen müssen, um möglichst schnell in das Gebiet der niedrigen Funktionswerte zu kommen bzw. möglichst lange in diesem zu bleiben. Das bedeutet in

---

[1]) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Kap. 1, § 5. Leipzig 1904. Vgl. insbesondere die Gl. (6) und (7) daselbst.

[2]) Dieser Standpunkt wird insbesondere durchgeführt von L. Hopf und A. Sommerfeld, Über komplexe Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen, Arch. d. Math. u. Phys. **18**, 1, 1911.

unserem Falle, daß man beide Pässe unter 45^0 gegen die reelle Achse überschreiten muß, wie in Fig. 41 angedeutet, d. h. man muß sich gleich weit von den Anhöhen rechts und links halten.

Die allgemeine Regel, welche zu dieser Wahl des Integrationsweges führt, lautet nach P. Debye (vgl. auch IX, § 3, 2): Man zerlege die den unendlich werdenden Parameter (in unserem Falle ϱ) multiplizierende Funktion f (in unserem Falle $i\cos\beta$) in einen reellen und imaginären Teil u und v. Der Ausdruck $e^{\varrho u}$ ist der absolute Betrag der Exponentialfunktion. ds sei die Richtung der stärksten Änderung von u, in der wir integrieren sollen, dn die Richtung senkrecht dazu. Dann gilt $du/dn = 0$ und wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (XVI, § 2, S. 544) auch $dv/ds = 0$, d. h. der Integrationsweg ist zu bestimmen durch die Gleichung

$$v = v_0 = \text{Const},$$

wo v_0 den Wert von v im Sattelpunkte bedeutet.

Dies liefert in unserem Falle bei H^1: Sattelpunkt $\beta = 0$; $f = i\cos\beta$, im Sattelpunkte $f_0 = i = v_0$, in der Nähe desselben $f = i\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$; setzt man $\beta = se^{i\varphi}$, so verlangt die Gleichung $v = v_0$, daß $\frac{s^2}{2}\cos 2\varphi = 0$, also $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ sei. $\left(\varphi = +\frac{\pi}{4}\right.$ würde vom Sattelpunkte aus in das nicht schraffierte Gebiet führen.) Der reelle Teil von f wird $u = \frac{s^2}{2}\sin 2\varphi = -\frac{s^2}{2}$. Ferner gilt $d\beta = ds\, e^{-i\pi/4}$; die Integration ist auf die Umgebung des Sattelpunktes, sagen wir von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ zu erstrecken, wo ε eine beliebig kleine, von r unabhängige Größe bedeutet.

Die in (3) vorkommende zweite Exponentialfunktion, welche ϱ nicht enthält, kann als langsam veränderliche Funktion angesehen und durch ihren Wert im Sattelpunkte ersetzt werden. Der Ausdruck für H^1 in (3) geht daher über in

$$H_p^1(\varrho) = \frac{1}{\pi}\, e^{i\left(\varrho - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{\varrho s^2}{2}}\, ds. \tag{7}$$

Bei der Substitution $t = s\sqrt{\varrho/2}$ werden die Grenzen des Integrals $\pm\infty$ für $\varrho \to \infty$ und das Integral selbst gleich $\sqrt{2\pi/\varrho}$. Indem wir das entsprechende Verfahren auf H^2 anwenden, erhalten wir die asymptotischen Darstellungen:

$$\begin{cases} H_p^1(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\, e^{i\left(\varrho - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}, \\ H_p^2(\varrho) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varrho}}\, e^{-i\left(\varrho - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}. \end{cases} \tag{8}$$

Dieses einfache asymptotische Verhalten begründet die besondere Wichtigkeit der Hankelschen Funktionen für die Anwendungen.

Bei genauerer Approximation (man führe $f - f_0$ als neue Integrationsvariable ein und entwickle nach dieser den Ausdruck $e^{ip\beta} d\beta$) erhält man für H^1 und H^2 semikonvergente, nach negativen Potenzen von ϱ fortschreitende Reihen [s. unten Gl. (8 b)], deren erste Glieder die Ausdrücke (8) sind.

Der besondere Vorzug der „Paßmethode“ oder „Methode der Sattelpunkte“ besteht darin, daß sie frei ist von allen formalen Rechnungen, derart, daß eine größere Komplikation im Aufbau der zu approximierenden Integrale ihre Wirksamkeit in keiner Weise begrenzt. Dies wird unten in **3** deutlich werden.

Aus (8) folgt nach (4):

$$J_p(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \varrho}} \cos\left(\varrho - \frac{2p+1}{4}\pi\right). \tag{8a}$$

Die drei Formeln (8) und (8 a) bilden das genaue zweidimensionale Analogon zu den eindimensionalen Schwingungstypen von exponentiellem Charakter (ebene Wellen). Wir können gegenüberstellen:

	Ebene Wellen:	Zylindrische Wellen:
Fortschreitende Wellen	e^{+ikx}	$H_p^1(kr)$
	e^{-ikx}	$H_p^2(kr)$
Stehende Wellen	$\cos kx$	$J_p(kr)$
	$\sin kx$	$N_p(kr)$

Die hier eingeführte „Neumannsche Funktion“ N wird nach Jahnke-Emde, Funktionentafeln, in Analogie zu (4) definiert durch

$$N_p(\varrho) = \frac{1}{2i}\left(H_p^1(\varrho) - H_p^2(\varrho)\right)$$

und hängt mit der sonst gebräuchlichen Funktion Y_p folgendermaßen zusammen [wegen der Bedeutung von γ siehe Gl. (6)]:

$$\frac{\pi}{2} N_p = Y_p - \log\frac{2}{\gamma} \cdot J_p.$$

Die Formeln (8) gelten auch für komplexe Argumente, wenn man die ϱ-Ebene längs der negativen bzw. positiven imaginären Achse aufschneidet[1]). Bei einem vollen Umgang um den Nullpunkt ändern sich die Darstellungen (8) entsprechend den Umlaufrelationen [siehe oben Gl. (6 b, c)]. Wie von einem Hauptzweige des Logarithmus kann man von den Hauptzweigen der Hankelschen Funktionen sprechen. Setzt man $\varrho = |\varrho| e^{i\vartheta}$, so umfaßt der Hauptzweig von H^1 bzw. H^2 das Gebiet $-\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$ bzw. $-3\pi/2 < \vartheta < +\pi/2$. Der Hauptzweig von

[1]) H. Hankel, Math. Ann. **1**, 497, 1869.

H^1 verschwindet im Unendlichen der ganzen positiv-imaginären Halbebene, der von H^2 im Unendlichen der ganzen negativ-imaginären Halbebene. $J_p(\varrho)$ dagegen verschwindet nur im Unendlichen der reellen Achse und wird sowohl in der positiv- wie in der negativ-imaginären Halbebene asymptotisch unendlich. Nach dem über den Gültigkeitsbereich der Formeln (8) Gesagten gilt Formel (8a) in dem Gebiet $-\pi/2 < \vartheta < +\pi/2$.

Wir merken noch als besondere Folge von (4) und (8) die wichtige Beziehung an:

$$\frac{J_p(\varrho)}{J'_p(\varrho)} = +i, \tag{8b}$$

gültig für jedes komplexe, unendlich groß werdende ϱ mit positiv imaginärem Bestandteil.

Die vollständige semikonvergente Entwicklung der ersten Hankelschen Funktion lautet:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\pi}{2}\varrho}\, H_p^1(\varrho) \\ &= e^{i\left(\varrho - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}\left\{1 + \frac{p^2 - (1/2)^2}{1!\,(2i\varrho)} + \frac{(p^2-(1/2)^2)(p^2-(3/2)^2)}{2!\,(2i\varrho)^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(p^2-(1/2)^2)(p^2-(3/2)^2)(p^2-(5/2)^2)}{3!\,(2i\varrho)^3} + \cdots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8c}$$

Dieselbe Formel gilt auch für die zweite Hankelsche Funktion $H_p^2(\varrho)$, wenn man überall (aber nicht im Argument ϱ) $+i$ durch $-i$ ersetzt. Der $\{\}$-Ausdruck in (8b) ist identisch mit der Größe $P_p(\varrho) + iQ_p(\varrho)$ von Bd. 1, S. 356.

Gl. (8c) zeigt, daß bei halbzahligem Index $\left(p = \frac{2n+1}{2}\right)$ die Reihe mit dem $(n+1)$-ten Gliede abbricht, daß also dann

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\varrho}\, H_p^{1,2}(\varrho)\, e^{\mp i\left(\varrho - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} \tag{8d}$$

eine ganze Funktion n-ten Grades von $1/\varrho$ wird. Solche „halbzahligen" Hankelschen sowie die entsprechenden Besselschen Funktionen spielen in der Optik eine besondere Rolle bei allen Problemen der Kugelsymmetrie (vgl. § 4 und Kap. 16, § 4). Da eine ganze Funktion n-ten Grades in der komplexen Ebene n Wurzeln hat, so besitzt die Funktion $H_p(\varrho)$ für $p = \frac{2n+1}{2}$ genau n-Wurzeln. Die allgemeine Regel für beliebiges p ist aus Fig. 43 ersichtlich: Man trage zu jeder Abszisse $p = \frac{2n+1}{2}$ die Anzahl n der Wurzeln als Ordinate auf und ziehe

durch die Endpunkte dieser Ordinaten, die in Fig. 43 durch die punktierte Gerade verbunden sind, abwechselnd lotrechte und wagerechte Strecken. Die so entstehende Treppe von der Stufenbreite und -höhe 2 stellt die Anzahl der Wurzeln im Hauptzweig von $H_p(\varrho)$ bei beliebigem p dar[1]). Die betreffenden Wurzeln liegen bei $H_p^1(\varrho)$ in der negativen Halbebene (haben negativ-imaginären Bestandteil), bei $H_p^2(\varrho)$ in der positiven Halbebene. Man kann nämlich leicht mit dem Greenschen Satze beweisen[2]), daß $H_p^1(\varrho)$ keine Wurzeln in der positiven, $H_p^2(\varrho)$ keine in der negativen Halbebene haben kann. p ist dabei als reell vorausgesetzt.

Fig. 43.

Bei der Ableitung der Formeln (8) bzw. (8c) wurde $e^{ip\beta}$ als langsam veränderliche Funktion behandelt. Das ist nur zulässig, solange $p \ll \varrho$ ist. Der gegenteilige Fall ($p \sim \varrho$ oder $p \gg \varrho$) ist von Debye[3]) nach der Paßmethode behandelt worden (vgl. IX, § 3, **2**). Hierbei muß zunächst die Lage der Sattelpunkte und der Verlauf des Paßweges neu festgestellt werden. Auf die Bedeutung der so zu gewinnenden Debyeschen Näherungen für optische Zwecke werden wir wiederholt zurückkommen. Sie vermitteln, allgemein zu reden, den Übergang von der Wellenoptik zur Strahlenoptik.

2. Konvergente Darstellung der verzweigten Funktion der ebenen Welle durch Reihen mit Besselschen Funktionen. Wir gehen aus von Gl. (10a) in § 1. Für den in der positiv-imaginären β-Halbebene gelegenen Teil des Integrationsweges (vgl. Fig. 38), wo $|e^{i\beta/n}| < 1$ ist, entwickeln wir:

$$\frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}} = -e^{\frac{i(\varphi+\beta)}{n}}\left(1 + e^{\frac{i(\varphi+\beta)}{n}} + e^{\frac{2i(\varphi+\beta)}{n}} + \ldots\right).$$

Ausführung der in (10a) vorgesehenen Integration liefert:

$$-\frac{1}{2\pi n}\sum_{1}^{\infty}{}^{(m)}\, e^{i\frac{m\varphi}{n}} \int_{\mathrm{III}}^{\mathrm{I}} e^{ikr\cos\beta}\, e^{i\frac{m\beta}{n}}\, d\beta,$$

[1]) H. Falckenberg und E. Hilb, Gött. Nachr. 1916, S. 190.

[2]) D. Hondros, Ann. d. Phys. **30**, 905, 1909, vgl. S. 918 ff. Der Beweis läßt sich unmittelbar auf beliebige Indizes p erweitern, wenn man daselbst in (29) setzt:

$$u = H_n^1(\alpha r)\, e^{ip\varphi}, \quad v = H_n^2(\beta r)\, e^{-ip\varphi}.$$

[3]) P. Debye, Math. Ann. **67**, 535, 1909 und (für komplexe Argumente oder Indizes) Münch. Akad. 1910.

wobei die Bezeichnung der Integrationsgrenzen im Anschluß an Fig. 42 gewählt ist. Nach der Definitionsgleichung (4) für $J_p(\varrho)$ ist die vorstehende Summe identisch mit

$$(9) \qquad \frac{1}{n} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} e^{i\frac{m}{n}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} J_{\frac{m}{n}}(kr).$$

Zu Gl. (10a) in § 1 zurückkehrend, betrachten wir andererseits den in der negativ-imaginären β-Halbebene gelegenen Teil des Integrationsweges, wo $|e^{i\beta/n}| > 1$ ist. Hier haben wir folgendermaßen zu entwickeln:

$$\frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}} = 1 + e^{\frac{-i(\varphi+\beta)}{n}} + e^{\frac{-2i(\varphi+\beta)}{n}} + \cdots$$

Ausführung der in (10a) vorgeschriebenen Integration liefert, mit der in Fig. 42 erklärten Bezeichnung der Integrationsgrenzen:

$$\frac{1}{2\pi n} e^{-i\frac{m}{n}\varphi} \int_{\text{IV}}^{\text{II}} e^{ikr\cos\beta} e^{-i\frac{m}{n}\beta} d\beta.$$

Nach Gl. (4a) können wir hierfür schreiben:

$$(9a) \qquad \frac{1}{n} \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} e^{i\frac{m}{n}\left(-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} J_{\frac{m}{n}}(kr).$$

Die Summe von (9) und (9a) ergibt als die gesuchte Reihendarstellung auf der Riemannschen Fläche:

$$(10) \qquad u = \sum_{0}^{\infty} c_m e^{i\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}} J_{\frac{m}{n}}(kr)\cos\frac{m}{n}\varphi, \qquad \begin{cases} c_m = \frac{2}{n} \cdots m > 0, \\ c_m = \frac{1}{n} \cdots m = 0. \end{cases}$$

Insbesondere folgt daraus für $n = 1$, wo u gleich $e^{ikr\cos\varphi}$ wird (ebene Welle in der schlichten Ebene), eine Reihe mit Besselschen Funktionen von ganzzahligem Index, vgl. 1. Bd., VIII, § 3, Gl. (12″), die oft als Definitionsgleichung der Besselschen Funktionen benutzt wird. Lassen wir andererseits $n = \infty$ werden (ebene Welle auf der unendlichen Windungsfläche), so erhalten wir aus (10) ein Integral mit Besselschen Funktionen von kontinuierlich veränderlichem Index. Setzen wir nämlich $\mu = m/n$, also $d\mu = 1/n$, $c_m = 2\,d\mu$, so entsteht aus (10) durch Grenzübergang die eigenartige Formel

$$(10a) \qquad u = 2\int_{0}^{\infty} e^{i\mu\frac{\pi}{2}} J_\mu(kr)\cos\mu\varphi\, d\mu.$$

Gl. (10) ist das genaue Analogon der Potenzreihen in der zweidimensionalen Potentialtheorie. Hier haben wir in der Umgebung eines

regulären Punktes bzw. eines n-fachen Verzweigungspunktes als allgemeine Darstellung des Potentials:

$$u = \sum r^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

bzw.

$$u = \sum r^{\frac{m}{n}} \left(A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right)$$

oder bei komplexer Zusammenfassung ($re^{i\varphi} = z$ gesetzt und das konjugierte Potential hinzugefügt):

$u = \sum C_m z^m$ bzw. $u = \sum C_m z^{\frac{m}{n}}$ (sogenannte Puiseuxsche Reihen).

Ebenso wie die Wellengleichung für $k = 0$ in die Potentialgleichung übergeht, geht auch die Besselsche Funktion $J_{n/m}(kr)$ nach Gl. (5) in die entsprechende Potenz $r^{m/n}$ und unsere Darstellung (10) in eine Puiseuxsche Reihe bzw. deren reellen Teil über.

Hieraus folgt zugleich, daß in der Nähe des Verzweigungspunktes, d. h. für $r = 0$, zwar u selbst endlich bleibt, nicht aber $\partial u/\partial r$. Aus (10) und (4b) folgt nämlich für $r = 0$

$$(11) \quad u = \frac{1}{n}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}-1}}{\prod\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cos\frac{\varphi}{n} + \cdots = \infty,$$

wobei wir nur das erste, am stärksten unendlich werdende Reihenglied hingeschrieben haben. Die Art des Unendlichwerdens von $\partial u/\partial r$ bringt es mit sich, daß $r\partial u/\partial r$ für $r = 0$ verschwindet. Hierauf wurde bereits S. 435, Anm. 1 hingewiesen.

Die Reihenentwicklung (10) überträgt sich von der Riemannschen Fläche auf den Riemannschen Raum. Das in Gl. (14a) § 1 auftretende Integral ist ja von ganz derselben Form wie das in Gl. (10a) § 1. Die vorstehende Rechnung liefert daher für die Funktion der ebenen Welle im n-fachen Riemannschen Raume (γ = Kosinus zwischen Einfallsrichtung und Verzweigungslinie, $\varrho = \sqrt{1-\gamma^2}$)

$$(12) \quad u = e^{i\gamma z} \sum_0^\infty c_m e^{i\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}} J_{\frac{m}{n}}(k\varrho r) \cos\frac{m}{n}\varphi.$$

Auch dem Problem des „Keils“ läßt sich unsere Reihenentwicklung durch eine leichte Umänderung anpassen. Handelt es sich wie S. 452 um ein keilförmiges Gebiet vom Öffnungswinkel 2θ, dessen Flanken periodisch aufeinander bezogen sind, so hat man nur, wie daselbst bemerkt, n zu ersetzen durch θ/π. Die Abhängigkeit vom Azimut φ ist dann gegeben durch $\cos m\pi\frac{\varphi}{\theta}$ und zeigt in der Tat die Periode 2θ an.

Die Indizes der Besselschen Funktionen in der dann resultierenden, zu (12) analogen Gleichung werden $m\pi/\theta$.

Will man nun aber z. B. von der Reihe (10) aus zur wirklichen Berechnung der Lösung u schreiten, so stößt man, wenigsten im optischen Falle, auf eine praktische Unmöglichkeit. Da $kr = 2\pi\frac{r}{\lambda}$ ist und da der Aufpunkt in allen optischen (nicht in den akustischen) Beugungsproblemen jedenfalls eine sehr große Anzahl Wellenlängen von der Schirmkante entfernt liegt, so hätten wir die Besselschen Funktionen für ein sehr großes Argument zu berechnen. Wir hätten also die asymptotische Formel (8) zu benutzen, solange der Index der Besselschen Funktionen klein ist gegen ihr Argument, und würden alle diese Reihenglieder merklich von gleicher Größe finden. Eine wirkliche Abnahme der Reihenglieder würde erst im Geltungsbereich der Debyeschen asymptotischen Formeln stattfinden (vgl. den Schluß von 1). Das bedeutet aber, daß die Konvergenz, obwohl theoretisch vorhanden, praktisch völlig unzureichend ist; die Anzahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder wäre von der Größenordnung r/λ. Deshalb müssen wir uns im folgenden zu einer ganz anderen (theoretisch divergenten) Art der Approximation wenden.

Handelt es sich nicht um die überall endliche verzweigte Lösung u (die ebene Welle), sondern um eine Lösung U mit logarithmischer Unendlichkeitsstelle (die von einer leuchtenden Linie ausgehende Zylinderwelle), so haben wir nach S. 450 von der Darstellung (17) in § 1 auszugehen und darin e^{ikR_α}/R_α zu ersetzen durch $H_0^1(kR_\alpha)$, wo H_0^1 die erste Hankelsche Funktion vom Index Null ist. Auch für diese Lösung U gilt eine Reihenentwicklung nach Besselschen Funktionen, welche nunmehr der MacLaurinschen Reihe in der Funktionentheorie analog ist. Sie lautet[1]) je nachdem $r \gtrless r'$ ist (r = Abstand des Aufpunktes vom Verzweigungspunkt, r' = Abstand des Quellpunktes, d. h. der leuchtenden Linie):

$$(12\,a)\qquad U = \begin{cases} \sum c_m J_{\frac{m}{n}}(kr) H^1_{\frac{m}{n}}(kr') \cos\frac{m}{n}\varphi \ldots r < r', \\ \sum c_m J_{\frac{m}{n}}(kr') H^1_{\frac{m}{n}}(kr) \cos\frac{m}{n}\varphi \ldots r > r'. \end{cases}$$

Dabei haben die Koeffizienten c_m dieselbe Bedeutung wie in (10). Für den Fall $n = 1$ wird speziell

$$(12\,b)\qquad U = H_0^1(kR) = H_0^1\left(k\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi}\right);$$

die Gl. (12 a) wird dann identisch mit dem sogenannten Additionstheorem der Hankelschen Funktion H, vgl. § 3, 2.

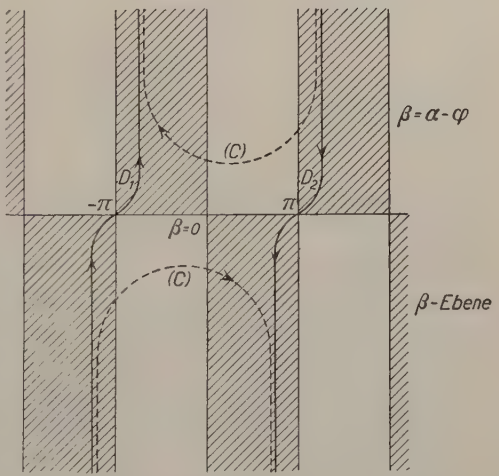
[1]) A. Sommerfeld, l. c. Math. Ann. **47**, vgl. speziell S. 355 und 356, Gl. (12) und (13).

3. Asymptotische Darstellung der verzweigten Funktion der ebenen Welle. Wir gehen wieder aus von Gl. (10a) in § 1 und zeichnen den Integrationsweg von Fig. 38 in der Variablen $\beta = \alpha - \varphi$ punktiert ein, vgl. Fig. 44. Unsere Lösung (10a) schreiben wir:

$$(13)\qquad \begin{cases} u = \int \psi(\beta)\, exp(ikr\cos\beta)\, d\beta, \\ \psi(\beta) = \dfrac{1}{2\pi n}\, \dfrac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}}. \end{cases}$$

Wir nehmen zunächst an, daß $|\varphi| > \pi$ ist, daß also unser Aufpunkt nicht dem ersten Blatt der n-blättrigen Riemannschen Fläche angehört (vgl. S. 443). Dann ist $\psi(\beta)$ auf der Strecke $-\pi < \beta < +\pi$ regulär und wir können die beiden Integrationswege (C) in die beiden Äste D_1, D_2 der Fig. 44 überführen. Dieselben sind prinzipiell identisch mit den beiden Verbindungswegen (D) der Fig. 38 und unterscheiden sich von letzteren nur durch die Art, wie wir sie durch die Punkte $\beta = \pm\pi$ hindurchführen. Unsere Wege D_1, D_2 verlaufen durchweg auf schraffiertem Gebiet, wo $ikr\cos\beta$ einen negativ reellen und für $kr \to \infty$ unendlich großen Bestandteil hat. Deshalb verschwindet die Integration über D_1 und D_2 im allgemeinen. Kritisch sind nur die Stellen $\beta = \pm\pi$. Diese sind Sattelpunkte der Funktion $f(\beta) = ik\cos\beta$, weil hier $df/d\beta = 0$ wird. Man muß nun, genau so wie S. 458, diese Punkte in der Richtung unter 45^0 gegen die reelle Achse (vgl. Fig. 44) durchlaufen, um auf der Fläche des absoluten Betrages von $exp(ikr\cos\beta)$ Linien stärksten Falles und stärksten Anstieges zu beschreiben. Wir setzen für die Umgebung von $\beta = \mp\pi$:

Fig. 44.



$$\beta \pm \pi = s\, e^{i\pi/4}, \quad d\beta = ds.\, e^{i\pi/4}, \quad \psi(\beta) = \frac{1}{2\pi n}\, \frac{e^{\mp i\pi/n}}{e^{\mp i\pi/n} - e^{-i\varphi/n}},$$

indem wir $\psi(\beta)$ als langsam veränderliche Funktion (s. unten) behandeln, und erhalten zunächst

$$(14)\qquad u = \frac{1}{2\pi n}\, e^{-ikr + i\pi/4} \left\{ \frac{e^{-i\pi/n}}{e^{-i\pi/n} - e^{-i\varphi/n}} - \frac{e^{+i\pi/n}}{e^{+i\pi/n} - e^{-i\varphi/n}} \right\} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{\frac{-krs^2}{2}}\, ds.$$

In dem Integral bedeutet ε, genau so wie in Gl. (7), eine beliebig kleine von r unabhängige Größe. Führt man die Integration wie in (7) aus und zieht die Klammer zusammen, so entsteht:

$$u = \frac{e^{-i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{\frac{1}{n}\sin \pi/n}{\cos \pi/n - \cos \varphi/n} \cdots |\varphi| > \pi. \tag{15}$$

Befinden wir uns andererseits mit unserem Aufpunkt im „ersten Blatt“ $|\varphi| < \pi$, so liegt auf der Strecke $-\pi < \beta < +\pi$ der Pol $\beta = -\varphi$, in dem $\psi(\beta)$ unendlich wird mit dem Residuum $1/2\pi i$. Dieser Punkt ist beim Übergang von dem punktierten zu dem ausgezogenen Wege in Fig. 44 mit einem Umlauf zu umgeben und liefert als Beitrag zum Integral

$$u_0 = exp(ikr\cos\varphi).$$

Infolgedessen ergibt sich jetzt statt (15)

$$u = u_0 + \frac{e^{-i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{\frac{1}{n}\sin \pi/n}{\cos \pi/n - \cos \varphi/n} \cdots |\varphi| < \pi. \tag{15a}$$

Dabei überzeugt man sich [am leichtesten auf Grund der Darstellung (14)], daß die n Werte von u, die den n auf der Riemannschen Fläche übereinanderliegenden Punkten φ, $\varphi + 2\pi, \ldots \varphi + 2(n-1)\pi$ entsprechen, in der Summe gleich u_0 werden, wie in § 1, Gl. (11) gefordert wurde.

Wir betrachten nun die beiden Faktoren F_1 und F_2, aus denen sich die rechte Seite von (15) zusammensetzt, einzeln.

Der Faktor

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-ikr - i\frac{\pi}{4}} \tag{16}$$

stellt, räumlich gesprochen, eine Zylinderwelle dar, die von der Verzweigungslinie (Schirmkante) ausgeht. Allgemein kennzeichnet nämlich eine Amplitudenabnahme mit $1/\sqrt{r}$ den zylindrischen Wellentyp. Während bei der Kugelwelle [§ 1, Gl. (3)] die Amplitude abnimmt mit $1/r$, die Intensität also mit $1/r^2$, derart, daß die Gesamtintensität über die Kugelfläche $4\pi r^2$ von r unabhängig wird, muß bei einer Zylinderwelle die Gesamtintensität über den Zylindermantel ($2\pi r$ für die Längeneinheit desselben) konstant werden, die Amplitude also mit $1/\sqrt{r}$ abnehmen.

Andererseits entspricht das Vorzeichen im Exponenten von F_1 einer von der Verzweigungslinie ausstrahlenden Welle (nicht einer physikalisch

widersinnigen einstrahlenden Welle). Um dies deutlicher zu machen, bilden wir unter Hinzufügung des Zeitfaktors:

$$F_1 e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{i(\omega t - kr - \pi/4)}. \tag{16a}$$

Daß wir hier den Zeitfaktor $exp(+i\omega t)$ schreiben mußten, nicht $exp(-i\omega t)$, hängt damit zusammen, daß wir die einfallende, aus der Richtung der positiven x-Achse kommende Welle in der Form

$$u_0 = e^{+ikr\cos\varphi} = e^{+ikx}$$

dargestellt haben. Dies gibt in der Tat, mit $exp(+i\omega t)$ multipliziert, eine ebene Welle, die nach der Seite der abnehmenden x, also auf den Nullpunkt zu fortschreitet.

Natürlich ist das Unendlichwerden von F_1 für $r = 0$ physikalisch irreal. Wir wissen ja [vgl. Gl. (11)], daß unsere Funktion u in Wirklichkeit überall endlich und für $r = 0$ gleich $1/n$ ist. Das scheinbare Unendlichwerden von (16) rührt nur davon her, daß unsere Formeln asymptotisch für $kr \to \infty$ gelten, also nicht auf $kr = 0$ extrapoliert werden dürfen. Wie wir sehen werden, nimmt aber das Auge eine solche unerlaubte Extrapolation vor.

Schließlich noch ein Wort über den konstanten Faktor $e^{-i\pi/4}$ in (16a). Dieser bedeutet, daß die Phase der Zylinderwelle nicht übereinstimmt mit der Phase der einfallenden Welle [gegeben durch $exp(i\omega t + ikx)$, also im Nullpunkt $exp(i\omega t)$], sondern hinter ihr um $\pi/4$ zurückbleibt. Ein solcher „Phasensprung" tritt immer auf, wenn eine Welle einen Brennpunkt (im Falle unserer Zylinderwelle eine Brennlinie) überschreitet und ist, ähnlich wie das scheinbare Unendlichwerden der Amplitude für $r = 0$, eine Folge der asymptotischen Darstellung. In Wirklichkeit verhält sich nicht nur die Amplitude, sondern auch die Phase der Welle im Nullpunkt stetig — sofern man bei dem hier vorliegenden komplizierten Schwingungstypus überhaupt noch von einer definierten Phase reden darf.

Wir wenden uns zu dem zweiten Faktor von (15):

$$F_2 = \frac{1}{n} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\pi/n - \cos\varphi/n}, \tag{17}$$

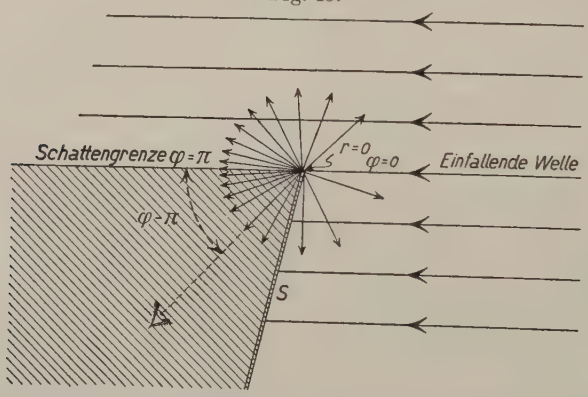
welcher die Abhängigkeit der Amplitude vom Azimut wiedergibt. F_2 nimmt ab in dem Maße, als sich φ von dem Werte $\pm\pi$ entfernt. Das Unendlichwerden von F_2 für $\varphi = \pm\pi$ ist wieder nur scheinbar und beruht auf einer in diesem Falle unzureichenden Handhabung

unserer asymptotischen Approximation (s. unten). Im Falle $n = 2$ bzw. $n = \infty$ geht (17) über in

$$(17a) \qquad F_2 = \frac{-1}{2\cos\frac{\varphi}{2}} \quad \text{bzw.} \quad F_2 = \frac{2\pi}{\varphi^2 - \pi^2}.$$

Jeder dieser Ausdrücke (17) oder (17a) besagt, daß gebeugtes Licht noch bis tief in den geometrischen Schatten hinein wahrgenommen wird. Wir betrachten z. B. den Fall eines schwarzen Beugungsschirms (S in Fig. 45), wo unsere Funktion u direkt, d. h. ohne Hinzutreten

Fig. 45.



eines gespiegelten Bestandteils den optischen Zustand darstellt [vgl. Gl. (5) in § 1]. Die einfallende Welle u_0 kommt aus der Richtung $\varphi = 0$. Unser erstes Blatt wird durch die Halbstrahlen $\varphi = \pm\pi$ begrenzt, von denen nur $\varphi = +\pi$ in der Figur eingezeichnet ist, da $\varphi = -\pi$ jenseits des Schirmes (Verzweigungsschnittes) liegt. Aus dem Unterschied der Formeln (15) und (15a) geht hervor, daß nur im ersten Blatte einfallendes Licht u_0 vorhanden ist. $\varphi = \pi$ ist also die „Schattengrenze"; das Gebiet des „geometrischen Schattens" $\varphi > \pi$ ist in der Figur schraffiert. Hier haben wir gebeugtes Licht, und zwar nicht nur in der Nähe der Schattengrenze, sondern bis zu beliebigen Werten von φ, mit der in (17) oder (17a) angegebenen allmählichen Amplitudenabnahme, ohne die sonst bei Beugungserscheinungen charakteristischen Maxima und Minima (Beugungsstreifen). Solch gebeugtes Licht ist wiederholt beobachtet worden (von Gouy, W. Wien in seiner Dissertation und anderen); es entspricht ganz der Vorstellung, die sich Thomas Young (1802) vom Wesen der Beugung gebildet hatte. E. Maey macht darauf aufmerksam[1]), daß schon der Vater der Beugungs-

[1]) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht **17**, 11, 1904; vgl. auch Ann. d. Phys. **73**, 16, 1924.

phänomene, Grimaldi, diese Erscheinung beschrieben hat, und daß sie auch aus der Fresnel-Kirchhoffschen Beugungstheorie (vgl. § 3) erklärt werden kann.

Das im geometrischen Schatten wahrgenommene Licht scheint von der beugenden Kante herzukommen. Die Kante selbst erscheint dem nach der Kante blickenden und auf diese akkommodierenden Auge als feine leuchtende Linie. Das besagt, daß das Auge die oben als unerlaubt bezeichnete Extrapolation vornimmt, indem es von dem in großer Entfernung wahrgenommenen Verhalten (asymptotische Näherung für $kr \to \infty$) auf das Verhalten des Lichtfeldes für $kr = 0$ schließt. Dies tut das Auge ja allgemein, z. B. bei krummlinigem Strahlengang, wo es den Ursprung des Strahles durch geradlinige Verlängerung aus der wahrgenommenen Strahlrichtung ableitet. In unserem Falle ist es sogar gelungen, die Strahlrichtung in der Zylinderwelle zu photographieren: A. Kalaschnikow[1]) befestigt auf einer schief zum Strahlengang gelegten photographischen Platte Stecknadeln, welche bei hinreichend langer Exposition einen radial gerichteten Schatten werfen.

Wir haben jetzt die Schattengrenzen $\varphi = \pm\pi$ zu betrachten, wo F_2 nach (17) und (17a) scheinbar unendlich wird. Daß unser bisheriges Verfahren in diesem Falle unzureichend wird, sieht man sofort: $\psi(\beta)$ wird nach (13) für $\varphi = \pm\pi$ je für einen der Punkte $\beta = \mp\pi$ unendlich, ist also keine langsam veränderliche Funktion und darf daher bei der Bestimmung der Sattelpunkte und bei der Integration über diese nicht als konstant behandelt werden. [In Fig. 44 lag ja der Pol von $\psi(\beta)$ außerhalb oder innerhalb der Integrationswege D_1, D_2, je nachdem wir uns im Schatten oder im beleuchteten Gebiet befanden; für die Grenze beider fällt der Pol also gerade mit einem der Sattelpunkte zusammen.]

Der Weg, den wir hier einzuschlagen hätten, ergibt sich aus dem, was am Schlusse von **1** über das Debyesche Verfahren bei den Hankelschen Funktionen gesagt ist: Wir müssen $\log \psi(\beta)$ in den Exponenten hinaufnehmen und die Sattelpunkte der Funktion

$$f(\beta) = ik \cos \beta + \frac{1}{r} \log \psi(\beta)$$

ermitteln sowie den Verlauf der günstigsten Integrationswege in der Nähe der Sattelpunkte. Dann würden wir auch in diesem Falle rationelle asymptotische Formeln gewinnen und das sinnlose Unendlichwerden von F_2 vermeiden. Wir verzichten hier aber auf die Beschreitung dieses Weges, da er etwas umständlich ist und da wir in der folgenden Nummer das Gebiet der Schattengrenzen einfacher behandeln werden.

Dagegen müssen wir noch die schief zum Schirmrand einfallende ebene Welle, Gl. (14a) in § 1, besprechen. Da diese Gleichung von (10a)

[1]) Journ. russ. phys. Ges. **44**, 133, 1912.

nur unwesentlich abweicht, können wir ihre asymptotische Näherung nach dem Vorbild von (15) unmittelbar hinschreiben. Für das Gebiet des geometrischen Schattens, auf das wir uns beschränken können, gilt:

$$u = e^{ik\gamma z}\frac{e^{-i(k\varrho r+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k\varrho r}}F_2\ldots|\varphi|>\pi. \tag{18}$$

Hier ist $\gamma = \cos\vartheta$ der Neigungskosinus, unter dem die Welle gegen die Schirmkante (z-Achse) einfällt, ϱ ist gleich $\sqrt{1-\gamma^2} = \sin\vartheta$; F_2 hat dieselbe Bedeutung wie in (17). Während die Phase der einfallenden Welle [Gl. (13a) in § 1 mit $\varphi' = 0$] dargestellt wird durch

$$ik(\gamma z + \varrho r\cos\varphi) = ik\cos\vartheta\,(z + \operatorname{tg}\vartheta\, x)$$

(ebene Wellenfläche), ist die Phase der in den geometrischen Schatten hineingebeugten Welle nach (18)

$$ik(\gamma z - \varrho r) = ik\cos\vartheta\,(z - \operatorname{tg}\vartheta\, r).$$

Die Wellenflächen des gebeugten Lichtes sind daher Rotationskegel um die Schirmkante, die dazu normalen Kegelflächen enthalten die Richtungen der gebeugten Strahlen. Beim Übergang zum bisherigen Falle der senkrechten Inzidenz gehen die ersteren Kegelflächen in die koaxialen Zylinder über, die letzteren Kegelflächen arten in die Ebenen senkrecht zur Schirmkante aus. Das Auge sieht bei der Akkommodation auf die Schirmkante nur eine kurze Strecke derselben leuchten, den Ort der in das Auge gelangenden Strahlenkegel. Man kann den Sachverhalt am prägnantesten darstellen, wenn man im Sinne von Thomas Young (vgl. S. 468) von einer Reflexion des einfallenden Lichtes an der beugenden Kante spricht. Auch diese Erscheinung läßt sich beobachten[1]).

4. Der Sonderfall $n = 2$. Wegen seiner Verwendung bei der Spiegelungsmethode besonders wichtig, bietet dieser Fall den formalen Vorteil, daß sich die komplexe Integraldarstellung auf das viel untersuchte Fehlerintegral (alias Fresnelsches Integral) reduzieren läßt, wodurch nicht nur die Behandlung der Schattengrenze, sondern namentlich der Vergleich mit der klassischen Beugungstheorie erleichtert wird. Die genannte Reduktion selbst ist leider etwas künstlich.

Wir knüpfen an Fig. 44 und Gl. (13) mit $n = 2$ an und setzen $\beta = -\pi + \eta$ für den Weg D_1, $\beta = +\pi + \eta$ für den Weg D_2, wobei der negative Durchlaufungssinn von D_2 (vgl. Fig. 44) zu berücksichtigen ist. Indem wir uns zunächst auf das zweite Blatt $|\varphi| > \pi$ beschränken, erhalten wir aus (13):

$$u = \int_D exp(-ikr\cos\eta)\,\{\psi(-\pi+\eta) - \psi(+\pi+\eta)\}\,d\eta$$

[1]) E. Maey, Ann. d. Phys. **49**, 93, 1893.

und berechnen

$$\psi(-\pi+\eta)-\psi(+\pi+\eta) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^{i\eta/2}}{e^{i\eta/2}-ie^{-i\varphi/2}}-\frac{e^{i\eta/2}}{e^{i\eta/2}+ie^{-i\varphi/2}}\right\}$$
$$= \frac{i}{4\pi}\,\frac{1}{\cos\dfrac{\eta+\varphi}{2}},$$

wofür wir abkürzend $\Phi(\eta)$ schreiben. Der Weg D, in den der ursprüngliche Weg D_1 bei der Substitution $\beta = -\pi+\eta$ übergeht, wird durch den Punkt $\eta = 0$ in zwei entgegengesetzt gleiche Hälften zerlegt; für die in der negativ-imaginären Halbebene verlaufende Hälfte substituieren wir $\eta' = -\eta$ und erhalten, indem wir beide Teile zusammenziehen:

$$u = \int_0^{i\infty} exp(-ikr\cos\eta)\,\{\Phi(\eta)+\Phi(-\eta)\}\,d\eta.$$

Hier ist die $\{\}$ gleich

$$\frac{i}{4\pi}\left\{\frac{1}{\cos\dfrac{\eta+\varphi}{2}}+\frac{1}{\cos\dfrac{-\eta+\varphi}{2}}\right\} = \frac{i}{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{\cos\eta/2}{\cos\eta+\cos\varphi}.$$

Wir bilden jetzt, unter u_0 die unverzweigte ebene Welle verstanden,

$$X = \frac{u}{u_0} = \frac{i\cos\varphi/2}{\pi}\int_0^{i\infty} e^{-ikr(\cos\eta+\cos\varphi)}\,\frac{\cos\eta/2\,d\eta}{\cos\eta+\cos\varphi},$$

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{k\cos\varphi/2}{\pi}\int_0^{i\infty} e^{-ikr(\cos\eta+\cos\varphi)}\cos\eta/2\,d\eta$$
$$= \frac{k\cos\varphi/2}{\pi}\,e^{-ikr(\cos\varphi+1)}\int_0^{i\infty} e^{2ikr\sin^2\eta/2}\cos\eta/2\,d\eta.$$

Das Integral rechts ist ausführbar und liefert $\sqrt{\dfrac{\pi}{2kr}}\,e^{i\pi/4}$. Mithin wird

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}}\,e^{i\pi/4}\cos\frac{\varphi}{2}\,e^{-2ikr\cos^2\varphi/2} = \frac{\partial}{\partial r}\,\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2kr}\cos\varphi/2} e^{-i\tau^2}\,d\tau.$$

Wir können abermals integrieren und erhalten

$$\frac{u}{u_0} = X = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2kr}\cos\varphi/2} e^{-i\tau^2}\,d\tau + C,$$

wo die Integrationskonstante C von r unabhängig ist. Setzen wir $r = \infty$, so finden wir $C = 0$, weil alsdann linkerhand $u = 0$ (zweites

Blatt) und gleichzeitig rechts die obere Grenze des Integrals gleich der unteren wird ($|\varphi| > \pi$). Mithin

$$(19) \qquad u = u_0 \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2} d\tau, \quad T = \sqrt{2kr}\cos\varphi/2, \quad u_0 = e^{ikr\cos\varphi}.$$

Diese Formel gilt aber nicht nur im zweiten, sondern auch im ersten Blatte ($|\varphi| < \pi$), nach den Regeln der analytischen Fortsetzung, und veranschaulicht in einfachster Weise die allgemeinen Eigenschaften von u: Zweideutigkeit in der schlichten Ebene (r, φ), Eindeutigkeit auf der Riemannschen Fläche $\left(r, \frac{\varphi}{2}\right)$, ausnahmslose Endlichkeit, Verschwinden im Unendlichen des zweiten Blattes ($T = -\infty$), Übergang zu u_0 im Unendlichen des ersten Blattes ($T = +\infty$). (19) erfüllt auch, wie man sofort sieht, die allgemeine Relation (11) in § 1.

Wir bestätigen nun an (19) unsere asymptotische Darstellung der vorigen Nummer, zunächst für das zweite Blatt. Indem wir $T = -|T|$ als groß und negativ voraussetzen und fortgesetzte partielle Integration anwenden, haben wir

$$\int_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{|T|}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{|T|}^{\infty} \frac{d(e^{-i\tau^2})}{-2i\tau} = \frac{e^{-iT^2}}{2i|T|} - \int_{|T|}^{\infty} \frac{e^{-i\tau^2}}{2i\tau^2} d\tau = \cdots$$

$$= \frac{e^{-iT^2}}{2i|T|}\left\{1 - \frac{1}{2iT^2} + \frac{1.3}{(2iT^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2iT^2)^3} + \cdots\right\}.$$

Diese Reihe ist typisch semikonvergent. Brechen wir sie mit dem ersten Gliede ab, was wegen der Größe von kr praktisch immer ausreicht, und setzen in (19) ein, so ergibt sich

$$(20) \qquad u = u_0 \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2ikr\cos^2\varphi/2}}{2i\sqrt{2kr}|\cos\varphi/2|} = \frac{e^{-ikr-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{1}{2|\cos\varphi/2|},$$

und dies stimmt genau mit Gl. (15) [vgl. auch (17a)] überein.

Setzen wir andererseits T als groß und positiv (erstes Blatt) voraus, so können wir umformen:

$$\int_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau - \int_{T}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau.$$

Das erste Integral rechts läßt sich ausführen und liefert $\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}$, für das zweite gilt die obige semikonvergente Entwicklung. Brechen wir wieder mit dem ersten Gliede ab und setzen in (19) ein, so entsteht

$$(20a) \qquad u = u_0 - \frac{e^{-ikr-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{1}{2\cos\varphi/2},$$

d. h. mit Rücksicht auf (17a) genau Gl. (15a).

Wir kommen zu dem Übergangsgebiet zwischen erstem und zweitem Blatt, das wir im Anschluß an die vorige Nummer „Schattengrenze“ nennen. Dies ist gekennzeichnet durch „$|T|$ klein oder mäßig groß“ bzw. durch $\varphi \sim \pi$. Man könnte hier an eine Entwicklung des Integrals in (19) nach positiven Potenzen von T denken, welche konvergent im gewöhnlichen Sinne wäre; sie würde aber — ähnlich wie die Reihen in **1** — nur für so kleine T brauchbar sein, daß sie praktisch ausscheidet. Deshalb muß man sich ein allgemeines Bild von dem Verhalten des Integrals (19) verschaffen.

Um mit den sonst üblichen Bezeichnungen im Einklang zu bleiben, setzen wir

$$F(v) = \int_0^v e^{i\frac{\pi}{2}\sigma^2}\, d\sigma, \tag{21}$$

$$\begin{cases} C(v) = \int_0^v \cos\frac{\pi}{2}\sigma^2\, d\sigma, \\ S(v) = \int_0^v \sin\frac{\pi}{2}\sigma^2\, d\sigma \end{cases} \tag{21a}$$

und nennen

$$F = C + iS$$

„Fresnelsches Integral“. Allgemein gesprochen vermittelt (21) eine Abbildung der v-Ebene auf die F-Ebene (C und S sind die rechtwinkligen Koordinaten in der F-Ebene). Da aber für unsere Zwecke nur reelle Werte von v in Betracht kommen, so haben wir nur die Abbildung der reellen v-Achse in der komplexen F-Ebene zu studieren. Diese Abbildung wird dargestellt durch eine Kurve in der F-Ebene, welche „Cornusche Spirale“ heißt und durch Fig. 46 dargestellt wird.

Ersichtlich entspricht bei der Abbildung dem Punkte

$v = 0$ der Punkt $F = 0$,

$v = +\infty$ der „obere Grenzpunkt“ $F = \frac{1+i}{2}$,

$v = -\infty$ der „untere Grenzpunkt“ $F = \frac{-1-i}{2}$.

$F = 0$ ist ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente (hier gilt die Näherungsdarstellung $S = \frac{\pi}{2}\frac{C^3}{3}$). Die Abbildung ist längentreu, denn es gilt

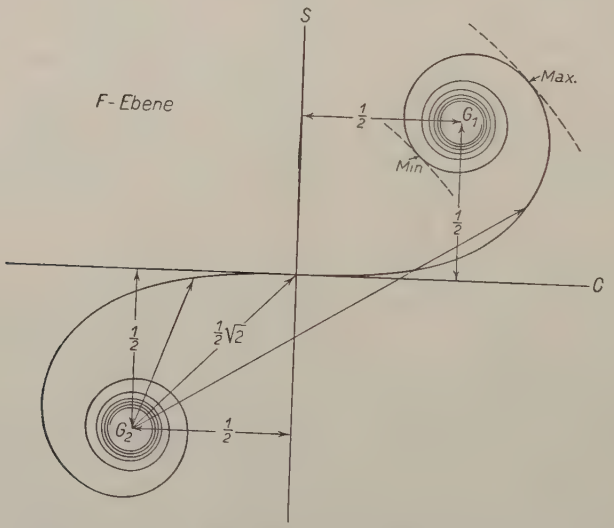
$$dF = e^{\frac{i\pi}{2}v^2}\, dv, \quad |dF| = dv \quad \text{oder} \quad dC^2 + dS^2 = dv^2.$$

Die Zuordnung zwischen F und v wird also durch eine einfache Abwicklung unserer Kurve auf die reelle v-Achse vermittelt. Daraus folgt bereits, daß die Bogenlänge in der F-Ebene unendlich ist, daß also die Grenzpunkte asymptotisch (mit unendlich vielen Windungen) erreicht werden. Genaueres folgt aus der Berechnung der Tangente an die F-Kurve. Nennen wir α den Winkel zwischen dieser Tangente und der C-Achse, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dS}{dC} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}v^2, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}v^2.$$

Die Tangente dreht sich also mit wachsendem v fortgesetzt im gleichen Sinne; für $v = \pm\infty$ haben wir einen spiraligen Verlauf.

Fig. 46.



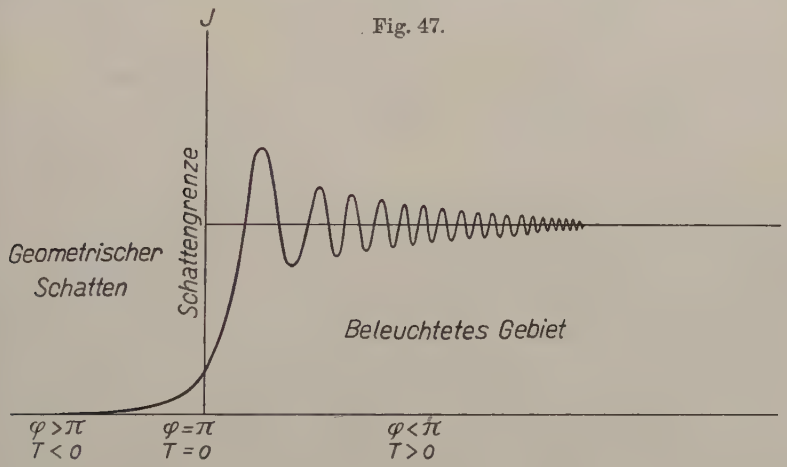
Unser Integral in (19) unterscheidet sich von (21), abgesehen von der Wahl der unteren Grenze, nur durch die Vertauschung von $+i$ mit $-i$ und durch eine andere Bezeichnung der Integrationsvariablen. Beide Umstände lassen die Gestalt der Spirale unberührt. Der unteren Grenze in (19) tragen wir dadurch Rechnung, daß wir $F(v) - F(-\infty)$ bilden. So ergibt sich die mit (19) identische Darstellung:

$$(22) \qquad \begin{cases} u = u_0 \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\,(F(v) - F(-\infty)), \\ |u| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|F(v) - F(-\infty)|, \\ v = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T = 2\sqrt{\dfrac{kr}{\pi}}\cos\varphi/2. \end{cases}$$

Hier bedeutet $|F(v) - F(-\infty)|$ den geradlinigen Abstand in der F-Ebene zwischen dem Punkte v auf der Cornuschen Spirale und dem unteren Grenzpunkt. Die Amplitude der Lichterregung wird daher, bis auf einen vom Maßstab der Figur und der Intensität des einfallenden Lichtes abhängigen Faktor, direkt durch diesen Abstand gegeben.

Indem wir auf Fig. 45 zurückgreifen, denken wir uns, etwa parallel zu dem Beugungsschirm S, hinter demselben einen Beobachtungsschirm aufgestellt. Wir verfolgen die Intensität auf diesem, indem wir im geometrischen Schatten beginnend zur Schattengrenze und in den beleuchteten Teil des Schirmes fortschreiten. Dem entspricht es, daß wir v von $-\infty$ über 0 nach $+\infty$ wachsen lassen. Zunächst nimmt der Radiusvektor in Fig. 46 von dem unteren Grenzpunkt nach dem

Fig. 47.



variablen Punkt v langsam zu, ohne Maxima oder Minima aufzuweisen. Dies Verhalten charakterisiert den geometrischen Schatten. Indem sich v der Null nähert, wächst der Radiusvektor schnell an, bis zu dem Werte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, den er für $\varphi = \pi$, also in der verlängerten Richtung der einfallenden Welle erreicht. Hier wird $|u| = \frac{1}{2}$. Das Anwachsen hält an bis zu einem ersten Maximum, das in Fig. 46 durch Max. markiert ist; dann kommt der spiralige Verlauf der oberen Hälfte der Cornuschen Spirale zur Geltung: der Radiusvektor nimmt ab bis zu einem ersten Minimum (Min. in Fig. 46), geht wieder ins Wachsen über usf. Der Unterschied der aufeinanderfolgenden Maxima und Minima nimmt dabei fortgesetzt ab, der Radiusvektor nähert sich dem asymptotischen Werte $\sqrt{2}$, dem Abstand der Grenzpunkte in Fig. 46; dem entspricht nach (22) $|u| = 1$ = der Amplitude der einfallenden Welle.

In Fig. 47 ist der zugehörige Verlauf der Intensität $J = |u|^2$ verzeichnet. Während die Amplitude in der Schattengrenze die Hälfte der Amplitude

der einfallenden Welle war, wird die Intensität daselbst $^1/_4$ der einfallenden Intensität. Das Auftreten der Maxima und Minima im beleuchteten Teile des Beobachtungsschirmes (rechte Hälfte der Fig. 47) erklärt sich aus der Interferenz des einfallenden Lichtes mit dem gebeugten Licht (unserer vom Schirmrand ausgehenden Zylinderwelle); das Fehlen der Maxima und Minima im geometrischen Schatten (linke Hälfte der Fig. 47) rührt daher, daß hier die Zylinderwelle allein wirksam ist.

Natürlich sind der Beobachtung am besten zugänglich die Beugungsmaxima und -minima in der Nähe der Schattengrenze. Hat man es statt mit einem schwarzen mit einem „blanken" Beugungsschirm zu tun, so kommt zu der einfallenden eine reflektierte Welle hinzu, welche durch eine zu (19) analoge Formel dargestellt wird, und eine zu dieser gehörende Schattengrenze. Auch in der Umgebung der letzteren (also vor dem Beugungsschirm!) sind Maxima und Minima nachweisbar.

Wie unser Verfahren auf $n > 2$ zu verallgemeinern ist, geht aus der S. 451 zitierten Arbeit von F. Reiche ($n = 3$) hervor. Man hat dann für jedes Blatt der Riemannschen Fläche je eine der obigen analoge Größe X zu bilden, deren Ableitung nach r sich durch Hankelsche Funktionen vom Index $m/n\,(m < n)$ exakt berechnen läßt. Die analytische Sonderstellung des Falles $n = 2$ beruht darauf, daß die Hankelschen Funktionen mit halbzahligem Index im wesentlichen Exponentialfunktionen sind, wie wir bereits oben in Gl. (8c) sahen und näher in § 4, Gl. (9) und (12) zeigen werden. Qualitativ liegen die Verhältnisse im Falle $n > 2$ ebenso wie im Falle $n = 2$.

Wir nehmen also Fig. 47 auch für die Darstellung der ebenen Welle auf einer n-fach überdeckten Riemannschen Fläche in Anspruch.

§ 3. Vergleich mit der klassischen Beugungstheorie (Fresnel-Kirchhoff).

Wie im Eingang zu § 1 bemerkt, besitzt die klassische Beugungstheorie von Fresnel und Kirchhoff eine außerordentliche Kraft, sich den kompliziertesten Bedingungen (Gitter, Öffnung von beliebiger Berandung) anzupassen. Sie ist ein praktisch vollkommenes, ideal arbeitendes Werkzeug, auf das der experimentelle Physiker im Gebiet der optischen Messungen (bei hinreichend kleinem λ) unter allen Umständen zurückgreifen wird. Wir geben hier einen Abriß der Kirchhoffschen Theorie in vereinfachter und zum Teil verschärfter Form.

1. Greenscher Satz und Greensche Funktion. Sind u und v zwei beliebige skalare Funktionen mit den nötigen Stetigkeitseigenschaften im Integrationsraum V, $d\sigma$ und dn Oberflächenelement der Begrenzung

von V und Linienelement der äußeren Normale auf $d\sigma$, so lautet der Greensche Satz [1. Bd., S. 73, (34)]:

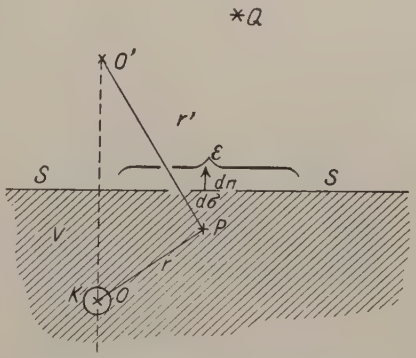
$$(1) \qquad \int (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Wir setzen u gleich der Funktion der Kugelwelle [(3) von S. 436]

$$(2) \qquad u = \frac{e^{ikr}}{r},$$

v gleich einer rechtwinkligen Komponente des gesuchten Beugungsfeldes (genauer gesagt gleich einer komplexen rechtwinkligen Komponente des das Feld beschreibenden Potentials, vgl. S. 434). Der Beugungsschirm S sei eben, die Beugungsöffnung kann daher gleichfalls als eben angenommen werden. Die Ebene E, welche sich aus Schirm und Öffnung zusammensetzt, bilde die Begrenzung des Integrationsraumes. Die Lichtquelle Q (Singularität von v) befinde sich auf der einen Seite von E, der Beobachtungspunkt O auf der anderen, in Fig. 48 schraffierten Seite. r sei der von O gerechnete Abstand nach dem Integrationspunkt P. Da sowohl u als v der Wellengleichung (12) von S. 396 genügen, verschwindet die linke Seite von (1), nachdem man die Umgebung von O durch eine Kugel K vom Radius Lim $R = 0$ von der Integration ausgeschlossen hat. Die rechte Seite ist über die Ebene E und die Kugel K zu erstrecken. Die Integration über K liefert (ähnlich wie im 1. Bd., S. 483) $-4\pi v$, genommen für den Mittelpunkt O von K, und man erhält:

Fig. 48.



$$(3) \qquad 4\pi v_0 = \int_E \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Die gewöhnliche Behandlung der Beugungsprobleme besteht darin, anzunehmen:

a) Auf dem Beugungsschirm (nämlich auf der Rückseite desselben) sind v und $\partial v/\partial n$ gleich Null.

b) In der Beugungsöffnung sind v und $\partial v/\partial n$ gleich den Werten bei ungestörter Ausbreitung des Lichtes, also bei Abwesenheit des Schirmes.

Diese Annahmen haben ihre mathematischen Schwierigkeiten[1]: Wenn die Bedingungen a) für ein endliches Stück von E erfüllt wären, so würde daraus (bei der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ ebenso wie bei $\Delta u = 0$) mit Notwendigkeit folgen[2], daß v überall identisch gleich Null wäre. Ebenso würde aus den Bedingungen b) folgen, daß v überall (auch unmittelbar hinter dem Schirme) gleich der ungestörten Lichterregung sein müßte. Beides ist widersinnig. Offenbar muß man das Verfahren als approximatix auffassen: Man setzt in (3) die zwar angenäherten, aber in sich widerspruchsvollen Randwerte a) und b) ein; dadurch erhält man eine Funktion v, welche zwar der Wellengleichung genau, aber den angenommenen Randbedingungen nur angenähert genügt.

Wir können aber die hier hervorgetretene mathematische Schwierigkeit auf folgendem Wege mildern: Wir setzen u nicht gleich der Funktion (2) der Kugelwelle, sondern gleich der Greenschen Funktion unseres Halbraumes (1. Bd., S. 571):

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'}, \tag{2'}$$

welche auf E verschwindet. Dazu hat man (vgl. Fig. 48) O in bezug auf E zu spiegeln (Bildpunkt O') und unter r' den Abstand von O' nach dem Integrationspunkt P zu verstehen. Aus (1) ergibt sich dann an Stelle von (3) wegen $G = 0$ auf E:

$$4\pi v_0 = -\int_E v \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma. \tag{3'}$$

Da $\partial v/\partial n$ aus unserer Gleichung verschwunden ist, haben wir zur Berechnung von (3') nur mehr Annahmen über v zu machen. Dies kann in mathematisch widerspruchsfreier Weise folgendermaßen geschehen:

a') Auf der Rückseite des Beugungsschirmes setzen wir $v = 0$.

b') In der Beugungsöffnung setzen wir v gleich der ungestörten einfallenden Lichterregung.

Im Gegensatz zu der Darstellung (3) und den Randwerten a), b) werden die Randwerte a'), b') von der durch (3') dargestellten Funktion — nach der Theorie der Greenschen Funktion — wirklich angenommen. Allerdings sind auch die Randwerte a'), b') nicht physikalisch exakt. Tatsächlich haben wir ja selbst unmittelbar hinter dem Schirme abgebeugtes Licht, so daß hier nicht ohne weiteres (jedenfalls nicht für alle Komponenten des Lichtvektors) $v = 0$ ist. Ferner wird die Verteilung des Lichtes in der Beugungsöffnung durch die Anwesenheit des Schirmes tatsächlich beeinflußt (zum mindesten auf Entfernungen

[1] Vgl. A. Sommerfeld, Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4.
[2] Vgl. H. Weber, Math. Ann. **1**, inbes. S. 6, 1869.

von der Größe der Wellenlänge), so daß auch Annahme b') nicht exakt ist. Unser Verfahren hat also auch bei dieser Anordnung physikalisch nur approximativen Charakter.

2. Huygenssches Prinzip. Aus (2') berechnet man:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cos(n, r) - \frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{e^{ikr'}}{r'}\right)\cos(n, r').$$

Liegt der Punkt P in der Symmetrieebene E von O und O', so wird $r' = r$, $\cos(n, r') = -\cos(n, r)$, also

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cos(n, r).$$

Aus (3') ergibt sich daher

$$4\pi v_0 = -2\int v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cos(n, r)\,d\sigma. \tag{4}$$

Hier ist die Integration wegen der Annahme a') allein über die Beugungsöffnung zu erstrecken; für v sind wegen der Annahme b') die Werte der ungestörten einfallenden Erregung einzusetzen.

Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = ik\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right).$$

In der Klammer rechts kann der Subtrahendus gegen 1 vernachlässigt werden, da $k = 2\pi/\lambda$ und bei allen Beugungsbeobachtungen $r \gg \lambda$ ist. Infolgedessen geht (4) über in

$$4\pi v_0 = -2ik\int v\frac{e^{ikr}}{r}\cos(n, r)\,d\sigma.$$

Nach der Bedeutung von k können wir dafür auch schreiben:

$$i\lambda v_0 = \int v\frac{e^{ikr}}{r}\cos(n, r)\,d\sigma. \tag{5}$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen dem Huygensschen Prinzip: Von jedem Flächenelement $d\sigma$ der Beugungsöffnung denke man sich eine Kugelwelle e^{ikr}/r ausgehen, deren Phase und Amplitude sich aus der einfallenden Welle v bestimmen. Der Faktor $\cos(n, r)$ reduziert die wirksame Größe des aussendenden Flächenelements in naheliegender Weise entsprechend dem Lambertschen Gesetz; die Faktoren i und λ normieren (in einer über die anschauliche Verwendung des Huygensschen Prinzips hinausgehenden Weise) Phase[1]) und Amplitude der aus diesen Einzelwellen resultierenden Lichtwirkung.

[1]) Wegen der Schwierigkeiten, welche sich früher (Fresnel usw.) bei einer mehr naiven Anwendung des Huygensschen Prinzips für die Bestimmung der Phase des gebeugten Lichtes ergaben, vgl. z. B. F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik, Nachtrag 2. Teubner 1885.

Die Berechnung der Beugungsphänomene wird durch (5) auf ein einfaches Aufsummieren von Kugelwellen zurückgeführt. Darin, daß diese Elementarwellen interferieren und sich gegebenenfalls auslöschen können, liegt die Fresnelsche Erklärung der Schattenbildung. Die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, welche dem Huygensschen Prinzip zunächst zu widersprechen scheint, wird solchergestalt auf einem Umweg auf den Vorgang der Welleninterferenz zurückgeführt.

Die hier in den Vordergrund gestellte Huygenssche Interpretation der durch (3) und (3′) gegebenen Funktionen bietet sich durch die Form dieser Integrale von selbst dar. Man kann aber auch, wie A. Rubinowicz[1]) es getan hat, diese Funktionen im Sinne der Vorstellungen von Thomas Young interpretieren. So kann man (3) in zwei Teile spalten[2]), die man passend als einfallendes Licht und als Beugungswelle bezeichnet. Das einfallende Licht stellt nämlich eine Lichtverteilung dar, wie sie der geometrischen Optik entspricht, während das gebeugte Licht eine von den einzelnen Punkten des Schirmrandes ausgehende Wellenbewegung ist. Die Beugungserscheinungen kann man sich danach im Sinne von Young als durch Interferenz der von den verschiedenen Teilen des beugenden Randes kommenden Beugungswellen miteinander und mit dem direkt einfallenden Lichte zustande gekommen denken. Wir erhalten hier also analoge Verhältnisse wie S. 468 bei der strengen Lösung des Beugungsproblems an einer Halbebene. Diese Umformung gilt dabei aber nur für die Funktion, die auf der beschatteten Seite des Schirmes durch (3), auf der beleuchteten durch die analytische Fortsetzung von (3) dargestellt wird, die man erhält, wenn man durch die beugende Öffnung hindurchgeht. Da auf der beleuchteten Seite des Schirmes das direkt einfallende Licht vorhanden ist, auf der beschatteten Seite aber fehlt, und die Beugungswelle sich beim Durchgang durch den Schirm regulär verhält, so folgt aus der obigen Zerlegung unmittelbar die Tatsache, daß die Kirchhoffsche Lösung am beugenden Schirme einen Sprung um das direkt einfallende Licht erleidet.

Daraus ergibt sich aber weiter, daß einerseits die Kirchhoffsche Lösung und die Gesamtheit ihrer analytischen Fortsetzungen erst in einem unendlich vielblättrigen Riemannschen Raume eindeutig darstellbar ist, und andererseits, daß der Schirm der Kirchhoffschen Beugungstheorie für das direkt einfallende Licht vollständig undurchsichtig, für die Beugungswelle aber vollständig durchsichtig ist.

---

[1]) Ann. d. Phys. **53**, 257, 1917.

[2]) Bezüglich dieser Spaltung vgl. G. A. Maggi, Ann. di Matem. **16**, 21, 1888.

Im gleichen Sinne hat F. Kottler[1]) im Anschluß an J. Larmor[2]) das Kirchhoffsche Prinzip für die Maxwellschen Gleichungen einer Diskussion unterzogen und insbesondere den Spezialfall der Halbebene behandelt.

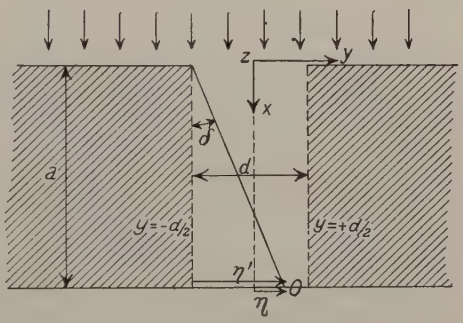
3. Rechteckige Öffnung, Spalt und Halbebene. Es ist hier nicht der Ort, den Inhalt der Gl. (5) in einiger Vollständigkeit zu entwickeln. Wir beschränken uns vielmehr auf den Fall, der uns schließlich zu der im vorhergehenden behandelten Halbebene zurückführen wird, nämlich auf eine rechteckige Öffnung.

Die einfallende Welle möge eben sein und senkrecht gegen die rechteckige Öffnung einfallen. Wir setzen also (vgl. Fig. 49)

$$v = Ae^{ikx}. \tag{6}$$

Der Aufpunkt O liege auf dem „Beobachtungsschirm", welcher in endlichem Abstand a hinter dem Beugungsschirm parallel zu diesem aufgestellt sein möge. Das Gebiet des geometrischen Schattens zwischen Beugungsschirm und Beobachtungsschirm haben wir in Fig. 49 schraffiert.

Fig. 49.



Die auftretende Beugungserscheinung gehört dann zur Klasse der Fresnelschen Beugungsphänomene. Wäre a unendlich, d. h. würde man, statt den im Endlichen gelegenen Beobachtungsschirm anzuvisieren, die Erscheinung durch ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr beobachten, so hätte man den einfacheren Fall eines Fraunhoferschen Beugungsphänomens [Lichtquelle und Aufpunkt im Unendlichen][3]).

In den Mittelpunkt des Rechtecks legen wir den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems xyz. Die Seiten des Rechtecks

---

[1]) Ann. d. Phys. **70**, 405, 1923; **71**, 457, 1923. Vgl. auch die Diskussion derselben bei A. Rubinowicz, Ann. d. Phys. **74**, 459, 1924 und die Erwiderung von F. Kottler, ebenda **75**, 634, 1924; ferner A. Rubinowicz, ebenda **81**, 140, 1926.

[2]) Proc. London Math. Soc. **1**, 1, 1903.

[3]) Man sagt auch allgemeiner statt Fresnelscher mikroskopische, statt Fraunhoferscher teleskopische Beugungserscheinungen. Die im Text gegebene Definition der letzteren ist eigentlich zu eng: Man erhält Fraunhofersche, d. h. mit elementaren Integralen zu berechnende Beugungsphänomene immer dann, wenn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$ ist, unter a und b die Abstände der Lichtquelle und des Beobachtungsortes vom Beugungsschirm verstanden, also nicht nur für $a=b=\infty$.

seien $y = \pm\frac{d}{2}$, $z = \pm\frac{h}{2}$. Nach (6) wird für alle Punkte der Öffnung $v = A$. Aus (5) ergibt sich

$$i\lambda v = A \int_{-d/2}^{+d/2} dy \int_{-h/2}^{+h/2} dz\, e^{ikr} \frac{\cos(n, r)}{r}. \tag{7}$$

Der Aufpunkt O hat die Koordinaten $x = a$, $y = \eta$, $z = \zeta$ und es wird

$$r^2 = a^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Da wir a als groß voraussetzen dürfen gegen die Abmessungen der Beugungsöffnung (y, z) und des Beobachtungsfeldes (η, ζ), entwickeln wir

$$r = a + \frac{1}{2}\frac{(\eta - y)^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{(\zeta - z)^2}{a} + \cdots. \tag{8}$$

Diese Entwicklung ist in der Exponentialfunktion des Ausdrucks (7) zu benutzen, welche wegen des großen Faktors k schnell veränderlich ist. Dagegen können wir $\cos(n, r)/r$ als langsam veränderliche Größe vor das Integral ziehen und darin r durch einen Mittelwert $\bar{r}$ (Abstand des Aufpunktes von der Rechtecksmitte) ersetzen, wobei noch $\cos(n, \bar{r}) = a/\bar{r}$ wird. Aus (7) ergibt sich so:

$$i\lambda v = A\, e^{ika} \frac{a}{\bar{r}^2} \int_{-d/2}^{+d/2} dy\, e^{\frac{ik(\eta - y)^2}{2a}} \int_{-h/2}^{+h/2} dz\, e^{\frac{ik(\zeta - z)^2}{2a}}. \tag{9}$$

Beide Integrale haben nunmehr die Form des Fresnelschen Integrals F von S. 473. Indem wir die dort erklärte Schreibweise beibehalten, setzen wir

$$\frac{k(\eta - y)^2}{2a} = \frac{\pi}{2}s^2, \quad \frac{k(\zeta - z)^2}{2a} = \frac{\pi}{2}t^2,$$

$$\eta - y = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}\, s, \quad s_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\left(\eta + \frac{d}{2}\right), \quad s_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\left(\eta - \frac{d}{2}\right),$$

$$\zeta - z = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}\, t, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\left(\zeta + \frac{h}{2}\right), \quad t_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\left(\zeta - \frac{h}{2}\right).$$

Alsdann wird das Produkt der beiden Integrale in (9) gleich

$$\frac{\lambda a}{2} \int_{s_1}^{s_2} ds\, e^{i\frac{\pi}{2}s^2} \int_{t_1}^{t_2} dt\, e^{i\frac{\pi}{2}t^2} = \frac{\lambda a}{2}\{F(s_2) - F(s_1)\}\{F(t_2) - F(t_1)\},$$

und (9) geht über in

$$v = A e^{i\left(ka - \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\bar{r}}\right)^2 \{F(s_1) - F(s_2)\}\{F(t_1) - F(t_2)\}. \tag{10}$$

Diese Formel enthält das ganze komplizierte Streifensystem, welches man innerhalb der geometrischen Projektion des Rechtecks (beleuchtetes Gebiet) und außerhalb desselben (Schattengebiet) beobachtet.

Vom Rechteck gehen wir über zum Spalt, indem wir $h = \infty$ machen. Dann wird

$$t_1 = +\infty, \quad t_2 = -\infty, \quad F(t_1) - F(t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}t^2}\, dt.$$

Dieses Integral ist gleich $1 + i$, nämlich gleich dem komplexen Abstand der beiden Punkte G_1, G_2 in Fig. 46, und daher auch gleich

$$\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$$

Die Formel für den Spalt, welche auch hier das beobachtete Streifensystem vollständig wiedergibt, lautet also [bei Unterdrückung des unwesentlichen, langsam veränderlichen Faktors $\left(\frac{a}{r}\right)^2$]:

$$v = A e^{i\left(ka - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}} \{F(s_1) - F(s_2)\}. \tag{11}$$

Schließlich gehen wir über zur Halbebene, indem wir $d = \infty$ machen, aber zugleich $d/2 + \eta = \eta'$ setzen, also eine (offenbar notwendige) Nullpunktsverlagerung in der Beobachtungsebene vornehmen (vgl. Fig. 49). Es wird daraufhin

$$s_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\, \eta', \quad s_2 = -\infty,$$

$$u = A e^{i\left(ka - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\, \eta'\right) - F(-\infty)\right]. \tag{12}$$

Dieser Ausdruck ist seiner Bauart nach identisch mit Gl. (22) im vorigen Paragraph. Z. B. entspricht $A e^{ika}$ genau dem früheren u_0. Nur das Argument des ersten Fresnelschen Integrals ist etwas verschieden. Es lautete früher ($\delta = \pi - \varphi$, vgl. Fig. 49, bedeutet den „Beugungswinkel“):

$$2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2r}{\lambda}}\, 2\sin\frac{\delta}{2}$$

und heißt jetzt, da (Fig. 49) $\eta' = r\sin\delta$, $a = r\cos\delta$ ist:

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda a}}\, \eta' = \sqrt{\frac{2r}{\lambda}}\, \frac{\sin\delta}{\sqrt{\cos\delta}}.$$

Beide Ausdrücke fallen aber für kleine δ zusammen. Denn es ist

$$2\sin\frac{\delta}{2} = \delta\left(1 - \frac{\delta^2}{24} + \cdots\right), \quad \frac{\sin\delta}{\sqrt{\cos\delta}} = \delta\left(1 + \frac{\delta^2}{12} + \cdots\right).$$

Die Verwandtschaft der beiden für die Halbebene gegebenen Lösungen, der klassischen und der verzweigten, wird noch schärfer herausgearbeitet in den S. 480 und 481 zitierten Arbeiten von A. Rubinowicz[1]).

4. Verhältnis von geometrischer und Wellenoptik. Wir fanden im vorhergehenden eine nahezu vollkommene Übereinstimmung zwischen den Resultaten zweier verschiedener Methoden der Beugungsberechnung. Diese Übereinstimmung gründet sich auf die Kleinheit der Wellenlänge: bei größerer Wellenlänge (Akustik, drahtlose Telegraphie) reicht die Methode des Huygensschen Prinzips mit ihren etwas willkürlichen Annahmen über die Randwerte nicht aus.

Wir wollen anhangsweise zeigen, daß die Kleinheit der Wellenlänge auch die Übereinstimmung zwischen den Resultaten der Wellenoptik und Strahlenoptik (geometrische Optik) erklärt. Tatsächlich wenden wir ja im täglichen Leben und in der Beurteilung der optischen Instrumente stets die Strahlenoptik an, in dem sicheren Bewußtsein, daß Abweichungen von der Strahlenoptik nur in sekundären Erscheinungen (Beugung) auftreten können. Wir wollen dies nach P. Debye[2]) folgendermaßen begründen: Die Differentialgleichung der Wellenoptik lautet

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Die Kleinheit der Wellenlänge bedingt, daß k eine sehr große Zahl ist (Dimension cm^{-1}). Wir setzen eine genäherte Lösung an in der Form:

$$u = A e^{i k_0 S} \tag{13}$$

und nehmen an, daß A und S langsam veränderliche Funktionen des Ortes sind, d. h. solche, die im Limes $k \to \infty$ sich stetig verhalten, samt ihren Differentialquotienten. k_0 soll den Wert von k für das Vakuum, also $\frac{\omega}{c}$ bedeuten, während sich $k = \frac{\omega}{V}$ auf ein beliebiges Medium vom Brechungsindex $n = \frac{c}{V}$ beziehen möge. Durch Differentiation ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i k_0 u \frac{\partial S}{\partial x} + u \frac{\partial \log A}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_0^2 u \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + 2 i k_0 u \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial \log A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x}\right) + \cdots,$$

wobei die durch ... angedeuteten Glieder für $k_0 \to \infty$ nicht unendlich werden. Infolgedessen wird:

$$\Delta u + k^2 u = -k_0^2 u \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{k^2}{k_0^2}\right] + 2 i k_0 u \left[\tfrac{1}{2} \Delta S + (\operatorname{grad} \log A, \operatorname{grad} S)\right] + \cdots$$

[1]) Ann. d. Phys. **53**, 257, 1917.

[2]) Vgl. A. Sommerfeld und Iris Runge, Ann. d. Phys. **35**, 290, 1911. Wir gehen hier über diese Darstellung insofern hinaus, als wir die Gleichung für A gleichberechtigt neben die Gleichung für S stellen.

Man genügt also der Wellengleichung näherungsweise, wenn man die beiden Funktionen S und A so bestimmt, daß gleichzeitig gilt, mit $k/k_0 = n$ = Brechungsindex:

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2$$

und

$$(\beta) \qquad (\operatorname{grad} \log A,\ \operatorname{grad} S) = -\tfrac{1}{2} \Delta S.$$

Aus dem Ansatz (13) geht hervor, daß $S =$ konst die Schar der Wellenflächen, also $\operatorname{grad} S$ den Vektor der Wellennormale und daher auch (im isotropen Medium) den Strahlenvektor liefert. S heißt das „Eikonal" und ist identisch mit Hamiltons „charakteristischer Funktion", woher auch die Bezeichnung S rührt. Demnach ist (α) die Differentialgleichung des Eikonals; (β) bestimmt die Amplitudenfunktion A, nachdem S bekannt ist. Setzt man

$$\operatorname{grad} S = n \mathfrak{S},$$

so ist $\mathfrak{S}$ nach (α) der Einheitsvektor in Richtung des Strahles und (β) sagt aus, daß der Gradient von $\log A$ in der Strahlrichtung gleich ist,

$$(14) \qquad -\frac{1}{2n} \operatorname{div}(n \mathfrak{S}).$$

A nimmt also in leicht verständlicher Weise ab in dem Maße, wie die Strahlen $\mathfrak{S}$ divergieren und wächst, wo sie konvergieren. Der Allgemeinheit wegen kann man n als kontinuierlich veränderlich voraussetzen (inhomogenes Medium) und hat dann einen im allgemeinen krummen Strahlengang.

Die vorstehende Überführung der Wellengleichung in die Gleichungen der Strahlenoptik läßt auch erkennen, wann die Strahlenoptik keine genügende Approximation der Wellenoptik liefern kann. Wir setzten voraus, daß A (ebenso wie S) eine langsam veränderliche Funktion des Ortes sein solle, verglichen mit k, d. h. im Maßstab der Wellenlänge gerechnet. Das wird nicht mehr der Fall sein, wenn durch die Randbedingungen (Beugungsschirm) im Sinne der geometrischen Optik ein plötzlicher Wechsel von A zustande kommt (an der Schattengrenze) oder wenn unsere Gl. (β) zu einem sehr großen Werte des Gradienten von A führt. Letzteres tritt im besonderen dann ein, wenn in (β) $\operatorname{div} \mathfrak{S}$ sehr groß wird, d. h. in Brennpunkten, Brennlinien oder Brennflächen. Auch in diesen Fällen hat man charakteristische Beugungserscheinungen, für welche die Strahlenoptik unzureichend wird und die Wellenoptik heranzuziehen ist.

Die Differentialgleichung des Eikonals ist identisch mit der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung [I, § 4, Gl. (29)] für die Bewegung eines Massenpunktes m in einem Kraftfeld von geeignet ge-

wählter potentieller Energie. In der Tat folgt aus dem Energiesatz für den freien Massenpunkt in drei Dimensionen [I, § 2, Gl. (28)]

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = E$$

nach der I, § 4, **3** behandelten Hamilton-Jacobischen Methode wegen I, § 2, Gl. (53) und der Ausdrücke $p_1 = m\dot{x}$ usw.

$$m\dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad m\dot{y} = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad m\dot{z} = \frac{\partial S}{\partial z}$$

und daher als Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2m(E - V).$$

Dies ist identisch mit (α), wenn man wählt[1])

$$V = E - \frac{n^2}{2m}.$$

Die geometrische Optik wird solchergestalt abgebildet auf eine Mechanik der Lichtpartikeln (im Newtonschen Sinne oder im Sinne der Quantentheorie). Durch diesen Zusammenhang deuten wir zugleich den eigentlichen Ursprung der Hamiltonschen Mechanik an[2]). In jüngster Zeit ist dieser Zusammenhang besonders aktuell geworden, da er in den Händen von E. Schrödinger[3]) zu einer Reform der Mechanik des Atoms geführt hat, zu einer „Wellenmechanik". Diese steht zur gewöhnlichen oder klassischen Mechanik in demselben Verhältnis wie unsere Wellenfunktion u zu der charakteristischen Funktion S der Strahlenoptik: die partielle Differentialgleichung der Wellenmechanik ist von derselben Form wie die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, also eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung — nicht, wie die Grundgleichung der Strahlenoptik oder der klassischen Mechanik, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Gleichzeitig zeigt sich, daß auch Gl. (β) für die Mechanik des Atoms von Bedeutung ist. Denkt man sich nämlich einen Schwarm von Massenteilchen (Elektronen) bewegt wie die Lichtquanten der geo-

[1]) Allerdings hat in der folgenden Gleichung n nicht mehr die Bedeutung eines unbenannten Brechungsindex, was damit zusammenhängt, daß S in der Differentialgleichung der Hamiltonschen Mechanik die Dimension einer Wirkung, also nicht, wie in der Eikonalgleichung, die Dimension einer Länge hat. Man gleicht beide Standpunkte einander an, wenn man den Faktor k_0 im Ansatz (13) nicht als reziproke Länge, sondern als reziproke Wirkung wählt; bei Schrödinger wird k_0 gleich $2\pi/h$ gesetzt, wo h das Plancksche Wirkungsquantum ist.

[2]) Näheres bei F. Klein, Gesammelte Abhandl. **2**, 601 und 603, ursprünglich erschienen in Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **1**, 1891 und Zeitschr. f. Math. u. Phys. **46**, 1901.

[3]) Ann. d. Phys. **79**, 361, 489 u. 734; **80**, 437; **81**, 109, 1926.

metrischen Optik, also in der Richtung von $\mathfrak{S}$ mit der Geschwindigkeit $m\mathfrak{v} = \operatorname{grad} S$, so drückt Gl. ($\beta$) einfach aus, daß die Anzahl dieser Teilchen bei der Bewegung erhalten bleibt, sofern man ihre Raumdichte durch das Quadrat der Amplitude A gegeben denkt.

Zum Beweis betrachte man eine $\mathfrak{S}$-Röhre von dem unendlich kleinen Querschnitt q und der unendlich kleinen Länge l, und wende auf diese den Gaußschen Satz an:

$$ql \operatorname{div} \mathfrak{v} = \int \mathfrak{v}_n \, d\sigma;$$

daraus folgt, da auf der rechten Seite nur über die beiden Querschnitte q im Abstand l zu integrieren ist, mit $m\mathfrak{v} = \operatorname{grad} S$:

$$\Delta S = \frac{m}{q} \frac{\partial}{\partial l} qv = mv \frac{\partial}{\partial l} \log qv, \tag{15}$$

andererseits können wir (β) schreiben:

$$\Delta S = -|\operatorname{grad} S| \frac{\partial}{\partial l} \log A^2 = -mv \frac{\partial}{\partial l} \log A^2, \tag{16}$$

durch Vergleich von (15) und (16) folgt

$$\frac{\partial}{\partial l} \{A^2 qv\} = 0. \tag{17}$$

Ist nun A^2 die Raumdichte der Teilchen, so bedeutet $A^2 . v$ bzw. $A^2 . q . v$ die Anzahl der Teilchen, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 bzw. q hindurchtreten. Gl. (17) sagt also aus, daß die Teilchenzahl bei der Bewegung innerhalb jeder $\mathfrak{S}$-Röhre erhalten bleibt, wie wir es bei einer stationären Strömung von Korpuskeln verlangen müssen.

Vom Standpunkt der Wellengleichung aus wird die Geschwindigkeit der Teilchen nicht gleich der Wellengeschwindigkeit, sondern gleich der mit ihr verknüpften Gruppengeschwindigkeit[1]).

Es eröffnet sich von hieraus die fesselnde Aussicht, Korpuskeln wie Lichtstrahlen und weiterhin wie Lichtwellen zu behandeln. Bereits liegen experimentelle Andeutungen vor, daß man in Zukunft von einer Beugung der Materie sprechen wird, so gut wie von der Beugung der Lichtwellen.

§ 4. Beugung an Kugeln und anderen Körpern, Methode der Reihenentwicklung.

Viel weitreichender in ihrer Anwendungsfähigkeit als die Methode der verzweigten Lösungen ist die Methode der Reihenentwicklung (Fouriersche Methode). Wie auf allen Gebieten der mathematischen

[1]) Der Begriff der Geschwindigkeit einer Wellengruppe wird in der Hydrodynamik (XX, § 3, 4) behandelt.

Physik, ist sie auch in der Beugungstheorie unentbehrlich, z. B. bei zylindrischen oder sphärischen Grenzflächen. Sie beginnt mit der Einführung geeigneter, im allgemeinen krummliniger Koordinaten und setzt die Separierbarkeit der Differentialgleichung in diesen Koordinaten voraus, d. h. die Möglichkeit der Integration durch Produkte von Partikularlösungen, welche nur von je einer der Koordinaten abhängen. Wir haben uns zunächst mit diesen Partikularlösungen zu beschäftigen.

1. Partikularlösungen. a) Zylinderkoordinaten. In den gewöhnlichen Polarkoordinaten r, φ, z haben wir als allgemeinste Partikularlösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, vgl. (1), S. 454, sofern wir Unabhängigkeit von z voraussetzen:

(1) $$u = e^{ip\varphi} Z_p(kr),$$

wo Z eine der S. 455 dargestellten Zylinderfunktionen (Hankelsche oder Besselsche) bedeutet. Verlangt das Problem die einfache Periodizität in φ, z. B. bei der Beugung an einem zylindrischen Draht, so ist $p = n$ ganzzahlig zu wählen. Wir heben in diesem Falle unter den Partikularlösungen hervor:

(2) $$u = e^{in\varphi} J_n(kr);$$

(2a) $$u = e^{in\varphi} H_n^1(kr).$$

Die erstere kommt allein für das Innere des Zylinders in Betracht, weil nur sie für $r = 0$ endlich bleibt. Die zweite ist im Äußeren des Zylinders zu verwenden, wenn es sich um Wellen handelt, die von dem Zylinder nach außen hin ausstrahlen (reflektierte oder gebeugte Wellen) und wenn die Zeitabhängigkeit in der Form $e^{-i\omega t}$ angesetzt wird. In der Tat liefern die asymptotischen Darstellungen (8) von S. 458 bei großem r die für die Ausstrahlung charakteristische Form der Exponentialfunktion:

$$H_n^1(kr)\, e^{-i\omega t} \longrightarrow \frac{c}{\sqrt{r}}\, e^{i(kr-\omega t)}.$$

Umgekehrt muß man, wenn die Zeitabhängigkeit in der Form $e^{+i\omega t}$ angesetzt werden soll, die zweite Hankelsche Funktion benutzen, entsprechend der asymptotischen Formel

$$H_n^2(kr)\, e^{+i\omega t} \longrightarrow \frac{c'}{\sqrt{r}}\, e^{i(\omega t-kr)}.$$

Wenn der Zustand außer von r, φ auch von z abhängt, so tritt an Stelle der Differentialgleichung (1a) von S. 454:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0.$$

Sie wird in allgemeinster Weise durch folgende Partikularlösung integriert:

(3) $$u = e^{ip\varphi} Z_p\left(\sqrt{k^2 - h^2}\, r\right) e^{ihz}.$$

Handelt es sich um einen Zylinder von der endlichen Höhe H, so hat man, um die etwa für $z = 0$ und $z = H$ vorgeschriebenen Grenzbedingungen zu befriedigen, zu wählen (m ganzzahlig)

$$h = \frac{2\pi m}{H},$$

also der Abhängigkeit von z die Periode H zu geben. Für einen unendlichen Zylinder dagegen ist h kontinuierlich wählbar. Indem wir $k^2 - h^2 = \lambda^2$ setzen und Periodizität in φ voraussetzen, schreiben wir statt (3) spezieller:

(4) $$u = e^{in\varphi} J_n(\lambda r)\, e^{\sqrt{k^2-\lambda^2}\, z},$$

(4a) $$u = e^{in\varphi} H_n^1(\lambda r)\, e^{\sqrt{k^2-\lambda^2}\, z}$$

mit den entsprechenden Anwendungsbedingungen wie bei (2) und (2a). Den Ansätzen (3) und (4) werden wir im folgenden wiederholt begegnen. Auf (3) werden wir z. B. geführt im 14. Kap., § 2 und im 15. Kap., § 1. Die Ansätze (4) werden für die Probleme der drahtlosen Telegraphie im 16. Kap., insbesondere mit $n = 0$, maßgebend sein.

b) Sphärische Polarkoordinaten. Die Wellengleichung lautet hier [1. Bd., S. 76, Gl. (44)]:

(5) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0.$$

Beschränkt man sich auf Lösungen, die im Raum eindeutig und in ϑ singularitätenfrei sind, so hat man anzusetzen:

(6) $$u = v(r) P_n^\nu(\cos\vartheta)\, e^{i\nu\varphi}.$$

P_n^ν sind die „zugeordneten Kugelfunktionen". Für $\nu = 0$ gehen sie über in die gewöhnlichen Kugelfunktionen P_n, welche Polynome n-ten Grades in $x = \cos\vartheta$ sind, sogenannte Legendresche Polynome. Aus (5) und aus Gl. (43), 1. Bd., S. 319, folgt für v die gewöhnliche Differentialgleichung

(7) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) v = 0.$$

Sie hängt mit derjenigen für die Besselschen Funktionen zusammen. Setzt man nämlich $v = w/\sqrt{r}$, so geht (7) nach leichter Umrechnung über in

(8) $$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \left(k^2 - \frac{(n+{}^1/_2)^2}{r^2}\right) w = 0.$$

w ist also eine Zylinderfunktion Z vom Index $n + {}^1/_2$ und vom Argument $\varrho = kr$. Mithin können wir die Lösung von (7) in allgemeiner Form so schreiben:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Z_{n+1/2}(\varrho).$$

Indem wir Z spezialisieren und bequem normieren, setzen wir[1]):

$$(9)\qquad v = \begin{cases} \psi_n(\varrho) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varrho}}\, J_{n+1/2}(\varrho), \\ \xi_n^1(\varrho) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varrho}}\, H_{n+1/2}^1(\varrho), \\ \xi_n^2(\varrho) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varrho}}\, H_{n+1/2}^2(\varrho). \end{cases}$$

Zwischen diesen Funktionen besteht die zu Gl. (4) von S. 455 analoge Beziehung

$$(10)\qquad \psi_n = \tfrac{1}{2}(\xi_n^1 + \xi_n^2).$$

ψ_n teilt mit J_n die Eigenschaft, für $\varrho = 0$ endlich zu sein (oder zu verschwinden). Die Funktionen ξ_n werden, ebenso wie die H_n, für $\varrho = 0$ unendlich. Aus den Gl. (8) von S. 458 folgen die asymptotischen Darstellungen, die im vorliegenden Falle, vgl. S. 460, mit dem $(n+1)$-ten Gliede abbrechen:

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi_n^1(\varrho) = \dfrac{1}{\varrho}\, e^{i\left(\varrho - \frac{n+1}{2}\pi\right)}, \\ \xi_n^2(\varrho) = \dfrac{1}{\varrho}\, e^{-i\left(\varrho - \frac{n+1}{2}\pi\right)} \end{cases}$$

und von da aus wegen (10):

$$(11\,a)\qquad \psi_n(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\sin\left(\varrho - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Besonders einfach sind die Werte von ψ_0 und ξ_0. Indem wir in (7) $n = 0$ und $kr = \varrho$ setzen, entsteht die Gleichung

$$\frac{d^2v}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{dv}{d\varrho} + v = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2} + \varrho v\right) = 0.$$

Das allgemeine Integral, welches bei passender Wahl der beiden Integrationskonstanten C die Funktionen ξ_0 und ψ_0 in sich enthalten muß, ist

$$\varrho v = C_1 e^{+i\varrho} + C_2 e^{-i\varrho}.$$

Indem wir die C in Übereinstimmung mit den asymptotischen Darstellungen (11) bestimmen, finden wir

$$(12)\qquad \xi_0^1 = -i\frac{e^{i\varrho}}{\varrho}, \qquad \xi_0^2 = +i\frac{e^{-i\varrho}}{\varrho}, \qquad \psi_0 = \frac{\sin\varrho}{\varrho}.$$

[1]) Die Bezeichnung ψ rührt von Heine, Handbuch d. Kugelf., die Bezeichnung ζ von Debye, Ann. d. Phys. **30**, 62, 1909 her. ζ heißt bei Heine Ψ. Hinsichtlich der Normierung halten wir an Heine fest, abgesehen von einem Faktor 2 bei ψ. Die Debyeschen Funktionen ψ und ζ unterscheiden sich von unseren durch den Faktor ϱ.

Diese elementaren Ausdrücke entsprechen dem Umstand, daß mit $n = 0$ zufolge einer früheren Bemerkung (S. 460) die asymptotischen Darstellungen (11) im Falle $n = 0$ schon bei dem ersten Gliede abbrechen.

Diejenigen Partikularlösungen (6), welche für $r = 0$ endlich sind bzw. mit $e^{-i\omega t}$ multipliziert für $r = \infty$ einer ausstrahlenden Welle entsprechen, und zwar für den Sonderfall $\nu = 0$, lauten nunmehr

$$u = \psi_n(kr)\, P_n(\cos\vartheta), \tag{13}$$

$$u = \xi_n^1(kr)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{13a}$$

und gehen für $n = 0$ über in

$$u = \psi_0(kr) = \frac{\sin kr}{r}, \tag{14}$$

$$u = \xi_0^1(kr) = -i\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{14a}$$

(14a) ist die uns wohlbekannte Funktion der Kugelwelle (des Dipols).

c) Elliptische Koordinaten. Der allgemeinste Fall, der die beiden vorigen unter sich begreift, ist der der elliptischen Koordinaten, sei es in der Ebene (System der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, vgl. 1. Bd., S. 107), sei es im Raume (konfokale Ellipsoide usw.). Die für die Ebene sich darbietenden Partikularlösungen der Schwingungsgleichung sind die Funktionen des elliptischen Zylinders, über die z. B. das Buch von Pockels (s. S. 430) orientiert. Im Raume sind es Erweiterungen der Laméschen Funktionen. Von Beugungsproblemen, die mit elliptischen Koordinaten vollständig behandelt sind, sei besonders erwähnt der Schirm von elliptischem [1]) und von parabolischem [2]) Querschnitt.

2. Additionstheoreme. Nach Feststellung der Partikularlösungen hat man bei der Methode der Reihenentwicklungen so vorzugehen, daß man zunächst die einfallende Welle nach den betreffenden Partikularlösungen entwickelt. Dies geschieht durch gewisse bemerkenswerte Formeln, welche man als Additionstheoreme bezeichnet.

a) Ebene Welle in Zylinderkoordinaten. Der einfachste Fall ist die Fourier-Entwicklung von $e^{ikx} = e^{ikr\cos\varphi}$ nach dem Winkel φ. Dieselbe ist in der allgemeineren Gl. (10) von S. 462 für $n = 1$ enthalten und schreibt sich am kürzesten:

$$e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(m)} i^m J_m(kr)\, e^{im\varphi}. \tag{15}$$

[1]) B. Sieger, Ann. d. Phys. **27**, 626, 1908.

[2]) P. Epstein, Diss. München 1914. Die „Funktionen des parabolischen Zylinders“ werden mit den Hermiteschen Polynomen identisch.

Der Beweis folgt aus der Integraldarstellung (5) von S. 456 der Funktion J, welche direkt die Form des hier in Betracht kommenden Fourier-Koeffizienten hat. (15) erweist sich als identisch mit Bd. 1, VIII, § 3, Gl. (12″), wenn man beachtet, daß für ganzzahlige m nach derselben Integraldarstellung gilt:

$$J_{-m}(\varrho) = (-1)^m J_m(\varrho).$$

b) Ebene Welle in sphärischen Koordinaten. Wir lassen die Welle in der z-Richtung einfallen, setzen $z = r\cos\vartheta$ und haben als Gegenstück zu (15)

$$e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_0^\infty m (2m+1)\, i^m \psi_m(kr)\, P_m(\cos\vartheta) \tag{16}$$

[vgl. 1. Bd., S. 354, Gl. (12)]. Ein direkter Beweis kann so geführt werden: Setzt man die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion von r und ϑ nach den Partikularlösungen (13) voraus, so kann man ohne weiteres hinschreiben ($kr = \varrho$ gesetzt):

$$e^{i\varrho\cos\vartheta} = \sum c_m \psi_m(\varrho) P_m(\cos\vartheta).$$

Hier ist nach der Orthogonalitätsbedingung der Kugelfunktionen [1. Bd., S. 351, Gl. (7)]:

$$c_m \psi_m(\varrho) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{i\varrho\xi} P_m(\xi)\, d\xi. \tag{16a}$$

Wir vergleichen die asymptotischen Werte für $\varrho \to \infty$ links und rechts. Das Integral rechts geht durch eine partielle Integration (bis auf höhere Glieder in $1/\varrho$) über in:

$$\frac{e^{i\varrho}}{i\varrho} P_m(1) - \frac{e^{-i\varrho}}{i\varrho} P_m(-1)$$

$$= \frac{1}{i\varrho}\left(e^{i\varrho} - (-1)^m e^{-i\varrho}\right) = 2\, i^m \frac{\sin(\varrho - m\pi/2)}{\varrho}.$$

Vergleicht man dies mit dem asymptotischen Werte von $\psi_m(\varrho)$ in (11a), so folgt in der Tat aus (16a)

$$c_m = (2m+1)\, i^m.$$

c) Die Zylinderwelle. Die entsprechende Entwicklung für eine leuchtende Linie (zylindrische Welle) in Polarkoordinaten r, φ ist in den Gl. (12a), (12b) von S. 464 für $n = 1$ enthalten und lautet ($\varphi - \varphi'$ statt φ und $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi}$ gesetzt):

$$H_0^1(kR) = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_m(kr) H_m^1(kr')\, e^{im(\varphi-\varphi')} \ldots r < r', \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} J_m(kr') H_m^1(kr)\, e^{im(\varphi-\varphi')} \ldots r > r'. \end{cases} \tag{17}$$

Macht man in der oberen Zeile Lim $r' = \infty$ und $\varphi' = \pi$, so muß die ebene Welle e^{ikx} entstehen. In der Tat ergibt sich so mit den asymptotischen Formeln (8) von S. 458 unsere Darstellung (15) der ebenen Welle (bis auf einen nur von r' abhängigen Amplitudenfaktor). In diesem Grenzübergang liegt zugleich ein direkter Beweis der Gl. (17) für $r < r'$. Da nämlich die Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in beiden Variablenpaaren r, φ und r', φ' erfüllt ist, so muß der Koeffizient von $e^{im(\varphi-\varphi')}$ eine Partikularlösung der Besselschen Differentialgleichung vom Index m sein, und zwar als Funktion von r gleich der Besselschen Funktion $J_m(kr)$, weil die zu entwickelnde Funktion für $r = 0$ regulär ist; als Funktion von r' kann man zunächst den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$c_m H_m^1(kr') + d_m H_m^2(kr')$$

machen. Geht man aber zu $r' = \infty$, $\varphi' = \pi$ über, so schließt man durch den Vergleich mit (15)

$$c_m = 1, \qquad d_m = 0.$$

Die untere Zeile von (17) folgt dann durch Vertauschung von r und r'.

Schreibt man die entsprechende Gleichung für $H_0^2(kR)$ hin, so entsteht durch Addition beider

$$(17') \qquad J_0(kR) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_m(kr) J_m(kr') e^{im(\varphi-\varphi')}.$$

d) Die Kugelwelle. Die Funktion der Kugelwelle im Raum e^{ikR}/R ist nach Gl. (12) identisch mit $ik\xi_0^1(kR)$. Hier bedeutet R den Abstand der Punkte r, ϑ, φ (Aufpunkt) und r', ϑ', φ' (Leuchtpunkt). Schreiben wir

$$\cos\theta = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

so wird

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta.$$

Die zu (17) analoge Entwicklung lautet hier:

$$(18) \quad \xi_0^1(kR) = \frac{e^{ikR}}{ikR} = \begin{cases} \sum_0^\infty (2m+1)\psi_m(kr)\xi_m^1(kr')P_m(\cos\theta) \ldots r < r', \\ \sum_0^\infty (2m+1)\psi_m(kr')\xi_m^1(kr)P_m(\cos\theta) \ldots r > r'. \end{cases}$$

Das Verhältnis dieser Entwicklung zu (16) ist dasselbe, wie dasjenige von (17) zu (15). Lassen wir nämlich $r' = \infty$, $\vartheta' = \pi$ werden, also den leuchtenden Punkt ins Unendliche der negativen z-Achse rücken, so entsteht (bis auf einen Amplitudenfaktor) die ebene Welle e^{ikz}. Dabei wird

$$\cos\theta = -\cos\vartheta, \qquad P_m(\cos\theta) = (-1)^m P_m(\cos\vartheta).$$

Mit Rücksicht hierauf und auf die asymptotischen Werte (11) für $\xi_m(kr')$ geht (18) direkt in (16) über. Hierin liegt wieder ein direkter Beweis von (18).

Addiert man zu (18) die entsprechende Gleichung für ξ_0^2, so folgt wegen (10):

$$(18') \quad \psi_0(kR) = \frac{\sin kR}{kR} = \sum_0^\infty (2m+1)\,\psi_m(kr)\,\psi_m(kr')\,P_m(\cos\theta) \ldots r \gtrless r'.$$

3. Beugung an einem Zylinder. Der gerade Zylinder (leitender oder dielektrischer Draht) habe die Richtung der z-Achse. Seine Oberfläche sei $r = a$. Er werde von einer ebenen Welle $e^{ik_0 x}$ getroffen. k_0 bzw. k seien die in den Gl. (13) und (12), S. 396, erklärten „Wellenzahlen". Die elektrische Kraft $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z$ sei parallel zur Drahtachse gerichtet. Dann ist auch das gebeugte Licht im gleichem Sinne polarisiert. Wir setzen $\mathfrak{E}_z = E e^{-i\omega t}$ und machen den Ansatz:

$$(19a) \quad E_0 = e^{ik_0 x} + \sum a_m H_m(k_0 r) e^{im\varphi} \ldots r > a,$$

$$(19b) \quad E = \sum b_m J_m(kr) e^{im\varphi} \ldots r < a.$$

H_m ist die erste Hankelsche Funktion; ihre alleinige Verwendung im Äußeren entspricht der Forderung, daß das gebeugte Licht sich vom Draht aus ins Unendliche fortpflanzt. Im Innern ist von den beiden Partikularlösungen (2) offenbar nur diejenige mit J_m zu verwenden.

Mit $\mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{H}$ nach Gl. (I) von S. 391 verknüpft:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{-ic}{\mu\omega}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, \qquad \mathfrak{H}_y = \frac{+ic}{\mu\omega}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \qquad \mathfrak{H}_z = 0,$$

daraus

$$\mathfrak{H}_\varphi = \sin\varphi\,\mathfrak{H}_x + \cos\varphi\,\mathfrak{H}_y = \frac{ic}{\mu\omega}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}.$$

Die Forderung der Stetigkeit von $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ führt also auf die Grenzbedingungen:

$$(20) \quad E_0 = E, \qquad \frac{\partial E_0}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E}{\partial r} \ldots r = a.$$

In (19a) tragen wir die Entwicklung (15) ein und erhalten aus (20):

$$a_m H_m(k_0 a) - b_m J_m(ka) = -i^m J_m(k_0 a),$$

$$k_0 a_m H_m'(k_0 a) - \frac{k}{\mu} b_m J_m'(ka) = -k_0 i^m J_m'(k_0 a).$$

Daraus folgt für das gebeugte Licht

$$(21) \quad \begin{cases} a_m\left(\frac{k}{\mu} J_m'(ka) H_m(k_0 a) - k_0 H_m'(k_0 a) J_m(ka)\right) \\ = -i^m\left(\frac{k}{\mu} J_m'(ka)\, J_m(k_0 a) - k_0 J_m(ka) J_m'(k_0 a)\right). \end{cases}$$

Für den metallischen Draht ($k = \infty$) reduzieren sich die Gl. (20) auf die einzige Bedingung $E_0 = 0$. Hieraus oder durch Grenzübergang aus (21) folgt dann

$$a_m = -i^m \frac{J_m(k_0 a)}{H_m(k_0 a)}. \tag{21a}$$

Bei der umgekehrten Polarisation ($\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z = H e^{-i\omega t}$ parallel zur Drahtachse) hat man die Gl. (19) und (20) mut. mut. für H anzusetzen und entsprechend zu behandeln.

Im Falle Hertzscher Wellen ($\lambda \gg a$) läßt sich die Lösung diskutieren[1]), weil man dann nur wenige Glieder der Reihe braucht. Für den optischen Fall ($a \gg \lambda$, vgl. auch S. 464) ist die Reihe wegen ungenügender Konvergenz ganz unbrauchbar. Wie man hier umzuformen hat, zeigt Debye[2]), der auf diese Weise das zweidimensionale Analogon zum exakten Problem des Regenbogens löst (Wasserzylinder an Stelle des Wassertropfens).

4. Beugung an der Kugel, kolloidale Teilchen. In den Koordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta$$

pflanze sich eine ebene einfallende Welle nach der z-Richtung fort; die elektrische Feldstärke sei nach der x-Richtung, die magnetische also nach der y-Richtung polarisiert. Mit Unterdrückung des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ und mit Rücksicht auf Gl. (15) setzen wir

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_y = e^{ikz} = \sum (2n+1)\, i^n \psi_n(kr)\, P_n(\cos\vartheta), \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Dem entsprechen die Polarkomponenten:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_r = \dfrac{\partial x}{\partial r}\,\mathfrak{E}_x = \sin\vartheta \cos\varphi\, e^{ikr\cos\vartheta}, \\ \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\,\mathfrak{E}_x = \cos\vartheta \cos\varphi\, e^{ikr\cos\vartheta}, \\ \mathfrak{E}_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathfrak{E}_x = -\sin\varphi\, e^{ikr\cos\vartheta}, \end{cases} \tag{22a}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_r = \dfrac{\partial y}{\partial r}\,\mathfrak{H}_y = \sin\vartheta \sin\varphi\, e^{ikr\cos\vartheta}, \\ \mathfrak{H}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial y}{\partial \vartheta}\,\mathfrak{H}_y = \cos\vartheta \sin\varphi\, e^{ikr\cos\vartheta}, \\ \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathfrak{H}_y = \cos\varphi\, e^{ikr\cos\vartheta}, \end{cases} \tag{22b}$$

[1]) Vgl. insbesondere Cl. Schäfer, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. **11**, 225, 1909.
[2]) Phys. Zeitschr. **9**, 775, 1908.

Im Wege des einfallenden Lichtes stehe eine Kugel $r = a$ von beliebigem Material. Um einen übersichtlichen Ansatz für das von ihr gebeugte Licht zu haben, greifen wir auf Gl. (18″) von S. 430 zurück und nehmen den hier vorkommenden Hertzschen Vektor Π als radial an:

$$\Pi = \Pi_r(r, \vartheta, \varphi), \qquad \Pi_\vartheta = \Pi_\varphi = 0. \tag{23}$$

Die Gl. (44), 1. Bd., S. 76 liefern dann zusammen mit dem genannten Ansatz (18″):

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_r = k^2 \Pi + \dfrac{\partial U}{\partial r}, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = \dfrac{1}{r \sin\vartheta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \mathfrak{H}_r = 0, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \dfrac{ic}{\mu\omega}\dfrac{k^2}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{-ic}{\mu\omega}\dfrac{k^2}{r}\dfrac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}. \end{cases} \tag{24}$$

Π und U haben dabei der Differentialgleichung (19″) von S. 430 zu genügen.

$$\operatorname{grad} U - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \Pi + k^2 \Pi = 0. \tag{25}$$

Wir betrachten zunächst die ϑ- und φ-Komponente dieser Gleichung, welche wegen $\Pi_\vartheta = \Pi_\varphi = 0$ nach den genannten Gl. (44) aus Bd. 1 verlangen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r\, \partial \vartheta}, \\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r\, \partial \varphi} \end{aligned}\right\} U = \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \tag{26}$$

Daraufhin lautet die r-Komponente von (25):

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi = 0.$$

Schreiben wir hierin $\Pi = ru$ und dividieren durch r, so folgt [vgl. ebenfalls Gl. (44), Bd. 1]:

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{27}$$

Die Darstellung (24) geht daraufhin über in

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_r = k^2 ru + \dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r\, \partial \vartheta}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r\, \partial \varphi}, \\ \mathfrak{H}_r = 0, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \dfrac{ic}{\mu\omega}\dfrac{k^2}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{-ic}{\mu\omega} k^2 \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}. \end{cases} \tag{28}$$

Dieser Ansatz ist aber insofern noch zu speziell, als dabei $\mathfrak{H}_r = 0$ wird, im Gegensatz zu (22 b). Wir ergänzen ihn durch einen zweiten

Ansatz, bei dem $\mathfrak{E}_r = 0$ wird. Diesen liefern die Gl. (21') von S. 432. Fassen wir Π wieder als radialen Vektor, Gl. (23), auf, so erhalten wir nunmehr

$$(29)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = 0, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{-i\mu\omega}{c}\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = \dfrac{i\mu\omega}{c}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}, \\ \mathfrak{H}_r = k^2\Pi + \dfrac{\partial U}{\partial r}, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta}, \quad \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Die auch jetzt gültige Gl. (25) bestimmt dann U und Π in derselben Weise wie oben, nämlich[1]):

$$U = \frac{\partial\Pi}{\partial r}, \qquad \Pi = rv, \qquad \Delta v + k^2 v = 0$$

und die Gl. (29) gehen über in:

$$(30)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = 0, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{-i\mu\omega}{c}\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = \dfrac{i\mu\omega}{c}\dfrac{\partial u}{\partial\vartheta}, \\ \mathfrak{H}_r = k^2 ru + \dfrac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\vartheta}, \quad \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\varphi}. \end{cases}$$

Wir bilden zunächst die Potentiale u, v, die der einfallenden Welle entsprechen, indem wir die Komponenten $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{H}_r$ in den Darstellungen (28) und (30) mit der Darstellung derselben in den Gl. (22a), (22b) vergleichen. Die letzteren schreiben wir mit Rücksicht auf (16) zunächst so:

$$(31\,a)\quad \mathfrak{E}_r = \frac{-\cos\varphi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\vartheta}e^{ikr\cos\vartheta} = \sum(2n+1)i^n\frac{\psi_n(kr)}{ikr}P_n^1(\cos\vartheta)\cos\varphi,$$

$$(31\,b)\quad \mathfrak{H}_r = \frac{-\sin\varphi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\vartheta}e^{ikr\cos\vartheta} = \sum(2n+1)i^n\frac{\psi_n(kr)}{ikr}P_n^1(\cos\vartheta)\sin\varphi.$$

Dabei haben wir die Beziehung zwischen der ersten zugeordneten Kugelfunktion P_n^1 (1. Bd., VIII, § 2, 5) und der zonalen Kugelfunktion (dem Legendreschen Polynom) $P_n^0 = P_n$ benutzt:

$$P_n^1(\cos\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta}P_n(\cos\vartheta).$$

Aus (31a) und (28) folgt nun

$$(32)\quad \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + k^2 ru = \sum(2n+1)i^n\frac{\psi_n(kr)}{ikr}P_n^1(\cos\vartheta)\cos\varphi.$$

Da u der Gl. (27) genügt, überall endlich und nach (32) mit $\cos\varphi$ proportional sein muß, machen wir im Anschluß an die Gl. (6) und (9) den folgenden Ansatz

$$(32\,a)\qquad u = \sum a_n\psi_n(kr)P_n^1(\cos\vartheta)\cos\varphi.$$

[1]) Die Einführung der Potentiale u, v (unter der Bezeichnung Π_1, Π_2) rührt von Debye her, Diss. München 1908 und Ann. d. Phys. **30**, 57, 1909. Ihr Ursprung aus einem radial gerichteten Hertzschen Vektor, wie er vorstehend gegeben wurde, scheint sonst nicht beachtet zu sein.

Wir setzen in (32) ein und schließen

$$a_n \left(\frac{d^2 r \psi_n}{d r^2} + k^2 r \psi_n \right) = (2n+1)\, i^{n-1} \frac{\psi_n(kr)}{kr}.$$

Nach Gl. (7) ist aber der Faktor von a_n links gleich $n(n+1)\psi_n/r$; daher folgt

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^{n-1}}{k}. \tag{33}$$

Dieselbe Überlegung führt mit Rücksicht auf (30) und (31 b) zu dem folgenden Ansatz für v:

$$v = \sum b_n \psi_n(kr) P_n^1(\cos\vartheta) \sin\varphi \tag{32 b}$$

und zu dem Werte $b_n = a_n$ wie in (33). Somit lauten die Potentiale u, v für die einfallende Welle:

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \sum c_n \psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos\vartheta) \left\{ \begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix} \right.; \quad c_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^{n-1}}{k_0}. \tag{34}$$

Hier haben wir k_0 statt k geschrieben, um anzudeuten, daß die einfallende Welle nur im Äußeren der Kugel (Luft) vorhanden ist.

Wir haben bei der Ableitung von u und v nur die Komponenten $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{H}_r$ der einfallenden Welle benutzt. Die übrigen Komponenten ergeben sich nach den Gl. (28) und (30) durch Superposition dieser beiden Darstellungen. Daß die so erhaltenen Werte mit den Gl. (22 a), (22 b) übereinstimmen, ist nach den Differentialbeziehungen, welche zwischen diesen Komponenten bestehen, eigentlich selbstverständlich, kann aber auch direkt durch Benutzung von Kugelfunktionen-Relationen nachgewiesen werden.

Nunmehr können wir die Lösung unseres gesamten Problems hinschreiben. Sie setzt sich additiv aus den Bestandteilen u und v zusammen. u muß die Form haben:

$$\begin{cases} r > a, \quad \text{Luft}, \quad k = k_0, \\ u = \sum c_n \left(\psi_n(k_0 r) + A_n \xi_n(k_0 r) \right) P_n^1(\cos\vartheta) \cos\varphi, \end{cases} \tag{35 a}$$

$$\begin{cases} r < a, \quad \text{beliebiges Material}, \quad k = k, \\ u = \sum c_n B_n \psi_n(kr) P_n^1(\cos\vartheta) \cos\varphi. \end{cases} \tag{35 b}$$

In der Tat dürfen von den Partikularlösungen (9) im Innern der Kugel nur ψ_n, im Äußeren, abgesehen von der einfallenden Welle, nur ξ_n^1 vorkommen. Daß wir den Faktor c_n beim gebeugten und dem ins Innere eindringenden Teil des Feldes hinzufügen, geschieht zur Vereinfachung der Formeln und beeinträchtigt die Allgemeinheit des Ansatzes offenbar nicht.

Zur Bestimmung der in u noch verfügbaren Koeffizienten A_n, B_n dienen die Grenzbedingungen an der Kugeloberfläche $r = a$:

a) Stetigkeit von $\mathfrak{E}_\vartheta$ und $\mathfrak{E}_\varphi$, d. h. nach den Gl. (28) Stetigkeit von $\frac{\partial (r u)}{\partial r}$, also:

$$\text{(36 a)} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\{r\psi_n(k_0 r)\} + A_n \frac{\partial}{\partial r}\{r\zeta_n(k_0 r)\}_{r=a} = B_n \frac{\partial}{\partial r}\{r\psi_n(k r)\}_{r=a}.$$

b) Stetigkeit von $\mathfrak{H}_\vartheta$ und $\mathfrak{H}_\varphi$, d. h. nach (28) Stetigkeit von $k^2 u/\mu$, also:

$$\text{(36 b)} \qquad k_0^2 (\psi_n(k_0 a) + A_n \zeta_n(k_0 a)) = \frac{k^2}{\mu} B_n \psi_n(k a).$$

Diese Gleichungen bestimmen A_n und B_n. Der allgemeine Ansatz für v lautet ebenso wie der für u [Gl. (35 a), (35 b) mit $\sin\varphi$ statt $\cos\varphi$]. Aber die Grenzbedingungen unterscheiden sich in den Konstanten und liefern daher etwas andere Werte für A_n und B_n.

Wir schreiben die Werte der A_n, B_n nicht hin, da wir auf eine nähere Diskussion der Lösung verzichten müssen und verweisen dieserhalb auf die Arbeit von G. Mie [1]). Die Formeln sind natürlich direkt nur brauchbar für hinreichend kleine Teilchen ($a \ll \lambda$). Solche hat man aber gerade in den kolloidalen Gold- und Silberlösungen vor sich. Die Erklärung der dabei auftretenden merkwürdigen Farben bedingt das besondere physikalische Interesse der Theorie. Bei großen Teilchen (z. B. Wassertropfen, Regenbogen) muß man vor der Diskussion zu einer Integraldarstellung übergehen, ähnlich derjenigen, die wir im Falle der Erdkugel beim Problem der drahtlosen Telegraphie vornehmen werden, vgl. XVI, § 4.

Vierzehntes Kapitel.

Wechselstromwiderstand und Skineffekt.

In diesem und den folgenden Kapiteln handelt es sich wesentlich um Vorgänge, die an der Grenze von Leitern und Nichtleitern auftreten. Das Verhalten der Leiter (und Nichtleiter) wird dabei nicht atomistisch im Sinne der Elektronentheorie, sondern phänomenologisch im Sinne der ursprünglichen Maxwellschen Gleichungen, XII, Gl. (I) bis (VI), definiert. Die Leitfähigkeit σ behandeln wir als endlich, machen also nicht, wie im vorigen Kapitel § 1, den Grenzübergang zum vollkommenen Leiter.

---

[1]) Ann. d. Phys. **25**, 377, 1908. Die Miesche Theorie wird für Radien $a > \lambda$ ergänzt durch G. Jobst, Ann. d. Phys. **76**, 863, 1925 und **78**, 157, 1925.

Im Hauptteil dieses Kapitels werden wir übrigens nicht Maxwellisch, sondern Vor-Maxwellisch rechnen, indem wir den Verschiebungsstrom neben dem Leitungsstrom vernachlässigen. Zunächst aber beginnen wir mit den vollständigen unverstümmelten Maxwellschen Gleichungen.

§ 1. Verteilung an einer leitenden Ebene.

1. Symmetrie des Problems und strenge Integration. Wir stellen uns zunächst ein scheinbar uninteressantes, weitgehend idealisiertes Problem, welches aber als Einführung, auch in die nächsten Kapitel, bedeutungsvoll ist. Der Raum sei zur Hälfte ($y > 0$) Luft, zur anderen Hälfte ($y < 0$) metallischer Leiter, die Trennungsfläche ($y = 0$) also eben. Das Feld sei von einer Koordinate (sagen wir z) unabhängig, zeitlich rein periodisch und habe den Charakter einer in der x-Richtung fortschreitenden Welle. Im Gebiete $y > 0$ haben wir $(\varepsilon, \mu, \sigma) = (1, 1, 0)$, im Gebiete $y < 0$ rechnen wir mit allgemeinen Werten von ε, μ, σ. Das letztere Gebiet können wir als Ausartung eines Drahtes von unendlich groß gewordenem Radius ansehen.

Wir haben zwei mögliche Lösungen der Maxwellschen Gleichungen von entgegengesetzter Symmetrie, ähnlich wie S. 431:

$$\text{A.}\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z,\quad \mathfrak{E} = \begin{cases} \mathfrak{E}_x \\ \mathfrak{E}_y \end{cases},\qquad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}_z = 0,$$

$$\text{B.}\quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z,\quad \mathfrak{H} = \begin{cases} \mathfrak{H}_x \\ \mathfrak{H}_y \end{cases},\qquad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_z = 0.$$

Nur die erste interessiert uns hier, da nur sie der Ausartung eines Wechselstrom-durchflossenen Drahtes entspricht. Bei beiden Ansätzen werden die Maxwellschen Gleichungen (I) und (II) von S. 391 für je drei Komponenten mit Rücksicht auf $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ identisch, d. h. in der Form $0 = 0$ erfüllt, nämlich bei A. die x- und y- Komponente von (I) und die z-Komponente von (II), bei B. die z-Komponente von (I), die x- und y-Komponente von (II).

Wir machen bei A. den komplexen Ansatz

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z = H \cdot e^{-i\omega t + ihx}, \tag{1}$$

welcher der geforderten zeitlichen Periodizität und dem Fortschreiten in der x-Richtung entspricht. h ist eine Konstante, H eine Funktion nur von y. Um H zu berechnen, benutzen wir die aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitete Wellengleichung (12) von S. 396, welche für H liefert:

$$\frac{d^2H}{dy^2} + (k^2 - h^2)H = 0,\quad k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} & \cdots\ y > 0, \\ \dfrac{\varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega}{c^2} & \cdots\ y < 0. \end{cases} \tag{2}$$

h ist die Wellenzahl (Anzahl der Wellenlängen in 2π Längeneinheiten) für die Fortpflanzung längs der Oberfläche des Leiters, k bzw. k_0 ist diejenige Wellenzahl, die der freien, an keine Trennungsfläche gebundenen Fortpflanzung entspricht, sei es im Leiter oder Nichtleiter. Wir können auch sagen: h bezieht sich auf „Oberflächenwellen", k auf „Raumwellen".

Für $\mathfrak{E}$ machen wir den zu (1) analogen Ansatz

$$\mathfrak{E} = \begin{cases} \mathfrak{E}_x = E_x e^{-i\omega t + ihx}, \\ \mathfrak{E}_y = E_y e^{-i\omega t + ihx}. \end{cases} \tag{3}$$

E_x und E_y sind, als Funktionen von y, aus der Maxwellschen Gleichung (II) von S. 391 zu entnehmen:

$$\begin{cases} \dfrac{-i\varepsilon\omega + \sigma}{c} E_x = \dfrac{dH}{dy} & E_x = \dfrac{i\mu\omega}{ck^2}\dfrac{dH}{dy}, \\ \dfrac{-i\varepsilon\omega + \sigma}{c} E_y = -ihH & E_y = \dfrac{\mu\omega h}{ck^2} H. \end{cases} \tag{4}$$

Dabei ergeben sich die rechtsstehenden Werte aus den linksstehenden durch Multiplikation mit $\dfrac{i\mu\omega}{c}$ und Berücksichtigung des Wertes von k^2 in (2).

Aus (4) folgt unmittelbar, daß auch die Maxwellsche Gleichung (IV) von S. 391 erfüllt ist, die bei einem reinen Wellenvorgang, d. h. bei Ausschluß wahrer Ladungen (elektrostatischer Felder) übergeht in $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0$ bzw. in $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$, wenn ε als konstant vorausgesetzt wird.

Gl. (2) wird folgendermaßen integriert:

$$H = Ae^{i\sqrt{k^2 - h^2}\,y} + Be^{-i\sqrt{k^2 - h^2}\,y}. \tag{5}$$

So wie wir früher (S. 396) verabredeten, daß k mit positiv-imaginärem Bestandteil zu rechnen sei, wollen wir jetzt festsetzen, daß von den beiden Werten von $\sqrt{k^2 - h^2}$ derjenige gewählt werde, welcher einen positiv-imaginären Bestandteil hat. Alsdann folgt, daß wir zu setzen haben:

$$\begin{aligned} &\text{für } y > 0 \cdots B = 0, \\ &\text{„ } y < 0 \cdots A = 0, \end{aligned}$$

damit H für $y = \pm\infty$ nicht unendlich groß wird. Außerdem müssen die nicht verschwindenden Werte von A und B unter sich gleich, sagen wir gleich C, werden, damit der erforderlichen Stetigkeit, Gl. (4) von S. 393, genügt wird. Wir schreiben also:

$$\begin{cases} H = Ce^{i\sqrt{k_0^2 - h^2}\,y} & \cdots\ y > 0, \\ H = Ce^{-i\sqrt{k^2 - h^2}\,y} & \cdots\ y < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Hier bedeutet k_0 gemäß (2) den Wert $k = \omega/c$ im Nichtleiter.

Aus (4) ergibt sich nunmehr:

$$(7a)\qquad \begin{cases} E_x = -\sqrt{\dfrac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}}\, C e^{i\sqrt{k_0^2 - h^2}\, y} \\ E_y = \dfrac{h}{k_0}\, C e^{i\sqrt{k_0^2 - h^2}\, y} \end{cases} \cdots y > 0,$$

$$(7b)\qquad \begin{cases} E_x = \dfrac{\mu k_0}{k}\sqrt{\dfrac{k^2 - h^2}{k^2}}\, C e^{-i\sqrt{k^2 - h^2}\, y} \\ E_y = \dfrac{\mu h k_0}{k^2}\, C e^{-i\sqrt{k^2 - h^2}\, y} \end{cases} \cdots y < 0.$$

Somit ist das elektrische und magnetische Feld bestimmt bis auf die Größe C, welche ihrer Natur nach unbestimmt bleibt und von der Stärke der Anregung abhängt, und bis auf die Wellenzahl h. Zur Bestimmung der letzteren haben wir gerade noch eine Gleichung übrig, nämlich die Stetigkeit von E_x [Gl. (4) von S. 393] beim Durchgang durch die Trennungsfläche $y = 0$. Aus (7a) und (7b) folgert man also zunächst für den besonderen Fall $\mu = 1$:

$$1 - \frac{h^2}{k_0^2} = \frac{k_0^2}{k^2}\left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)$$

oder, einfacher geschrieben, nach Fortheben eines gemeinsamen Faktors:

$$(8a)\qquad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k^2}.$$

Im allgemeinen Falle ($\mu > 1$) haben wir statt dessen

$$(8b)\qquad 1 - \frac{h^2}{k_0^2} = \frac{\mu^2 k_0^2}{k^2}\left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)$$

oder auch

$$(8c)\qquad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{k_0^2}\,\frac{1 - \dfrac{\mu^2 k_0^4}{k^4}}{1 - \dfrac{\mu^2 k_0^2}{k^2}}.$$

Wir berechnen noch den Gesamtstrom im Leiter nach der x-Richtung, und zwar für einen Querschnittsstreifen von der Breite 1 in der z-Richtung und der Tiefe ∞ in der y-Richtung. Nach (7b) erhalten wir in komplexer Darstellung:

$$(9)\qquad J = \sigma \int_0^1 dz \int_{-\infty}^0 dy\, \mathfrak{E}_x = \frac{i\mu\sigma k_0}{k^2}\, C e^{-i\omega t + ihx}.$$

Setzen wir für k_0 den Wert aus (2) ein und gehen wir von unserem elektrisch gemessenen Strom J mittels (2) und (3) von S. 392 und 393

zu dem in konventioneller Weise magnetisch gemessenen Strom J_{magn} über, so wird

$$\sqrt{4\pi}\, c J_{\text{magn}} = \frac{i\mu\sigma\omega}{c k^2} C e^{-i\omega t + ihx}. \tag{9a}$$

Der Faktor auf der rechten Seite kann gleich c gesetzt werden, wenn es erlaubt ist, in (2) $\varepsilon\mu\omega^2$ gegen $\mu\sigma\omega$ (Verschiebungsstrom gegen Leitungsstrom) zu vernachlässigen, was in Metallen allgemein der Fall ist. Dann folgt

$$J_{\text{magn}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} C e^{-i\omega t + ihx}. \tag{9b}$$

2. Diskussion des Feldes. a) Große Leitfähigkeit. Bei einem metallischen Leiter ist $|k| \gg k_0$, zumal bei kleineren Frequenzen ω. Deshalb wird nach (8a) oder (8c) $h \simeq k_0$. Die Diskussion des Feldes wird in diesem Falle sehr einfach.

Mit $h = k_0 = \omega/c$ lautet der Exponent im Ansatz (1) oder (3)

$$-i\omega t + ihx = -i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Das Feld pflanzt sich also mit Lichtgeschwindigkeit und ohne Dämpfung in der x-Richtung fort. Gleichzeitig wird

$$\text{für } y > 0 \cdots \mathfrak{E}_x = 0, \quad E_y = C, \quad H = C. \tag{10}$$

Die elektrischen Kraftlinien stehen also senkrecht auf der Oberfläche des Leiters. Elektrische Kraft $\mathfrak{E}_y$ und magnetische Kraft $\mathfrak{H}_z$ haben überall gleiche Stärke, es findet keine Abnahme des Feldes von der Leiteroberfläche nach außen hin statt.

Im Innern des Leiters wird die Abnahme rapide, um so schneller, je größer die Leitfähigkeit ist. Aus (7b) folgt nämlich wegen $|k| \gg h \simeq k_0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{für } y < 0 \cdots E_x = \dfrac{\mu k_0}{k} C e^{-iky}, \quad E_y = \dfrac{\mu h k_0}{k^2} C e^{-iky}, \\ \qquad\qquad H = C e^{-iky}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Wir dürfen schreiben:

$$k = \sqrt{\frac{i\mu\sigma\omega}{c^2}} = (1+i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2c^2}}; \tag{12}$$

da nämlich ε und μ von der Größenordnung 1 sind, kann der erste Summand in (2) gegen den zweiten mit demselben Recht vernachlässigt werden wie k_0^2 gegen k^2. Ferner ist $\sigma = 4\pi c^2 \sigma_{\text{magn}}$, wo σ_{magn} die in

gewöhnlichen (konventionellen) magnetischen Einheiten gemessene Leitfähigkeit bedeutet[1]). Wir können daher statt (12) weiter schreiben

$$(12\,a) \qquad k = (1+i)\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma_{\text{magn}}} = (1+i)\,2\pi\sqrt{\mu\nu\sigma_{\text{magn}}};$$

hier bedeutet $\nu = \omega/2\pi$ die Schwingungszahl pro Sekunde. Infolgedessen geht die Exponentialfunktion in (11) für die Tiefe $y = -d$ über in

$$(13) \qquad e^{-iky} = e^{-2\pi\sqrt{\mu\nu\sigma_{\text{magn}}}\,d} \cdot e^{2\pi i\sqrt{\mu\nu\sigma_{\text{magn}}}\,d}.$$

Die Amplitude des Feldes vermindert sich also auf $1/e$ beim Fortschreiten nach der Tiefe um

$$(13\,a) \qquad d = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\nu\sigma_{\text{magn}}}};$$

gleichzeitig bleibt die Phase um $180^0/\pi$ zurück. Diese Erscheinung heißt bekanntlich Skineffekt. Über die numerischen Verhältnisse bei Kupfer ($\sigma_{\text{magn}} = 5{,}75 \cdot 10^{-4}$, $\mu = 1$) orientiert die folgende Tabelle:

	ν	d mm
Technischer Wechselstrom	50	9,4
Telephonstrom	1000	2,1
Drahtlose Telegraphie $\lambda = 10$ km	$3 \cdot 10^4$	0,4
Hertzsche Welle $\lambda = 1$ m	$3 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^{-3}$

Der gesamte Wechselstrom ist im letzten Falle auf eine dünne Schicht an der Oberfläche des Leiters konzentriert, wie in Fig. 51 angedeutet. Bei Eisen, wo zwar σ sechsmal kleiner, aber μ etwa 600mal größer als bei Kupfer ist, wird der Skineffekt noch ausgeprägter (nämlich d etwa 10mal kleiner).

Die Oberfläche des Leiters ist geladen; die Ladungsdichte η berechnet sich nach Gl. (5) von S. 393 aus dem Sprunge von $\mathfrak{E}_y$ an der Oberfläche. Nach (10) und (11) wird also, wenn man wieder k_0 gegen k vernachlässigt:

$$\eta = Ce^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}.$$

[1]) Aus $\mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}$ folgt beim Übergang zu den konventionellen magnetischen Einheiten nach (2) und (3) von S. 434 und 435

a) $4\pi c^2\mathfrak{J}_{\text{magn}} = \sigma\mathfrak{E}_{\text{magn}}$.

Andererseits definiert man in denselben Einheiten

b) $\mathfrak{J}_{\text{magn}} = \sigma_{\text{magn}}\mathfrak{E}_{\text{magn}}$.

Aus a) und b) folgt die im Text benutzte Beziehung

c) $\sigma = 4\pi c^2\sigma_{\text{magn}}$.

Auch die Ladung läuft hiernach im Grenzfall großer Leitfähigkeit mit Lichtgeschwindigkeit an der Oberfläche entlang.

b) Mäßige Leitfähigkeit. Wenn k_0 nicht gegen k zu vernachlässigen ist, haben wir die Gl. (7) und (8) nach Potenzen von k_0/k zu entwickeln, wobei wir uns auf das erste Glied beschränken werden. Aus (8c) folgt

$$h = k_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 k_0^2}{k^2}\right) = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2\omega^2(\varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega)}{\Omega}\right) \tag{14}$$

mit der Abkürzung

$$\Omega = (\varepsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2.$$

Der Exponent im Ansatz (1) und (2) lautet jetzt:

$$-i\omega t + ihx = -i\omega\left\{t - \frac{x}{c}\left(1 - \frac{\varepsilon\mu^3\omega^4}{2\Omega}\right)\right\} - \frac{\sigma\mu^3\omega^4}{2c\Omega}x. \tag{14a}$$

Die Welle schreitet also in der x-Richtung mit Dämpfung vorwärts und mit einer Geschwindigkeit, die von der Lichtgeschwindigkeit verschieden [$> c$][1]) ist.

Sodann folgt aus (8b), daß

$$\sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}} = \frac{\mu k_0}{k} \tag{15}$$

eine komplexe Größe ist. Da k^2 nach der Definitionsgleichung (2) im ersten Quadranten der komplexen Ebene liegt, liegt k im ersten oder dritten Quadranten, $1/k$ also im vierten oder zweiten. Da nach der bei Gl. (5) getroffenen Verabredung $\sqrt{k_0^2 - h^2}$ mit positiv imaginärem Teile zu wählen ist, haben wir von den beiden möglichen Werten von $1/k$ denjenigen im zweiten Quadranten zu wählen. Wir setzen etwa

$$\sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}} = \varrho e^{i\alpha} \quad \text{mit} \quad \pi/2 < \alpha < \pi; \tag{15a}$$

ϱ ist um so kleiner, je größer $|k|$ gegen k_0 ist.

Die Gl. (6) und (7a) zeigen nun, daß das Feld in Luft nicht mehr von y unabhängig ist, sondern daß eine (bei kleinem ϱ kleine) Abnahme von der Leiteroberfläche nach außen hin stattfindet. Die Abnahme nach dem Innern des Leiters hin ist auch jetzt stark und von der unter a) geschilderten Beschaffenheit.

Des Näheren interessieren wir uns für die Lage der elektrischen Kraftlinien an der Oberfläche des Leiters $y = 0$. Welche Stelle x wir betrachten wollen, ist dabei gleichgültig, weil der Wellenvorgang [abgesehen von der in (14) berechneten Dämpfung] sich ohne Form-

[1]) Da es sich hier lediglich um eine Phasengeschwindigkeit handelt, hat die auftretende Überlichtgeschwindigkeit nichts mit dem bekannten Verbot der Relativitätstheorie zu tun.

änderung längs der x-Achse fortschiebt. Wir setzen daher $x = 0$. Außerdem können wir ersichtlich $C = 1$ setzen. Aus (7a), (15a) und (3) folgt dann in hinreichender Näherung für die nichtleitende Seite der Oberfläche beim Übergang vom Komplexen zum Reellen:

$$(16) \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{E}_x = -\varrho\, \Re\mathfrak{e}\{e^{i(\alpha-\omega t)}\}, \\ Y = \mathfrak{E}_y = \quad \Re\mathfrak{e}\{e^{-i\omega t}\}. \end{cases}$$

Den Inhalt dieser Gleichungen veranschaulicht Fig. 50a. Die beiden elektrischen Komponenten sind als Koordinaten X und Y eingetragen. Y variiert zwischen -1 und $+1$, X zwischen $-\varrho$ und $+\varrho$. Der Punkt (X, Y) beschreibt eine dem Rechteck $(\pm 1, \pm \varrho)$ eingeschriebene

Fig. 50a.

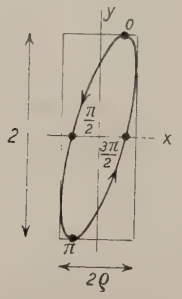
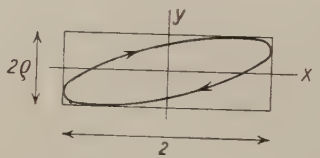


Fig. 50b.



Ellipse. Für $\omega t = 0$ ist $X = -\varrho \cos\alpha > 0$, $Y = 1$ (Punkt 0 der Figur), für $\omega t = \pi/2$ ist $X = -\varrho \sin\alpha < 0$, $Y = 0$ (Punkt $\pi/2$) usf. Die Ellipse wird also in der in der Fig. 50a eingezeichneten Pfeilrichtung durchlaufen. Die Verbindungslinie vom Mittelpunkt nach dem jeweiligen Orte von (X, Y) gibt die jeweilige Richtung des elektrischen Vektors (elektrisches „Drehfeld“). Die mittlere Lage des elektrischen Vektors, gegeben durch die große Hauptachse der Ellipse, ist nicht mehr senkrecht zur Leiteroberfläche, sondern im Sinne der Fortpflanzungsrichtung (positive x-Achse) nach vorn geneigt. Natürlich gibt es aber in jeder Periode auch Zeitpunkte, wo die Kraftlinie genau senkrecht, und auch solche, wo sie genau tangential zur Leiteroberfläche steht. Mit wachsendem k (abnehmendem ϱ) wird Rechteck und Ellipse immer schmäler. Das Feld wird immer mehr ein reines Wechselfeld und stellt sich überwiegend senkrecht zur Leiteroberfläche, entsprechend dem Grenzfall a).

Für den Leiter andererseits haben wir nach (7b) in unmittelbarer Nähe der Oberfläche ($y = 0$), wenn wir wieder die Stelle $x = 0$ ins Auge fassen, hinreichend genau

$$\mathfrak{E}_x = \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{\mu k_0}{k} C\, e^{-i\omega t}\right\}, \qquad \mathfrak{E}_y = \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{\mu k_0^2}{k^2} C\, e^{-i\omega t}\right\}.$$

Bedeutet ϱ eine kleine reelle Größe, α einen Winkel etwas kleiner als $\pi/4$, so können wir schreiben

$$\frac{k_0}{k} = \varrho e^{-i\alpha}.$$

Ferner dürfen wir wählen

$$\frac{\mu k_0}{k} C = 1.$$

Zur Darstellung des elektrischen Vektors im Leiter haben wir dann in den Koordinaten X, Y folgende Gleichungen:

$$(16\,a) \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{E}_x = \Re e\{e^{-i\omega t}\}, \\ Y = \mathfrak{E}_y = \varrho\, \Re e\{e^{-i(\omega t+\alpha)}\}. \end{cases}$$

Sie stellen eine Ellipse dar, deren große Hauptachse etwas gegen die X-Richtung verdreht ist (vgl. Fig. 50 b). Die kleine Hauptachse wird um so kleiner, je größer die Leitfähigkeit. In dem Grenzfalle $k_0 \ll k$, wo die Kraftlinien außerhalb des Leiters sich senkrecht zur Oberfläche richten, entartet die Ellipse im Leiter zu einer Geraden parallel der Oberfläche. Im allgemeinen ist aber auch hier das Feld kein reines Wechselfeld, sondern ein „Drehfeld". Wenn im Leiter $\varepsilon\mu\omega^2$ gegen $\sigma\mu\omega$ vernachlässigt werden kann, fallen die Hauptachsen unserer Ellipse mit der X- und Y-Richtung zusammen.

Fig. 51.

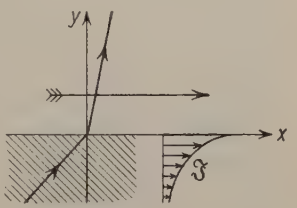


Fig. 51 stellt in sehr schematisierter Weise die mittlere Lage des elektrischen Vektors in Luft und im Leiter dar, im Verhältnis zu der Fortpflanzungsrichtung der Welle, dem horizontalen Pfeil der Figur. Die Figur veranschaulicht recht deutlich, daß die eigentliche Fortpflanzung der Wellen im Nichtleiter vor sich geht und daß die Kraftlinien im Leiter wie in einem widerstehenden Mittel nachgeschleppt werden. Zugleich haben wir in der Figur die Amplitudenabnahme des Wechselstroms im Leiter (den Skineffekt) schematisch dargestellt.

3. Wechselstromwiderstand. Die elementare Definition des Widerstandes (Länge durch Querschnitt × Leitfähigkeit) wird in unserem Falle natürlich hinfällig. An ihre Stelle setzen wir zunächst eine energetische Definition. Wir verstanden unter Q [Gl. (VI) von S. 392] die Joulesche Wärme pro Volumeneinheit und wollen jetzt unter

$$\overline{Q} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{0} Q\, dy$$

das Zeitmittel der Stromwärme verstehen, die in einer Säule senkrecht zur Leiteroberfläche von 1 cm² Querschnitt und der Tiefe ∞ entwickelt wird. Als Definition des Widerstandes R schreiben wir nun, im Anschluß an die Verhältnisse beim Gleichstrom,

$$\overline{Q} = R\overline{J^2}, \tag{17}$$

wo $\overline{J^2}$ den zeitlichen quadratischen Mittelwert des im Sinne von (9) berechneten Gesamtstromes [das Quadrat des effektiven Stromes, Gl. (19) von S. 398] bedeutet. Und zwar erhalten wir R in den gewöhnlichen magnetischen Einheiten (10^{-9} Ohm), wenn wir J in diesen Einheiten rechnen.

Um $\overline{Q}$ in bequemster Weise zu finden, stützen wir uns auf den Poyntingschen Satz, Gl. (7) von S. 394. Dieser ergibt im Zeitmittel mit der jetzigen Bedeutung von $\overline{Q}$:

$$\overline{Q} = -\int \overline{\mathfrak{S}}_n \, d\sigma, \tag{18}$$

wo die rechte Seite über die Oberfläche unserer Säule zu erstrecken und $\mathfrak{S}$ zeitlich zu mitteln ist. Die Oberfläche der Säule besteht aber aus drei Teilen: zwei Parallelflächen senkrecht zur z-Achse, zwei Parallelflächen senkrecht zur x-Achse und aus der Deckfläche senkrecht zur y-Achse. Der Energiestrom $\mathfrak{S}$ steht zufolge der Symmetrie des Feldes überall senkrecht zur z-Achse, so daß die z-Flächen jedenfalls keinen Beitrag liefern. Aber auch die beiden x-Flächen geben zusammen den Beitrag Null, wenigstens dann, wenn wir den Grenzfall großer metallischer Leitfähigkeit (vgl. Nr. 2a) ins Auge fassen. In diesem Falle ist, wie wir sahen, das Feld in der x-Richtung rein periodisch (h reell, gleich k_0); daher tritt durch die eine der beiden x-Flächen derselbe Energiestrom ein, der durch die andere austritt, nur zeitlich verschoben; im Zeitmittel heben sich beide auf. Es bleibt also nur die Deckfläche $y = 0$ übrig. Hier ist

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_y,$$

da n positiv nach außen gerechnet wird. Mithin ergibt (18)

$$\overline{Q} = -\overline{\mathfrak{S}}_y \quad (\text{für } y = 0). \tag{18a}$$

Nun ist

$$\mathfrak{S}_y = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y = -c\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z$$

und nach Gl. (17) von S. 398

$$\overline{\mathfrak{S}}_y = -\frac{c}{4}(E_x\tilde{H} + \tilde{E}_x H) = -\frac{c}{2}\Re\mathfrak{e}(E_x\tilde{H}). \tag{19}$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Mittelbildung nach t in unserem Falle zugleich auch die Abhängigkeit von x zum Verschwinden bringt, weil x nur in der Verbindung $-i\omega t + ihx$ (bei reellem h) vorkommt.

Nach den Gl. (6) und (7a) gilt aber für $y = 0$ (wir dürfen C reell rechnen)

(19a) $$E_x \tilde{H} = -\sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}}\, C^2.$$

Also wird

$$\overline{Q} = -\frac{c}{2}\, \Re e \sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}}\, C^2.$$

Sodann ergibt sich nach der Regel (18) von S. 398 aus (9b) in konventionellen magnetischen Einheiten, in denen wir auch R berechnen wollen:

$$\overline{J^2} = \frac{1}{8\pi} C^2.$$

Daher folgt aus (17)

(20) $$R = -4\pi c\, \Re e \sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}}.$$

Nun ist nach (15) und (12a)

(20a) $$\sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}} = \frac{\mu k_0}{k} = \pm \frac{(1-i)\mu k_0}{2\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma_{\text{magn}}}} = \pm \frac{(1-i)}{2c} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma_{\text{magn}}}}.$$

Hier muß das untere Vorzeichen gewählt werden, damit $\sqrt{k_0^2 - h^2}$, wie verabredet, einen positiv-imaginären Bestandteil aufweist. Aus (20) und (20a) ergibt sich also schließlich:

(21) $$R = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma_{\text{magn}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma_{\text{magn}}}}.$$

Wir führen uns diesen Wert dadurch näher, daß wir ihn vergleichen mit der Eindringungstiefe des Stromes beim Skineffekt. Unser R war gerechnet für die Länge 1 in der Stromrichtung und für einen „Querschnitt" von der Breite 1 in der z-Richtung und der Tiefe ∞ in der y-Richtung. Diese Tiefe wird aber wegen des Skineffekts nicht ausgenutzt. Nennen wir die wirklich maßgebende Tiefe d, setzen also für den Querschnitt $1 \cdot d$, so liefert die gewöhnliche Widerstandsformel (Länge durch Querschnitt $\times$ Leitfähigkeit) in unserem Falle

$$R = \frac{1}{d\sigma}$$

und dies stimmt genau mit (21) überein, wenn wir d im besonderen durch den oben berechneten Wert (13a) messen. Unsere Widerstandsformel (21) ist also eine unmittelbare Folge der Zusammendrängung der Stromlinien in der Leiteroberfläche. Der Widerstand wächst mit wachsender Schwingungszahl und magnetischer Permeabilität, weil gleichzeitig damit der effektive Querschnitt abnimmt. Bei der Schwingungs-

zahl Null (Gleichstrom), wo ein unendlich ausgedehnter Querschnitt für die Stromleitung zur Verfügung steht, wird der Widerstand natürlich Null.

Gehen wir von der Breite 1 unseres Querschnitts über zu einem Querschnitt von der Breite $2\pi a$, betrachten also jetzt ein prismatisches Stück des Leiters von der Länge 1 in der x-Richtung, der Breite $2\pi a$ in der z-Richtung und der Tiefe ∞ bzw. d in der y-Richtung, so erhalten wir einen Widerstand R', der sich aus (21) folgendermaßen berechnet:

$$R' = \frac{R}{2\pi a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma_{\text{magn}}}}. \tag{22}$$

Wir kommen auf diese Formel im nächsten Paragraphen zurück.

Statt der energetischen können wir aber auch eine elektromotorische Definition des Widerstandes benutzen. Wir setzen nämlich in üblicher Weise an:

$$E = RJ + L\frac{dJ}{dt}, \tag{23}$$

wo E die Spannung (das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs der Oberfläche des Leiters), L die (innere) Selbstinduktion bedeutet. Wenden wir diese Gleichung auf die Längeneinheit der x-Achse an, so wird $E = \mathfrak{E}_x$. Wir tragen also in (23) den Wert von $\mathfrak{E}_x$ aus (7a) (auf gewöhnliche magnetische Einheiten umgerechnet und für $y = 0$ genommen) und den von J aus (9b) ein:

$$E = \mathfrak{E}_x = -\sqrt{4\pi}\,c\sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}}\,Ce^{-i\omega t + ihx}, \quad J = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,Ce^{-i\omega t + ihx}.$$

Dann ergibt sich[1]) aus (23) und (20a):

$$R - i\omega L = -4\pi c\sqrt{\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}} = (1-i)\sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma_{\text{magn}}}}. \tag{24}$$

Wir erhalten also auf diese Weise gleichzeitig Widerstand und Selbstinduktion, und zwar ersteren in Übereinstimmung mit Gl. (21).

Noch sei bemerkt, daß wir auch die Selbstinduktion (ebenso wie den Widerstand) energetisch berechnen können nach der Gleichung

$$W_m = \frac{L}{2}J^2,$$

---

[1]) Daß der „Widerstandsoperator" $R - i\omega L$ hier mit negativem Vorzeichen von i geschrieben wird, liegt offenbar daran, daß wir durchweg, z. B. im Ausdruck von J, den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ genannt haben. Bei Vorzeichenumkehr von i im Zeitfaktor wird der Widerstandsoperator natürlich $R + i\omega L$.

die „innere“ Selbstinduktion aus der magnetischen Energie des Leiters, die „äußere“ aus der des umgebenden Luftraumes [vgl. Kap. 11, § 2, Gl. (6)]. Wir kommen auch hierauf im nächsten Paragraphen zurück.

§ 2. Draht von kreisförmigem Querschnitt bei niederen und hohen Frequenzen.

1. Das Wechselfeld von Kreissymmetrie. Der Radius des kreisförmigen Querschnitts sei a, die Mittellinie des Drahtes machen wir zur x-Achse. In der Querschnittsebene definieren wir Polarkoordinaten r, φ. Das elektromagnetische Feld, welches einem im Draht fließenden Wechselstrom entspricht, hat zyklische Symmetrie um die x-Achse, d. h. es gilt für alle Feldkomponenten:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0.$$

Die magnetische Kraft verläuft in Kreisen um die Drahtachse, die elektrische Kraft liegt in den Meridianebenen durch diese Achse.

Wir setzen also, entsprechend dem Ansatz A von S. 500:

$$\text{A.} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\varphi, \quad \mathfrak{E} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{E}_x \\ \mathfrak{E}_r \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_r = \mathfrak{E}_\varphi = 0.$$

Der umgekehrte Ansatz B würde einem magnetischen Wechselstrom entsprechen und wird in gewissem Sinne durch das im folgenden Paragraphen behandelte Spulenproblem realisiert.

Wir schreiben nur diejenigen Komponenten der Maxwellschen Gleichungen, und zwar in Polarkoordinaten transformiert, hin, welche durch unseren Ansatz nicht identisch befriedigt werden. Zunächst benötigen wir die Ausdrücke für die Komponenten der rot, die wir dem 1. Bd., S. 76, Gl. (43) entnehmen. Wir haben z. B.:

$$\mathrm{rot}_r \mathfrak{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial x}, \quad \mathrm{rot}_\varphi \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial r},$$

$$\mathrm{rot}_x \mathfrak{E} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{E}_\varphi) - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}\right).$$

Nur die zweite dieser drei Komponenten ist von Null verschieden. Daher reduziert sich die Maxwellsche Gleichung (I) von S. 391 auf die eine Aussage:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial r}$$

und entsprechend die Gl. (II) auf die zwei Aussagen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \dfrac{\sigma}{c}\mathfrak{E}_r = -\dfrac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial x}, \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \dfrac{\sigma}{c}\mathfrak{E}_x = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{H}_\varphi). \end{cases}$$

Wir setzen ähnlich wie im vorigen Paragraphen:

$$(3)\qquad \mathfrak{H}_\varphi = He^{-i\omega t+ihx},\quad \mathfrak{E}_r = E_r e^{-i\omega t+ihx},\quad \mathfrak{E}_x = E_x e^{-i\omega t+ihx},$$

indem wir den Vorgang als periodisch-harmonisch in der Zeit und als fortschreitende Welle in der x-Richtung voraussetzen. H, E_r und E_x sind dann nur noch Funktionen von r.

Die elektrische Ladung ist bei einem reinen Wellenvorgang im Innern eines homogenen Mediums stets gleich Null zu setzen. Deshalb gibt Gl. (IV) von S. 391 mit Rücksicht auf Bd. 1, S. 76, Gl. (43)

$$(4)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{E}_r) + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) + ihE_x\right)e^{-i\omega t+ihx} = 0.$$

Andererseits ist Gl. (III) von S. 391 von selbst erfüllt.

Nun genügt $\mathfrak{E}_x$ als rechtwinklige Komponente der Wellengleichung in der Form (12) von S. 396. Dies liefert für E_x nach Bd. 1, S. 76, Gl. (43) die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \Delta E_x + k^2 E_x = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_x}{dr}\right) + (k^2 - h^2)E_x = 0.$$

Durch die Substitution $\varrho = \sqrt{k^2 - h^2}\,r$, $Z = E_x$ nimmt sie die Form an:

$$(5\,a)\qquad \frac{d^2Z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dZ}{d\varrho} + Z = 0.$$

Der Vergleich mit (2) von S. 454 und Bd. 1, S. 322, (1) zeigt, daß (5 a) durch eine Zylinderfunktion vom Index 0 integriert wird, also durch eine der Funktionen [s. 1. Bd., S. 336, (28)].

$$(6)\qquad H_0^1(\varrho),\quad H_0^2(\varrho),\quad J_0(\varrho).$$

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf das Innere des Leiters. Die schwierigeren Verhältnisse im Äußeren werden wir im folgenden Kapitel behandeln. Im Innern des Leiters können wir von den Partikularlösungen (6) nur die für $\varrho = 0$ endlich bleibende Funktion $J_0(\varrho)$ brauchen, vgl. hierzu und zu dem Ansatz unserer Partikularlösungen überhaupt XIII, § 4, **1**. Infolgedessen ergibt sich mit Notwendigkeit

$$(7)\qquad E_x = CJ_0(\varrho) = CJ_0(\sqrt{k^2 - h^2}\,r).$$

Um E_r zu finden, stützen wir uns am bequemsten auf die Divergenzbedingung (4). Diese liefert mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (5):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) = -ihE_x = \frac{ih}{k^2-h^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_x}{dr}\right).$$

Hieraus folgt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$(8) \qquad E_r = \frac{ih}{k^2-h^2}\frac{dE_x}{dr} = \frac{ih}{\sqrt{k^2-h^2}}CJ_0'(\sqrt{k^2-h^2}\,r).$$

Schließlich findet man aus (1)

$$(9) \qquad H = \frac{ic}{\mu\omega}\left(\frac{h^2}{k^2-h^2}+1\right)\frac{dE_x}{dr} = \frac{ic}{\mu\omega}\frac{k^2}{\sqrt{k^2-h^2}}CJ_0'(\sqrt{k^2-h^2}\,r).$$

Das Feld ist somit vollkommen bestimmt bis auf die beiden Konstanten C und h. Die erstere bleibt ihrer Natur nach unbestimmt, als Maß der Anregungsstärke, die letztere kann nur im Zusammenhang mit dem Felde im Äußeren des Leiters durch die Grenzbedingungen gefunden werden. Diese werden uns im nächsten Kapitel ausführlich beschäftigen. Nur so viel ist, nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen, z. B. Gl. (14), ohne weiteres klar, daß h von der Größenordnung k_0, der Wellenzahl im Nichtleiter, werden wird.

Dieser Umstand kommt uns bei unserem gegenwärtigen Standpunkt zu Hilfe. Wir können dann nämlich $h \simeq k_0$ gegen k vernachlässigen und erhalten für die uns hauptsächlich interessierenden Größen E_x und H nach (7) und (9) die von h unabhängigen Ausdrücke

$$(10) \qquad \begin{cases} E_x = CJ_0(kr), \\ H = \dfrac{ick}{\mu\omega}CJ_0'(kr). \end{cases}$$

Über E_r dagegen können wir, auch im Leiter, erst etwas Bestimmtes aussagen, wenn wir das Problem vollständig, mit Rücksicht auf den umgebenden Nichtleiter, gelöst haben werden.

Wir berechnen noch den Gesamtstrom J durch Integration über den Querschnitt des Drahtes aus (10)

$$I = 2\pi\sigma\int_0^a E_x r\,dr = 2\pi\sigma C\int_0^a J_0(kr)r\,dr.$$

Das Integral rechts läßt sich leicht ausführen. Aus der Differentialgleichung (5 a) für Zylinderfunktionen vom Index 0 folgt nämlich

$$(11) \qquad Z = -\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\varrho\frac{dZ}{d\varrho},$$

also

$$\int_0^{\varrho_0} Z\varrho\, d\varrho = -\varrho \frac{dZ}{d\varrho}\Big|_0^{\varrho_0} = -\varrho_0 \left(\frac{dZ}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0}. \tag{11a}$$

Setzt man hier ein $Z = J_0(kr)$, $\varrho = kr$, $\varrho_0 = ka$, so entsteht

$$\int_0^a J_0(kr) r\, dr = -\frac{a}{k} J_0'(ka). \tag{12}$$

Mithin wird:

$$I = -\frac{2\pi a \sigma}{k} C J_0'(ka). \tag{13}$$

2. Diskussion des Feldes. Wir wünschen ein Bild zu gewinnen von der Verteilung des Stromes über den Querschnitt bei wachsender Schwingungszahl, wobei wir die Stromstärke an der Oberfläche festhalten und gleich 1 setzen wollen. Dem entspricht es, daß wir die Größe betrachten:

$$X = \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}. \tag{14}$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $|k|a$ eine mäßige oder eine große Zahl ist. Dabei ist es bequem, die Abkürzung

$$\varkappa = \frac{|k|a}{2\sqrt{2}} \quad \text{(unbenannte Zahl)} \tag{14a}$$

einzuführen. Wir unterscheiden also zwei Grenzfälle a) und b):

a) $\varkappa$ klein. In diesem Falle können wir für $J_0(\varrho)$ die Reihenentwicklung (4b) von S. 456 benutzen:

$$J_0(\varrho) = 1 - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^6 + \cdots \tag{15}$$

In (14) eingetragen, erhält man:

$$X = \left(1 - \frac{k^2 r^2}{4} + \frac{k^4 r^4}{64} - \cdots\right)\left(1 + \frac{k^2 a^2}{4} + \frac{3 k^4 a^4}{64} + \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{k^2}{4}(a^2 - r^2) + \frac{k^4}{64}(3a^4 - 4a^2 r^2 + r^4) + \cdots$$

Nun ist in einem metallischen Leiter merklich [Gl. (2) von S. 500] $k^2 = i|k|^2$, somit

$$X = 1 + i\frac{|k|^2}{4}(a^2 - r^2) - \frac{|k|^4}{64}(3a^4 - 4a^2 r^2 + r^2) + \cdots$$

und

$$|X|^2 = \left\{1 - \frac{|k|^4}{64}(3a^4 - 4a^2 r^2 + r^4) + \cdots\right\}^2 + \left\{\frac{|k|^2}{4}(a^2 - r^2) + \cdots\right\}^2$$
$$= 1 - \frac{|k|^4}{32}(a^4 - r^4) + \cdots, \quad |X| = 1 - \frac{|k|^4}{64}(a^4 - r^4),$$

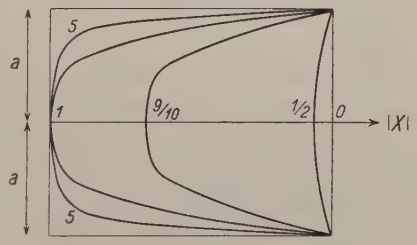
also mit der Abkürzung (14 a)

$$|X| = 1 - \varkappa^4\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right]. \tag{16}$$

Die Amplitude $|X|$ des Wechselstromes tragen wir in Fig. 52 in horizontaler Richtung an jeder Stelle des Querschnitts auf. Von dem Wechsel der Phase, welcher mit der Amplitudenabnahme nach dem Innern Hand in Hand geht, sehen wir dabei ab.

Die Figur zeigt die Kurven für $\varkappa = 0$ (Gleichstrom), $\varkappa = {}^1/_2$, ${}^3/_4$ und 1. Zur Orientierung sei bemerkt, daß nach den Angaben von S. 504 für Kupfer bei einem Radius $a = 1$ mm die Kurve für technischen Wechselstrom fast mit 0 zusammenfällt und daß auch bei einem Telephonstrom von $\nu = 1000\,\mathrm{sec}^{-1}$ die betreffende Kurvendarstellung noch zwischen 0 und ${}^1/_2$ verläuft. Die Kurve 1 hat auf der Drahtachse, nach (16) gerechnet, die Ordinate $|X| = 0$ und zeigt dadurch an, daß unsere Näherung wegen Vernachlässigung höherer Glieder hier ungültig wird (für noch größere Werte von $\varkappa$ würde sie negative Werte liefern). Wir müssen daher für größere Wechselzahlen zu der umgekehrten Näherung übergehen.

Fig. 52.



b) $\varkappa$ groß. Hier bietet sich die asymptotische Darstellung (8) von S. 458 dar. Unter der Annahme eines positiv-imaginären Bestandteils von ϱ, welche unserer Verabredung über das Vorzeichen von $\sqrt{k^2 - h^2}$ S. 501, entspricht, ergibt sich im Limes $\varrho = \infty$:

$$H_0^1(\varrho) = 0, \quad H_0^2(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\, e^{-i(\varrho - \pi/4)} \tag{17}$$

und nach (4) von S. 455

$$J_0(kr) = \sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\, e^{-i(kr - \pi/4)};$$

ebenso

$$J_0(ka) = \sqrt{\frac{1}{2\pi ka}}\, e^{-i(ka - \pi/4)},$$

also nach (14)

$$X = \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{ik(a-r)}.$$

Wir gehen über zur Amplitude $|X|$, indem wir erinnern an $k^2 = i|k|^2$, $k = (1+i)\frac{|k|}{\sqrt{2}}$. Daher

$$|X| = \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}}(a-r)}. \tag{18}$$

Der Faktor von $a - r$ im Exponenten ist nichts anderes als das Reziproke der S. 504 eingeführten Länge d. Wir können also auch schreiben:

$$|X| = \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{-\frac{a-r}{d}}. \tag{18a}$$

Somit ergibt sich ein exponentieller Abfall der Amplitude vom Rande nach der Mitte, und zwar derselbe Abfall wie bei ebener Begrenzung des Leiters (§ 1), sofern unsere asymptotische Darstellung anwendbar ist. Die Grenze zwischen ausgeprägtem Skineffekt und überwiegender Erfüllung des Querschnitts, welche mit der Gültigkeitsgrenze zwischen der asymptotischen Darstellung und der Potenzreihe zusammenfällt, hängt von dem Verhältnis d/a ab. Ist $a \gg d$, so kann sich der Skineffekt rund um den Draht frei ausbilden und die Mitte des Drahtes ist merklich feldfrei. Zugleich kann die Oberfläche des Drahtes nahezu als eben betrachtet werden, da ihr Krümmungsradius a groß gegen die stromführende Schicht d ist. Für $a < d$ dagegen stoßen die stromführenden Schichten beiderseits in der Mitte zusammen und stören sich gegenseitig. Mit $a = 1$ mm und mit den Angaben von S. 504 ergibt sich $d = a$ für eine Schwingungszahl $\nu = 4{,}3 \cdot 10^3$, d. h. für einen Ton an der Grenze der Hörbarkeit. Wir berechnen zur Vervollständigung der Fig. 52 die Kurve für $d = a/10$ nach Formel (18a); ihr entspricht der Wert $\varkappa = 5$. Der Skineffekt ist hier bereits sehr ausgeprägt. Noch vollkommener wird er im Grenzfall der Hertzschen Wellen.

3. Widerstand und Selbstinduktion des Drahtes. Wir benutzen die elektromotorische Definition von Widerstand und Selbstinduktion, Gl. (23) aus § 1. Die Spannung an der Oberfläche des Drahtes, pro Längeneinheit desselben, ist nach (10) in gewöhnlichen magnetischen Einheiten:

$$E = \sqrt{4\pi}\, c\, C J_0(ka),$$

der Strom, in den gleichen Einheiten gemessen, nach (13):

$$I = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}\, c}\, \frac{2\pi a \sigma}{k}\, C J_0'(ka),$$

beidemal unter Fortlassung der Abhängigkeit von t und x. Die Definitionsgleichung

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}$$

liefert also:

$$R - i\omega L = -4\pi c^2 \frac{k}{2\pi a \sigma} \frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)} = -\frac{k}{2\pi a \sigma_{\text{magn}}} \frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)}.$$

Wir vergleichen dies mit dem Gleichstromwiderstand der Längeneinheit des Drahtes

$$R_0 = \frac{1}{\pi a^2 \sigma_{\text{magn}}}$$

und erhalten

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} = -\frac{ka}{2}\frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)}. \tag{19}$$

Hierfür wird auch häufig geschrieben:

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} = \frac{ka}{2}\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}. \tag{19a}$$

In der Tat besteht zwischen den Besselschen Funktionen J_1 und J_0 die Relation $J_1 = -J_0'$, wie man leicht aus der Reihendarstellung (4b) oder der Integraldarstellung (5) von S. 456 ableiten kann.

Zur Diskussion von (19) müssen wir wieder die beiden Grenzfälle unterscheiden:

$$\text{a)}\ |k|a \ll 1 \quad \text{und} \quad \text{b)}\ |k|a \gg 1.$$

Im ersten Grenzfall haben wir nahezu Gleichstrom. Hier muß also R/R_0 in 1, $\omega L/R_0$ in 0 übergehen. Im zweiten Grenzfall haben wir ausgeprägten Skineffekt. Der Strom fließt in einer dünnen Oberflächenschicht, deren Krümmung gegen ihre Dicke vernachlässigt werden kann. Wir haben also hier die Verhältnisse wie bei einem ebenen Leiter, und zwar für eine Schicht desselben von der Breite $2\pi a$. Für eine solche Schicht ist der Widerstand gegeben durch Gl. (22) in § 1. Daraus bekommen wir

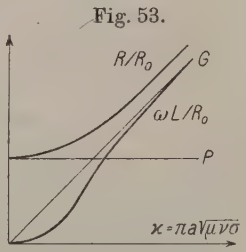


Fig. 53.

$$\frac{R}{R_0} = \pi a \sqrt{\mu \nu \sigma_{\text{magn}}} = \varkappa, \tag{20}$$

wo $\varkappa$ dieselbe Abkürzung wie in (14a) bedeutet. Diese Formel ist für sehr schnelle Wechselströme zuerst von Lord Rayleigh abgeleitet worden. Entsprechend werden wir sogleich zeigen:

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} = (1 - i)\varkappa. \tag{20a}$$

Tragen wir in Fig. 53 Widerstand und Selbstinduktion zur Abszisse $\varkappa$ auf, so wird der Grenzfall a) dargestellt durch eine Parallele P zur Abszissenachse im Abstand 1 (für die Widerstandskurve R/R_0) bzw. durch die Abszissenachse selbst (für die Selbstinduktionskurve $\omega L/R_0$), der Grenzfall b) dagegen (für beide Kurven) durch eine vom Nullpunkt unter 45° aufsteigende Gerade G. Zwischen diese Grenzlinien müssen sich die Kurven für Widerstand und Selbstinduktion einschmiegen. Wir zeigen dies durch nähere Diskussion von (19) oder (19a).

a) $|k|a \ll 1$. Wegen (15) haben wir mit der Abkürzung $ka = \varrho$

$$\frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)} = \frac{1-\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4}{-\frac{\varrho}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4\right]},$$

somit nach (19)

$$\frac{R-i\omega L}{R_0} = \frac{1-\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2-\frac{1}{12}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4.$$

Zur Trennung von Reellem und Imaginärem schreiben wir $\varrho^2 = i|k|^2a^2 = 8ix^2$ und erhalten

$$(21) \qquad \frac{R}{R_0} = 1+\frac{1}{3}x^4, \qquad \frac{\omega L}{R_0} = x^2.$$

Die Widerstandskurve schmiegt sich also der Parallelen P als Parabel vierter Ordnung an, die Selbstinduktionskurve der Abszissenachse als Parabel zweiter Ordnung.

b) $|ka| \gg 1$. Hier haben wir die asymptotische Formel (8 b) von S. 460 zu benutzen.

Nach (19) folgt dann unmittelbar

$$(22) \qquad \frac{R-i\omega L}{R_0} = \frac{-ika}{2} = \frac{(1-i)|k|a}{2\sqrt{2}} = (1-i)x.$$

Dies entspricht der Rayleighschen Widerstandsformel und der asymptotischen Annäherung[1]) an die Gerade G der Fig. 53.

Natürlich lassen sich diese Ergebnisse auch auf Grund der energetischen Definition von Widerstand und Selbstinduktion, vgl. § 1, ableiten.

§ 3. Die Wechselstrom führende Spule.

1. Vereinfachung und Symmetrie des Problems. Die folgende Behandlung[2]) ist lehrreich, weil sie zeigt, wie weit man ein physikalisches Problem idealisieren kann, ohne das Wesentliche desselben aus dem Auge zu verlieren. Wir werden die Spule als unendlich lang in der

[1]) Die Figur bringt zum Ausdruck, was im Text nicht bewiesen ist, daß der Widerstand sich von der Größe x asymptotisch um ein konstantes Glied unterscheidet. In zweiter und dritter Näherung gilt nämlich (vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl., Leipzig 1909, S. 144, oder A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 8, 805, 1907):

$$\frac{R}{R_0} = x+\frac{1}{4}+\frac{3}{64x}, \qquad \frac{\omega L}{R_0} = x-\frac{3}{64x}-\frac{3}{128x^2}.$$

[2]) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **15**, 673, 1904.

x-Richtung behandeln und werden von der Form des Drahtquerschnittes, von der Ganghöhe der Windungen und ihren Isolationen ganz absehen. Die Spule wird dann zum metallischen Hohlzylinder; der innere Radius sei $r = a$, der äußere $r = a + d$, vgl. Fig. 54.

Ferner werden wir das magnetische Feld im Innern der unendlich langen Spule als homogen behandeln. Wir setzen also

$$(1) \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x = H.e^{-i\omega t} \quad \text{für} \quad r \leqq a.$$

Auch im Äußeren der Spule werden wir das magnetische Feld als homogen behandeln. Da es aber im Unendlichen verschwinden muß, werden wir dann zu setzen haben:

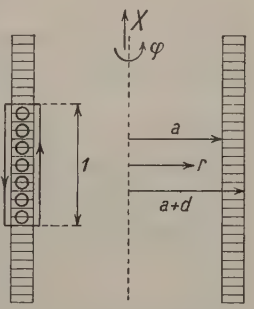
$$(2) \qquad \mathfrak{H} = 0 \quad \text{für} \quad r \geqq a + d.$$

Damit verlassen wir allerdings den strengen Standpunkt der Maxwellschen Theorie. Denn Gl. (II) von S. 391 liefert bei homogenem Magnetfelde wegen $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$

$$(3) \qquad \mathfrak{E} = 0 \quad \text{für} \quad r < a \quad \text{und} \quad r > a + d,$$

und Gl. (I) ist dann nicht zu erfüllen. Wir stellen uns also auf den Vor-Maxwellschen Standpunkt, von dem aus Verschiebungsströme im Nichtleiter unbekannt waren. Die Induktionswirkungen des magnetischen Wechselfeldes werden von diesem Standpunkt aus nur im Leiter, nicht im Nichtleiter, berücksichtigt.

Fig. 54.



Die Homogenitätsvoraussetzung bringt es auch mit sich, daß wir die Fortpflanzung des Feldes nach der x-Richtung vernachlässigen und daher in (1) den in dem vorangehenden Paragraphen eingeführten Faktor e^{ihx} unterdrücken mußten. Denn die Divergenzbedingung (III) von S. 391 verlangt bei homogenem Felde unbedingt

$$\partial \mathfrak{H}_x / \partial x = 0.$$

Trotz dieser Beschränkung auf die Vor-Maxwellsche Theorie wird sich im folgenden die Maxwellsche Methode, d. h. die einheitliche Beschreibung des Feldes durch Differentialgleichungen und Grenzbedingungen, bewähren. Insofern ergänzt unsere Behandlung des Spulenproblems diejenige im 11. Kap., § 3, wo auch die Rechenmethode dem älteren Standpunkt angepaßt war. Wir bezeichnen ebenso wie dort unsere jetzige Auffassung des Feldes als quasi-stationär. Auf die strengere Auffassung kommen wir am Schluß dieser Nummer zurück.

Wir gehen zum Innern des Spulenmaterials $a < r < a + d$ über. Hier ist $\mathfrak{H}$ ebenfalls parallel der x-Achse, aber nicht mehr von r un-

abhängig. Die Abhängigkeit von r wird durch die Wellengleichung, in der Form von Gl. (5) aus § 2, jedoch mit $h = 0$, bestimmt. Von den drei Lösungen (6) der Gl. (5a) benutzen wir hier H_0^1 und H_0^2 (die Sonderstellung der Besselschen Funktion J_0 fällt ja hier fort und das Unendlichwerden der Hankelschen Funktionen für $r = 0$ stört nicht, weil $r = 0$ nicht zum jetzt betrachteten Gebiet gehört). Wir schreiben also:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x = \{C_1 H_0^1(\varrho) + C_2 H_0^2(\varrho)\}\, e^{-i\omega t}, \\ \varrho = kr, \quad k^2 = \dfrac{i\mu\sigma\omega}{c^2}, \quad a \leqq r \leqq a + d. \end{cases}$$

Der hier angegebene besondere Wert von k^2 entspricht dem Umstande, das wir im Innern des Spulenmaterials die Verschiebungsströme zweifellos vernachlässigen dürfen.

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind den Grenzbedingungen anzupassen. Wir setzen

$$(5)\qquad \varrho_1 = ka, \qquad \varrho_2 = k(a + d)$$

und haben wegen der Stetigkeit der magnetischen Feldstärken beim Durchgang durch die Oberfläche der Spule nach (1), (2) und (4):

$$C_1 H_0^1(\varrho_1) + C_2 H_0^2(\varrho_1) = H,$$
$$C_1 H_0^1(\varrho_2) + C_2 H_0^2(\varrho_2) = 0.$$

Dies ergibt:

$$(6)\qquad \mathfrak{H}_x = H \cdot \frac{H_0^2(\varrho_2) H_0^1(\varrho) - H_0^1(\varrho_2) H_0^2(\varrho)}{H_0^2(\varrho_2) H_0^1(\varrho_1) - H_0^1(\varrho_2) H_0^2(\varrho_1)}\, e^{-i\omega t}.$$

Durch das Wechselfeld $\mathfrak{H}$ wird im Spulenmaterial ein Wechselstrom von der spezifischen Stärke $\mathfrak{J}$ induziert. Dank der Vernachlässigung der Isolationen und der Ganghöhe können wir die Stromverteilung als rein azimutal behandeln. Wir setzen also

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\varphi = \sigma \mathfrak{E}_\varphi$$

und haben nach der Maxwellschen Gl. (II) von S. 391 (nur die φ-Komponente derselben kommt in Betracht, da die r- und x-Komponenten die Form $0 = 0$ annehmen):

$$(7)\qquad \frac{1}{c}\mathfrak{J} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial r} = -kH \cdot \frac{H_0^2(\varrho_2) H_0^{1\prime}(\varrho) - H_0^1(\varrho_2) H_0^{2\prime}(\varrho)}{H_0^2(\varrho_2) H_0^1(\varrho_1) - H_0^1(\varrho_2) H_0^2(\varrho_1)} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Wollen wir noch den Gesamtstrom J angeben, so hätten wir $\mathfrak{J}$ über den Querschnitt zu integrieren. Dieser ist aber nicht definiert. Wir helfen uns so, daß wir außer über die Dicke d über die Längeneinheit in der x-Richtung integrieren. Ist N die Windungszahl des Drahtes pro Längeneinheit (wir nehmen eine einlagige Spule an), so haben wir nach (7) oder nach der in Fig. 54 links angedeuteten Umlaufsrelation

(Linienintegral der magnetischen Feldstärke gleich dem Gesamtstrom durch die umlaufene Fläche):

$$N J = \int_0^1 dx \int_a^{a+d} dr \mathfrak{Z},$$

$$J = \frac{c H}{N} e^{-i\omega t}. \tag{8}$$

Bevor wir zur Diskussion der erhaltenen Resultate schreiten, wollen wir sie strenger begründen. Wir erinnern an die Gegenüberstellung der Ansätze A und B im Eingang zu § 1 dieses Kapitels. Als Gegenstück zur Symmetrie des Drahtproblems in § 2, Ansatz A, haben wir als mögliche Symmetrie des Spulenproblems, Ansatz B:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi, \qquad \mathfrak{H} = \begin{cases} \mathfrak{H}_x, \\ \mathfrak{H}_r, \end{cases} \qquad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_r = \mathfrak{H}_\varphi = 0.$$

Alle drei nicht verschwindenden Komponenten setzen wir, wie in den Gl. (2), § 2, in der Form an:

$$\mathfrak{E} = E e^{-i\omega t + ihx}, \quad \mathfrak{H}_x = H_x e^{-i\omega t + ihx}, \quad \mathfrak{H}_r = H_r e^{-i\omega t + ihx}, \tag{9}$$

wo E, H_x und H_r nur mehr von r abhängig sein werden. Wir bestimmen diese Größen zunächst für den Luftraum innerhalb der Spule, $r < a$, $k = k_0$.

Dabei können wir unmittelbar an die Gl. (7), (8), (9) von S. 512 und 513 anschließen. So wie dort E_x, wird jetzt H_x als endliche Lösung J^0 der Besselschen Differentialgleichung gewonnen; so wie früher E_r aus E_x, folgt jetzt H_r aus H_x mittels der Divergenzbedingung usf. Wir erhalten daher jetzt

$$\begin{cases} H_x = C J_0(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r), \\ H_r = \dfrac{i h}{\sqrt{k_0^2 - h^2}} C J_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r), \\ E = \dfrac{i k_0}{\sqrt{k_0^2 - h^2}} C J_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r). \end{cases} \tag{10}$$

Ohne auf die Grenzbedingungen zur Bestimmung von h einzugehen, können wir so viel sagen (vgl. auch S. 513), daß h von der Größenordnung k_0 werden muß. Deshalb ist das Argument aller drei Besselschen Funktionen sehr klein, und wir können setzen

$$J_0(\varrho) = 1, \quad J_0'(\varrho) = -\frac{\varrho}{2};$$

also

$$H_x = C, \quad H_r = -i\frac{h}{2} r C, \quad E = -i\frac{k_0}{2} r C. \tag{11}$$

Weiter aber ist $k_0 = 2\pi/\lambda$ und daher auch $h \simeq 2\pi/\lambda$, wo λ die Wellenlänge des in der Spule fließenden Wechselstromes bedeutet. λ ist aber jedenfalls außerordentlich groß gegen den Spulenradius a bzw.

gegen den Abstand r. Wir haben also in großer Annäherung $H_r = E = 0$ und nach (9)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_x = Ce^{-i\omega t}, \quad \mathfrak{E} = 0,$$

was mit unserem früheren Ansatz in (1) und (3) übereinstimmt. Die Homogenität des magnetischen Feldes und die Vernachlässigbarkeit des elektrischen Feldes innerhalb der Spule werden also auch von einem strengeren Standpunkt bei nicht zu hohen Frequenzen (nicht zu kleinen λ) bestätigt.

Andererseits hätten wir für den Luftraum außerhalb der Spule ($r > a + d$, $k = k_0$) zunächst statt (10) anzusetzen:

$$H_x = C_1 H_0^1(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r) + C_2 H_0^2(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r).$$

Hier muß $C_2 = 0$ sein, weil H_0^2 für $r = \infty$ bei positiv imaginärem Bestandteil des Argumentes exponentiell unendlich wird, vgl. Gl. (8) von S. 458. (Aus dem gleichen Grunde ist für das Äußere der Spule die Funktion J_0 unbrauchbar.) Wir müssen aber auch $C_1 = 0$ setzen. Anderenfalls würde, da das Argument von H_0^1 sehr klein ist ($h \simeq k_0$), H_x außerhalb der Spule nur sehr langsam abnehmen (zunächst sogar zunehmen), was widersinnig ist. Wir bekommen also $H_x = 0$ und infolgedessen auch [vgl. (10)] $H_r = E = 0$. Dies stimmt mit unserem Ansatz (2) und (3) für den Außenraum der Spule überein. Daß sich jetzt auch die Formeln (4), (6), (7) für das Innere des Spulenmaterials als Näherungen des strengen Ansatzes ergeben, versteht sich von selbst.

2. Diskussion des Feldes. Es handelt sich um die graphische Darstellung der Gl. (6) und (7) für das Innere der Spule $a < r < a + d$. Zunächst zeigt sich, daß wir, unter Ausschluß des reinen Gleichstroms, in allen Fällen zu den asymptotischen Formeln (8), S. 458, der Hankelschen Funktionen greifen müssen. Es ist nämlich

$$\varrho_1^2 = k^2 a^2 = \frac{i\mu\sigma\omega}{c^2} a^2 = 8\pi^2 i \mu \nu \sigma_{\text{magn}} a^2.$$

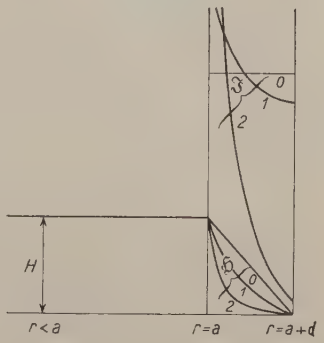
Nehmen wir z. B. $a = 5\,\text{cm}$ und nach den Angaben von S. 504 für Kupfer $\mu = 1$, $\sigma_{\text{magn}} = 5{,}75 \cdot 10^{-4}$, so wird $\varrho_1^2 = 1{,}15 \cdot i \cdot \nu$. Da wir uns nur für Schwingungszahlen $\nu > 50$ interessieren, sind ϱ_1 sowie ϱ und ϱ_2 stets als große Zahlen anzusehen. Die genannten asymptotischen Formeln liefern alsdann [1]):

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \dfrac{e^{-i(\varrho_2-\varrho)} - e^{+i(\varrho_2-\varrho)}}{e^{-i(\varrho_2-\varrho_1)} - e^{+i(\varrho_2-\varrho_1)}} H e^{-i\omega t}, \\ \mathfrak{Z} = -ick \dfrac{e^{-i(\varrho_2-\varrho)} + e^{+i(\varrho_2-\varrho)}}{e^{-i(\varrho_2-\varrho_1)} - e^{+i(\varrho_2-\varrho_1)}} H e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

[1]) Hier würde rechter Hand zunächst noch ein Faktor $\sqrt{\varrho_1/\varrho}$ hinzutreten. Es ist aber nur konsequent, diesen Faktor durch 1 zu ersetzen, d. h. nach den großen Zahlen ϱ_1 und ϱ zu entwickeln und mit dem ersten Gliede abzubrechen.

Wenn nun auch ϱ_1 und ϱ_2 große Zahlen sind, so kann es doch sein, daß $\varrho_2 - \varrho_1$ und $\varrho_2 - \varrho$ kleine Zahlen werden. In diesem Falle wird man die Exponentialfunktionen in (12) durch die ersten Glieder ihrer Potenzreihen ersetzen können. Sind andererseits $\varrho_2 - \varrho_1$ und $\varrho_2 - \varrho$ ebenfalls große Zahlen, so wird man wegen des komplexen Charakters derselben je eine der Exponentialfunktionen gegen die andere streichen können. Wir unterscheiden also zwei Grenzfälle:

Fig. 55.



a) $|\varrho_2 - \varrho_1|$ klein.

Hier erhält man aus (12) durch Potenzentwicklung und Fortheben des Faktors $-2ik$ im Zähler und Nenner:

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = \dfrac{a+d-r}{d} H e^{-i\omega t}, \\ \dfrac{\mathfrak{Z}}{c} = \dfrac{1}{d} H e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

Das Magnetfeld sinkt also linear ab von dem Werte H für $r = a$ auf den Wert 0 für $r = a + d$. Der Strom ist gleichförmig über den Querschnitt verteilt. Dies ist der Grenzfall des Gleichstroms.

b) $|\varrho_2 - \varrho_1|$ groß.

Da wir k mit positiv imaginärem Teil rechnen, haben $i(\varrho_2 - \varrho)$ und $i(\varrho_2 - \varrho_1)$ einen negativen reellen, und zwar im allgemeinen sehr großen Bestandteil. Infolgedessen ist in (12) je die zweite Exponentialfunktion des Zählers und Nenners gegen die erste zu vernachlässigen. Man erhält:

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = e^{-i(\varrho_1-\varrho)} H e^{-i\omega t} = e^{ik(r-a)} H e^{-i\omega t}, \\ \dfrac{1}{c}\,\mathfrak{Z} = -ike^{-i(\varrho_1-\varrho)} H e^{-i\omega t} = -ike^{ik(r-a)} H e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

Dieser Grenzfall entspricht dem ausgeprägten Skineffekt: Magnetisches und elektrisches Feld nehmen exponentiell ab, wenn wir von der inneren Berandung der Spule ($r = a$) ins Spulenmaterial eindringen. Und zwar ist dieser Skineffekt hier durchaus einseitig ausgebildet: Stromfäden und Magnetkraftlinien drängen sich auf der Innenseite der Spule zusammen und lassen die Außenseite der Spule frei.

Das Nähere stellen wir in Fig. 55 dar. Sie zeigt die konstante Amplitude H des magnetischen Wechselfeldes innerhalb der Spule $r < a$ und ihren Abfall nach Null im Spulenmaterial. Der Abfall ist linear für Gleichstrom (Kurve 0) und wird zunehmend steiler für zunehmende Wechselzahl (Kurve 1 und 2). Die Kurven darüber stellen die Stromverteilung dar. Bei Gleichstrom ist sie gleichförmig (Kurve 0), bei zu-

nehmender Wechselzahl haben wir zunehmende Stromdichten an der Innenseite und abnehmende an der Außenseite des Spulenmaterials (Kurve 1 und 2) bei gleicher Größe des Gesamtstroms (gleicher 3-Fläche in der Figur).

3. Widerstand und Selbstinduktion der Spule. Wir gehen aus von der elektromotorischen Definition für R und L, Gl.(23) in § 1, und setzen hier für J den Wert (8), für E den Wert $\mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{Z}/\sigma$ aus (12) bei $r = a$ ein. So entsteht:

$$R - i\omega L = \frac{ikN}{\sigma} \frac{e^{i(\varrho_2-\varrho_1)} + e^{-i(\varrho_2-\varrho_1)}}{e^{i(\varrho_2-\varrho_1)} - e^{-i(\varrho_2-\varrho_1)}}. \tag{15}$$

Hier ist nach (4)

$$\varrho_2 - \varrho_1 = kd = (1+i)\frac{|k|d}{\sqrt{2}} = (1+i)\frac{\varkappa}{2},$$

wenn wir setzen

$$\varkappa = \sqrt{2}\,|k|d = \sqrt{\frac{2\mu\sigma\omega}{c^2}}\,d = 4\pi d\sqrt{\mu\nu\sigma_{\text{magn.}}}. \tag{16}$$

Der Nenner in (15) hat dann die Form

$$e^{(-1+i)\frac{\varkappa}{2}} - e^{(1-i)\frac{\varkappa}{2}}.$$

Indem wir Zähler und Nenner mit der dazu konjugierten Größe multiplizieren, ergibt sich

$$R - i\omega L = (1-i)\frac{\varkappa N}{2\sigma d}\frac{(e^{\varkappa} - e^{-\varkappa}) + (e^{i\varkappa} - e^{-i\varkappa})}{(e^{\varkappa} + e^{-\varkappa}) - (e^{i\varkappa} + e^{-i\varkappa})},$$

oder mit Benutzung der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen (sin, cos bzw. Sin, Cos, s. 1. Bd., S. 93):

$$R - i\omega L = (1-i)\frac{\varkappa N}{2\sigma d}\frac{\operatorname{Sin}\varkappa + i\sin\varkappa}{\operatorname{Cos}\varkappa - \cos\varkappa}. \tag{17}$$

Wir gehen zunächst zum Gleichstromfalle ($\omega = 0$, $\varkappa = 0$) über und erhalten

$$R_0 = \frac{N}{\sigma d}\,^{1}). \tag{11a}$$

Also wird

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} = (1-i)\frac{\varkappa}{2}\frac{\operatorname{Sin}\varkappa + i\sin\varkappa}{\operatorname{Cos}\varkappa - \cos\varkappa}, \tag{17a}$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\varkappa}{2}\frac{\operatorname{Sin}\varkappa + \sin\varkappa}{\operatorname{Cos}\varkappa - \cos\varkappa}, \qquad \frac{\omega L}{R_0} = \frac{\varkappa}{2}\frac{\operatorname{Sin}\varkappa - \sin\varkappa}{\operatorname{Cos}\varkappa - \cos\varkappa}. \tag{17b}$$

Wiederum betrachten wir zwei Grenzfälle:

---

[1]) Vergleichen wir dies mit der Formel $R_0 = 1/F\sigma$ für die Längeneinheit eines Drahtes vom Querschnitt F, so folgt $F = d/N$. Dies entspricht einem rechteckigen Querschnitt von der Breite d und der Höhe $1/N$, vgl. Fig. 54.

a) $\varkappa$ klein. Durch Potenzentwicklung im Zähler und Nenner von (17b) z. B.

$$\operatorname{Cos}\varkappa - \cos\varkappa = \varkappa^2\left(1 + \frac{2\varkappa^4}{6!} + \cdots\right)$$

erhält man

$$(18a)\qquad \frac{R}{R_0} = \left[1 + \frac{4}{45}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^4 + \cdots\right],\quad \frac{\omega L}{R_0} = \frac{\varkappa^2}{6}\left[1 - \frac{8}{315}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^4 + \cdots\right].$$

b) $\varkappa$ groß. Dann sind $\sin\varkappa$, $\cos\varkappa$ gegen $\operatorname{Sin}\varkappa = \operatorname{Cos}\varkappa$ zu vernachlässigen, und man erhält aus (17b),

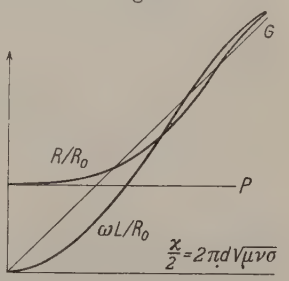
$$(18b)\qquad \frac{R}{R_0} = \frac{\omega L}{R_0} = \frac{\varkappa}{2}.$$

Dies erläutert Fig. 56, in welcher als Abszisse

$$(19)\qquad \frac{\varkappa}{2} = 2\pi d\sqrt{\mu\nu\sigma_{\text{magn}}}\quad [\text{vgl. (16)}]$$

aufgetragen ist. Die Kurve R/R_0 beginnt als Parabel vierter Ordnung an der Parallelen P zur Abszissenachse und nähert sich der Grenzgeraden G oszillatorisch an; ebenso die Kurve $\omega L/R_0$, welche als Parabel zweiter Ordnung an der Abszissenachse beginnt. Beide Kurven durchdringen sich je in äquidistanten Punkten.

Fig. 56.



Beim Vergleich der jetzigen mit der früheren, ihr ähnlichen Fig. 53 ist zu beachten, daß unsere jetzige Abszisse $\varkappa/2$ aus Gl. (19) in gewissem Sinne viermal so groß ist als die frühere $\varkappa$ aus Gl. (20), S. 517, wenn wir nämlich die Spulendicke d dem Durchmesser $2a$ des geraden Drahtes entsprechen lassen. In diesem Sinne ergibt Gl. (18b) einen viermal so großen Widerstand als Gl. (22) von S. 518 beim geraden Draht. Diese Vergrößerung des Widerstandes erklärt sich leicht aus der ungünstigeren Stromverteilung (Zusammendrängung der Stromfäden auf der Innenseite der Spule), verglichen mit der gleichmäßigen Verteilung über den Umfang des geraden Drahtes. F. Dolezalek[1]), der diese Widerstandsvergrößerung zuerst empirisch festgestellt hat, suchte sie zu vermeiden durch Verwendung gedrehten Litzendrahtes, wodurch eine vollere Ausnutzung des Spulenquerschnittes erreicht wird.

Während die qualitativen Verhältnisse durch unsere Formeln (18a, b) in charakteristischer Weise wiedergegeben werden, dürfen wir auf die Zahlenkoeffizienten kein zu großes Gewicht legen. Vielmehr hängen diese

[1]) Ann. d. Phys. **13**, 1142, 1903.

von der wirklichen Querschnittsform und von der bei uns vernachlässigten Ganghöhe ab. Die genaue Berücksichtigung dieser Umstände wird recht umständlich [1]). Bei kreisförmigem Querschnitt und dichtester Wicklung (Ganghöhe = Durchmesser des Drahtes = der obigen Größe d) ergibt sich statt (18a)

$$\frac{R}{R_0} = 1 + 0{,}042 \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^4;$$

andererseits ist bei sehr schnellen Frequenzen der Widerstand nicht wie nach (18b) viermal, sondern nur 3,4mal größer als beim geraden Drahte. Im Hochfrequenzfalle braucht man zur Darstellung des magnetischen Feldes die elliptischen Modulfunktionen (nämlich die Abbildung eines — ausgearteten — Kreisbogendreiecks auf die Halbebene).

In viel allgemeinerer Weise ist das Spulenproblem von Lenz [2]) behandelt; dieser leitet auch Formeln ab für die praktisch wichtigen Eigenfrequenzen von Spulen.

Lehrbücher.

E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, insbes. S. 449 ff. Leipzig 1900.
Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität, Bd. 1, § 78, 6. Aufl. Leipzig 1921.

Fünfzehntes Kapitel.

Drahtwellen.

In den Versuchen von Heinrich Hertz spielten die an Drähten entlang laufenden elektromagnetischen „Oberflächenwellen" neben den im freien Luftraum fortgepflanzten „Raumwellen" eine entscheidende Rolle. Hertz erwartete die Geschwindigkeit dieser Drahtwellen gleich der Lichtgeschwindigkeit c (bzw. gleich $c/\sqrt{\varepsilon}$ im Dilektrikum), konnte dies Resultat aber zunächst weder experimentell noch theoretisch sichern. Der Grund seines experimentellen Mißerfolges war das Mitspielen der Laboratoriumswände [3]), der Grund für das Versagen seiner Theorie [4])

---

[1]) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **24**, 609, 1907; die im Text genannten Resultate sind daselbst enthalten in Gl. (30) und Gl. (40), wenn man in ersterer $h = 2r$ setzt und in letzterer eine von G. Breit (Journ. Opt. Soc. of Amer. **10**, 65, 1925) bemerkte numerische Korrektur anbringt.

[2]) W. Lenz, Ann. d. Phys. **34**, 923, 1912; **43**, 749, 1914. Vgl. auch eine anschließende Arbeit von A. Goosmann, Arch. f. Elektrot. **14**, 258, 1925.

[3]) H. Hertz, Ges. Werke, 2. Bd., Einleitung, S. 10ff.

[4]) Ebenda, S. 65 oder Ann. d. Phys. **36**, 1, 1888. Es ist dies dieselbe Arbeit, in der Hertz seine klassische Darstellung des Feldes eines schwingenden Dipols gibt.

eine zu weit gehende Idealisierung des Problems: Er behandelte den Draht als unendlich dünn und konnte daher keine elektromagnetischen Grenzbedingungen ansetzen. Diese sind in der Tat für die Berechnung der Geschwindigkeit der Drahtwellen maßgebend und liefern, wie wir sehen werden, einen Wert, der praktisch gleich c, genau genommen ein wenig kleiner als c ist.

Die experimentellen Schwierigkeiten wurden bekanntlich durch E. Lecher überwunden, der statt eines Einzeldrahtes zwei parallele Drähte anordnete, derart, daß die elektrischen Kraftlinien von dem einen Draht ausgehen und am anderen endigen. Hierdurch wird das Feld konzentriert und die unliebsame Mitwirkung der Umgebung ausgeschaltet. Die theoretische Behandlung des Lecherschen Systems ist, wenn man sich nicht mit einer quasistationären Näherung [1]) begnügen will, viel komplizierter als die strenge Theorie des Einzeldrahtes [2]). Deshalb wenden wir uns zunächst zu letzterem.

§ 1. Feld und Fortpflanzung von Drahtwellen.

Der Draht sei unendlich lang und gerade, sein Querschnitt kreisförmig und von konstanter Größe. Die Mittellinie des Drahtes machen wir zur x-Achse, in der Querschnittsebene zählen wir die Koordinaten r und φ. Die Symmetrie des Problems ist dieselbe wie S. 511 und wird durch den Ansatz A daselbst festgelegt. Die magnetische Kraft verläuft also in Kreisen um die Drahtachse, die elektrische Kraft liegt in den Meridianebenen durch diese Achse. Alle Feldkomponenten sind von φ unabhängig.

Wir betrachten einen zeitlich periodischen Vorgang, der einer am Draht fortschreitenden Welle entspricht. Wir setzen also wie S. 512:

$$(1) \qquad \mathfrak{H}_\varphi = H e^{-i\omega t + ihx}, \quad \mathfrak{E}_r = E_r e^{-i\omega t + ihx}, \quad \mathfrak{E}_x = E_x e^{-i\omega t + ihx}.$$

Die Konstante h ist für das Innere und Äußere des Drahtes dieselbe und definiert die Fortpflanzung der Welle in der x-Richtung. Das Feld im Innern ist uns bekannt, Gl. (7), (8) und (9) von S. 512 und 513. Wir suchen das Feld im Äußern, zunächst E_x. Für E_x gilt die Wellengleichung (5) von S. 512 [vgl. auch Gl. (2) von S. 500] mit

$$(2) \qquad k = k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Im Äußern des Drahtes dürfen wir nämlich $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$ setzen. Die Wellengleichung wird nach dem über ihre Partikularlösungen S. 512 Gesagten integriert durch eine Zylinderfunktion mit dem Argument

$$\varrho = \sqrt{k_0^2 - h^2}\, r.$$

[1]) Vgl. 11. Kap., § 2.

[2]) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **67**, 233, 1899.

Wir verabreden abermals, daß die Quadratwurzel mit positiv-imaginärem Bestandteil zu rechnen ist, unter der Annahme, daß sie komplex ist. Die gegenteilige Annahme, daß sie reell sein könnte, werden wir in 4 zurückweisen.

Von den drei S. 512 genannten Partikularlösungen ist alsdann nur eine, nämlich $H_0^1(\varrho)$, zu brauchen. Die beiden anderen werden nach den asymptotischen Formeln (8) von S. 458 für $r = \infty$ unendlich groß. Von H_0^1 kommt aus demselben Grunde nur der Hauptzweig (vgl. S. 459) in Betracht. Wir schreiben, indem wir den oberen Index 1 bei H_0 fortlassen:

$$E_x = A H_0(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r). \tag{3}$$

Die Größen E_r und H folgen jetzt, genau so wie S. 513, auf Grund der Maxwellschen Gleichungen und ergeben sich zu:

$$E_r = \frac{i h}{\sqrt{k_0^2 - h^2}} A H_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r), \tag{4}$$

$$H = \frac{i k_0}{\sqrt{k_0^2 - h^2}} A H_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r). \tag{5}$$

1. Oberflächenbedingungen und transzendente Gleichung. In den Gl. (3), (4), (5) kommen zwei unbestimmte Konstanten A und h vor. Ebenso blieben in der Darstellung des Feldes im Innern des Drahtes die beiden Konstanten C und h unbestimmt, vgl. S. 513. Das macht im ganzen zwei Unbekannte, nämlich das Amplitudenverhältnis A/C und die Fortpflanzungskonstante h. Zu ihrer Festlegung genügen gerade die beiden Oberflächenbedingungen (Stetigkeit der tangentialen Komponenten; die Indizes i und a bedeuten Inneres und Äußeres):

$$E_{xi} = E_{xa}, \quad H_i = H_a, \tag{6}$$

d. h.:

$$\begin{cases} A H_0(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, a) = C J_0(\sqrt{k^2 - h^2}\, a), \\ \dfrac{k_0^2}{\sqrt{k_0^2 - h^2}} A H_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, a) = \dfrac{k^2}{\mu\sqrt{k^2 - h^2}} C J_0'(\sqrt{k^2 - h^2}\, a). \end{cases} \tag{7}$$

Durch Elimination von A und C folgt die transzendente Gleichung des Problems:

$$\frac{\xi H_0(\xi)}{H_0'(\xi)} = \frac{\mu k_0^2}{k^2} \frac{\eta J_0(\eta)}{J_0'(\eta)} \cdot \begin{cases} \xi = \sqrt{k_0^2 - h^2}\, a, \\ \eta = \sqrt{k^2 - h^2}\, a. \end{cases} \tag{8}$$

Ist dieselbe gelöst, so bestimmt sich die Unbekannte A/C natürlich durch Einsetzen von h in eine der beiden Gl. (7). Daraufhin ist das Feld sowohl im Innern wie im Äußern des Drahtes bekannt.

Zur Vereinfachung von (8) stellen wir den Grenzfall des vollkommenen Leiters, $|k| \to \infty$, voran. In diesem Falle wird $\eta = ka$

eine unendlich große komplexe Zahl (mit positiv-imaginärem Bestandteil); nach Gl. (8 b) von S. 460 haben wir daher $J/J' = +i$. Infolgedessen nimmt die rechte Seite von (8) den von h unabhängigen Wert

$$i\mu\frac{k_0}{k}k_0 a \tag{9}$$

an, welcher im Limes $k \to \infty$ zu Null geht. Damit nun auch die linke Seite von (8) verschwindet, werden wir

$$\xi = 0, \quad h = k_0 = \frac{\omega}{c} \tag{10}$$

annehmen müssen. Denn wir haben früher (Fig. 43, S. 461) gesehen, daß der Hauptzweig der Hankelschen Funktion H_0 keine Nullstellen besitzt. Nach Gl. (10) wird dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs des Drahtes gleich c. Dies ist es, was Hertz vermutete.

Der Fall der wirklichen metallischen Drähte muß sich stetig an den Fall des vollkommenen Leiters anschließen. Wir dürfen also ξ als klein voraussetzen und auf der linken Seite von (8) für H_0 die Näherungsformel (6) von S. 456 benutzen:

$$\frac{i\pi}{2}H_0(\xi) = -J_0(\xi)\log\frac{\gamma\xi}{2i} = -\log\frac{\gamma\xi}{2i}, \quad \frac{i\pi}{2}H_0'(\xi) = -\frac{1}{\xi}. \tag{10a}$$

Für die rechte Seite ist der Wert (9) einzutragen. So entsteht

$$\xi^2\log\frac{\gamma\xi}{2i} = i\mu\frac{k_0}{k}k_0 a.$$

Wir schreiben dafür

$$\begin{cases} u\log u = v, \\ u = \left(\frac{\gamma\xi}{2i}\right)^2, \quad v = -\frac{i\gamma^2}{2}\mu\frac{k_0}{k}k_0 a. \end{cases} \tag{11}$$

Da v bekannt ist, wird u durch die transzendente Gl. (11) bestimmt. Zu ihrer Lösung kann man ein eigenartiges kettenbruchähnliches Verfahren einschlagen. Es beruht darauf, daß $\log u$ langsam veränderlich ist gegen u. Hat man also eine n-te Näherung u_n gefunden, so gewinnt man eine $(n+1)$-te aus

$$u_{n+1}\log u_n = v. \tag{12}$$

Dies führt zu dem folgenden Algorithmus:

$$u = \cfrac{v}{\log\cfrac{v}{\log\cfrac{v}{\log\cfrac{v}{\ddots}}}} \tag{12a}$$

Die Konvergenz läßt sich für reelle positive Werte von v leicht beweisen[1]), besteht aber natürlich auch im komplexen Gebiet zu Recht, auf das es uns hier ankommt. Für den Logarithmus ist dabei stets der Hauptzweig desselben zu wählen (imaginärer Teil zwischen $-\pi$ und $+\pi$, vgl. S. 459), damit das zugehörige Argument x in der positiv-imaginären Halbebene des Hauptzweiges der Hankelschen Funktion H_0^1 liegt. Der Ausgangswert u_1 des Näherungsverfahrens ist innerhalb gewisser Grenzen gleichgültig, da er sukzessive herauskorrigiert wird. Doch empfiehlt es sich, um die Konvergenz zu beschleunigen, ihn der ungefähren Größe von $\log u$ entsprechend zu wählen; $\log u$ wird, wie wir sehen werden, eine negative Zahl, etwa gleich -20. In der Schreibweise (12a) tritt der Ausgangswert u_1 natürlich nicht in Erscheinung.

Es sei bemerkt, daß Gl. (11) noch eine unendliche Reihe anderer Wurzeln zuläßt, die aber für das Problem der Drahtwellen keine Bedeutung haben. Die eine liegt in der Nähe von $u = 1$, die anderen entsprechen nicht dem Hauptzweig, sondern solchen Zweigen des Logarithmus, die sich von jenem um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Auch diese Wurzeln könnten durch unseren Algorithmus berechnet werden, wenn man entweder den Ausgangswert von u in der Nähe von 1 wählt, oder wenn man für den Logarithmus nicht seinen Hauptwert nimmt.

2. Numerisches[2]) Beispiel eines typischen Falles. Berechnung von Fortpflanzung und Dämpfung. Wir betrachten, wie in Fig. 52, einen Kupferdraht vom Radius $a = 1\,\text{mm}$, $\mu = 1$, $\sigma_{\text{magn}} = 5{,}75 \cdot 10^{-4}$ und eine Schwingungszahl $\nu = 10^9\,\text{sec}^{-1}$, entsprechend einer „Wellenlänge in Luft" von $\lambda_0 = 30\,\text{cm}$ und einer „Wellenzahl" $k_0 = 2\pi/30$. Dann wird

$$k = (1+i)\,2\pi \cdot 7{,}6 \cdot 10^2, \qquad v = -(1+i)\,7{,}2 \cdot 10^{-7}.$$

Wir setzen z. B.

$$u_1 = -\frac{v}{20} = (1+i)\,3{,}6 \cdot 10^{-8}$$

und berechnen zunächst

$$\log u_1 = \frac{i\pi}{4} - 16{,}8 = -(16{,}8 - 0{,}78\,i),$$

sodann sukzessive nach (12):

$$u_2 = \frac{v}{\log u_1} = (4{,}1 + 4{,}5\,i)\,10^{-8},$$

$$\log u_2 = -(16{,}7 - 0{,}83\,i),$$

$$u_3 = \frac{v}{\log u_2} = (4{,}2 + 4{,}5\,i)\,10^{-8}.$$

---

[1]) A. Sommerfeld, Göttinger Nachr. 1899.

[2]) In den ursprünglichen Zahlenrechnungen (Ann. d. Phys. **67**, l. c.) war versehentlich $1/\gamma$ statt γ geschrieben. Die damals gezogenen Schlüsse bleiben trotzdem qualitativ bestehen.

Es ist also merklich $u_3 = u_2$ geworden, so daß wir bereits an der Konvergenzgrenze u unseres Verfahrens angelangt sind. Aus u ergibt sich nach (11)

$$\xi^2 = -\frac{4}{\gamma^2}\, u = -(5{,}3 + 5{,}7\, i)\, 10^{-8}.$$

Die Kleinheit dieses Wertes rechtfertigt nachträglich den Gebrauch der Näherungsformeln für $H_0(x)$ und weiterhin den für $J_0(y)$.

Nach (8) folgt nun aus dem Werte von ξ^2 mit $a = 0{,}1$ cm:

$$h^2 = k_0^2 + (5{,}3 + 5{,}7\, i)\, 10^{-6},$$
$$h = k_0[1 + (6{,}0 + 6{,}4\, i) \,.\, 10^{-5}].$$

Tragen wir diesen Wert in die Exponentialfunktion unseres ursprünglichen Ansatzes (1) ein, so wird der imaginäre Teil des Exponenten

$$(13\,a) \qquad -i\,\omega\left(t - \frac{x}{c}\,(1 + 6{,}0 \,.\, 10^{-5})\right)$$

und der reelle Teil

$$(13\,b) \qquad -1{,}3 \,.\, 10^{-5}\, x.$$

Aus (13 a) folgt, daß die Fortpflanzung längs des Drahtes mit der Geschwindigkeit erfolgt:

$$\frac{dx}{dt} = c(1 - 6{,}0 \,.\, 10^{-5}).$$

Aus (13 b) folgt, daß die Amplitude auf $1/e$ ihres ursprünglichen Betrages abgedämpft wird nach Durchlaufung einer Strecke

$$x = \frac{10^5}{1{,}3} = 770\text{ m}.$$

Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit und Dämpfung sind also in diesem typischen Falle praktisch unmerklich.

3. Sehr dünner Draht. Abnormer Fall von Fortpflanzung und Dämpfung. Wir betrachten ein Material, das sich möglichst dünn ausziehen läßt, nämlich Platin. Der Drahtradius sei $a = 2\,\mu = 2 \,.\, 10^{-4}$ cm (Wollastondraht). Die Leitfähigkeit von Platin ist etwa achtmal kleiner als die von Kupfer. Die Schwingungszahl nehmen wir niedriger als im vorigen Beispiel, nämlich $\nu = 3 \,.\, 10^8$, entsprechend einer Wellenlänge in Luft $\lambda_0 = 1$ m. Dann wird

$$k^2 = (1 + i)\, 2\pi \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^2, \qquad ka = \eta = (1 + i)\, 0{,}19.$$

$|\eta|$ ist also nicht mehr groß, wie im vorigen Pharagraphen, sondern klein. Infolgedessen wird die rechte Seite von (8) (wegen $J_0(\eta) = 1$, $J_0'(\eta) = -\eta/2$) gleich $-2\,k_0^2/k^2$, und in Gl. (11) wird (bei ungeändeter Bedeutung von u)

$$v = \gamma^2 \frac{k_0^2}{k^2} = -7{,}0\, i\, 10^{-9}.$$

Nehmen wir als Ausgangswert wieder $u_1 = -v/20$, so haben wir der Reihe nach:

$$u_1 = 3{,}5\, i\, 10^{-10},$$

$$\log u_1 = \frac{i\pi}{2} - 21{,}8 = -(21{,}8 - 1{,}57\, i),$$

$$u_2 = \frac{v}{\log u_1} = (-0{,}23 + 3{,}2\, i)\, 10^{-10},$$

$$\log u_2 = -(21{,}8 - 1{,}61\, i),$$

$$u_3 = \frac{v}{\log u_2} = (-0{,}23 + 3{,}2\, i)\, 10^{-10}.$$

Der Grenzwert u unseres Verfahrens ist also erreicht. Demnach wird wegen (8) und (1)

$$k_0^2 - h^2 = \frac{\xi^2}{a^2} = -\frac{4\,u}{\gamma^2 a^2},$$

$$h^2 = k_0^2 + \frac{4\,u}{\gamma^2 a^2} = 4 \cdot 10^{-3} + (-0{,}73 + 10{,}2\, i)\, 10^{-3}.$$

Die Summanden auf der rechten Seite sind von gleicher Größenordnung, so daß die Wurzel nicht mehr binomisch gezogen werden kann. Man erhält

$$h = (0{,}83 + 0{,}61\, i)\, 10^{-1}.$$

Tragen wir dies in den Ansatz (1) ein, so ergibt sich als imaginärer Teil des Exponenten

(14a) $$-i\omega t + 8{,}3\, i\, x \cdot 10^{-2},$$

also für die Fortpflanzung der Phase längs des Drahtes (wegen $\omega = 2\pi\nu$ und $\nu = 3 \cdot 10^8$, s. oben):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega \cdot 10^2}{8{,}3} = \frac{2\pi}{8{,}3} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 0{,}76\, c.$$

Die Welle läuft also jetzt nur mehr mit 76 Proz. der Lichtgeschwindigkeit. Auch die Dämpfung wird anomal. Der reelle Teil des Exponenten ihx in (1) ist nämlich jetzt

(14b) $$-6{,}1 \cdot 10^{-2}\, x.$$

Die Amplitude wird also nach Durchlaufung der Strecke

$$x = \frac{100}{6{,}1} = 16\,\text{cm}$$

bereits auf $1/e$ ihres Wertes heruntergedrückt. Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit und Dämpfung werden also in diesem abnormen Falle beobachtbar.

Der Grund für die Abnormität unseres jetzigen Falles ist leicht ersichtlich: Während bei dem dicken Kupferdraht des vorigen Beispiels

der Skineffekt sich frei ausbilden kann, und die Verhältnisse daher nicht anders liegen als bei einem unendlich dicken Draht (einer leitenden Ebene), stoßen bei dem dünnen Platindraht die beiderseitigen stromführenden Schichten in der Mitte zusammen und stören sich gegenseitig; die Verhältnisse werden dadurch vom Drahtradius abhängig und liegen ähnlich wie in Fig. 52 bei relativ niedrigen Frequenzen.

In der Tat zeigt eine Untersuchung von Barkla[1]), die allerdings nicht mit einem Einzeldraht, sondern mit einem Lecherschen Drahtsystem ausgeführt wurde, eine Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei abnehmendem Drahtradius an.

4. Der Energiefluß im Unendlichen. Daß wir es bei unserer Lösung mit einem Vorgang zu tun haben, der seine Energiequelle am einen Ende des Drahtes, $x = +\infty$, und seine Energiesenke am anderen Ende, $x = -\infty$, hat, zeigen wir durch Berechnung des radialen Energieflusses für $r = \infty$. Wir haben

$$\mathfrak{S}_r = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_r = -c\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_\varphi,$$

also für den gesamten Energiefluß durch die Längeneinheit des Zylinders vom Radius r:

$$S = -2\pi r c\,\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_\varphi. \tag{15}$$

Nun sind nach (3) und (5) $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ dargestellt durch die Funktion $H_0(\sqrt{k_0^2 - h^2}\,r)$, und diese nimmt bei komplexen $\sqrt{k_0^2 - h^2}$ mit positiv imaginärem Bestandteil für $r = \infty$ exponentiell ab. Infolgedessen geht $S \to 0$ für $r \to \infty$, wie es sein muß.

Jetzt können wir auch eine Lücke ausfüllen, die wir S. 528 gelassen haben, nämlich nachweisen, daß $\sqrt{k_0^2 - h^2}$ nicht reell sein kann. Im anderen Falle könnten wir statt H_0 irgend zwei Partikularlösungen der Besselschen Differentialgleichung, z. B. H_0 und J_0, benutzen und hätten statt (3) zu schreiben:

$$E_x = AH_0(\sqrt{k_0^2 - h^2}\,r) + BJ_0(\sqrt{k_0^2 - h^2}\,r),$$

und entsprechend nach (5)

$$H = \frac{ck_0}{\sqrt{k_0^2 - h^2}}\{AH_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\,r) + BJ_0'(\sqrt{k_0^2 - h^2}\,r)\}.$$

Der bloßen Forderung, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Unendlichen verschwinden, würde auch dann genügt sein. Aber es wäre nur ein Verschwinden wie $r^{-1/2}$ (vgl. S. 459); der totale Energiefluß (15) würde dabei endlich bleiben. Ein solcher Vorgang könnte nur durch eine künstliche Anordnung von Energiequellen im Unendlichen aufrechterhalten werden und würde nicht dem Vorgang der Drahtwellen entsprechen.

---

[1]) Phil. Mag. **1** (Ser. 6), 652, 1901.

Übrigens würde bei reellem $\sqrt{k_0^2 - h^2}$ wegen $h < k_0$ die am Draht gemessene Wellenlänge größer sein als die Wellenlänge in Luft, und daher die Fortpflanzung längs des Drahtes mit Überlichtgeschwindigkeit stattfinden.

5. Struktur des Feldes. Das Feld im Innern des Drahtes ist uns aus § 2 des vorigen Kapitels bekannt: im Normalfall voller Skineffekt, unter abnormen Umständen teilweise Durchströmung des Querschnitts. Andererseits werden die Verhältnisse im Äußern des Drahtes für den Normalfall der Hauptsache nach dargestellt durch § 1 des vorigen Kapitels, da sie denen bei ebener Begrenzung des Leiters gleichen: die elektrischen

Fig. 57a.

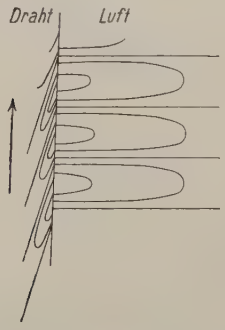
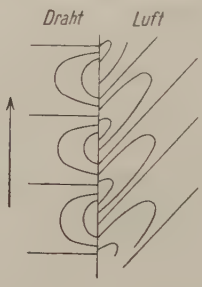


Fig. 57b.



Kraftlinien nahezu senkrecht zum Draht, im Zeitmittel etwas nach vorn geneigt, der zeitliche Ablauf gegeben durch eine schmale Drehfeldellipse (Fig. 50a).

Dasselbe folgt aus unserer jetzigen Darstellung (3) und (5), die mit Rücksicht auf die Näherungsformel (10a) für die Nähe des Drahtes übergeht in

$$\frac{i\pi}{2} E_x = A \log \frac{1}{hr} + B, \qquad B = A \log \frac{2ih}{\gamma \sqrt{k^2 h^2}},$$
$$\frac{i\pi}{2} E_r = \frac{-ih^2}{k_0^2 - h^2} \frac{A}{hr}.$$

Hier ist $|E_r| \gg |E_x|$, d. h. die Kraftlinien stehen nahezu senkrecht auf dem Draht, weil $1/hr \gg \log 1/hr$ und $|h^2| \gg |k_0^2 - h^2|$. Die eigentliche und endgültige Abnahme mit r ist in dieser Näherung noch nicht zu spüren; sie setzt erst ein in Entfernungen, für welche die asymptotischen Formeln gelten und $|\sqrt{k_0^2 - h^2}| r \gg 1$ wird. Ein Momentbild des Verlaufs der elektrischen Kraftlinien gibt Fig. 57a. Auf die Bedeutung von Fig. 57b gehen wir demnächst ein.

Wegen Gleichheit des Innenfeldes mit dem aus § 2, Kap. 14, erhält man für Widerstand und Selbstinduktion denselben Ausdruck $R - i\omega L$

wie S. 517. Aber es wird jetzt auch möglich, äußere Selbstinduktion und Kapazität des Drahtes zu bestimmen (z. B. aus der magnetischen und elektrischen Energie des Außenraumes), da jetzt das äußere Feld für hinreichend große Entfernungen $\to 0$ konvergiert. Bei einem stationären Strom ist es bekanntlich unmöglich, die äußere Selbstinduktion zu definieren, es sei denn, daß eine Rückleitung des Stromes vorhanden ist; die Selbstinduktion würde sonst, ebenso wie der magnetische Energieinhalt des Außenraumes, unendlich groß werden. In unserem Falle hochfrequenter Drahtwellen übernehmen die Verschiebungsströme die Rückleitung.

§ 2. Erweiterungen.

1. Nebenwellen von elektrischem oder magnetischem Typus. Unsymmetrische Wellen[1]**).** Unsere transzendente Gl. (8) besitzt außer der im vorstehenden diskutierten Wurzel noch eine Serie anderer Wurzeln. Wir erhalten sie, wenn wir voraussetzen, daß h nicht von der Größenordnung von k_0 sei, in welchem Falle ξ klein war, sondern daß vielmehr ξ groß sei. Dann wird die linke Seite von (8) gleich $i\xi$, also ebenfalls groß. Infolgedessen werden die fraglichen Wurzeln in erster Näherung bestimmt durch die Gleichung $J_0'(\eta) = 0$; sie liegen also auf der reellen Achse der η-Ebene. Dementsprechend wird der imaginäre Teil von h^2 jetzt gleich dem imaginären Teil von k^2, also bei metallischen Leitern außerordentlich groß. Infolgedessen sind die zugehörigen Wellen — wir wollen sie Nebenwellen nennen, im Gegensatz zu der früheren Hauptwelle — ungeheuer stark gedämpft. Für die Beobachtung kommen sie deshalb nicht in Betracht.

Die Symmetrie um die Drahtachse, d. h. die Unabhängigkeit des Feldes vom Azimut φ, haben diese Nebenwellen mit der Hauptwelle gemein. Aber die Feldverteilung ist total von jener verschieden, vergleiche Fig. 57b im Gegensatz zu Fig. 57a. Das Feld nimmt im Äußern des Drahtes so schnell ab, daß man von einem Skineffekt nach außen hin sprechen könnte. Im Innern des Drahtes ist das Feld wesentlich konstant. Die Rollen des Innern und Äußern sind also bei Haupt- und Nebenwellen in gewissem Sinne ausgetauscht. Die elektrischen Kraftlinien stehen im Innern auf der Drahtoberfläche nahezu senkrecht, im Äußern bilden sie einen Winkel von 45° mit der Drahtachse. Damit erklärt sich auch die ungeheure Dämpfung der Nebenwellen. Sie wird bewirkt durch die im Draht entwickelte Joulesche Wärme, die hier besonders groß wird, da der Draht völlig mit Strom ausgefüllt ist. Dagegen schützt sich die Hauptwelle gegen Dämpfung

[1]) D. Hondros, Münchener Dissertation 1909; Ann. d. Phys. **30**, 905, 1909.

durch ihren Skineffekt, indem sie das Drahtinnere meidet. Wir kommen auf diesen Gesichtspunkt in der nächsten Nummer zurück.

Außer den symmetrischen elektrischen gibt es symmetrische magnetische Wellen. Wir erhalten sie, wenn wir statt von dem Ansatz A (vgl. den Anfang von § 1 oder S. 500) von dem Ansatz B ausgehen, bei dem die Rollen der elektrischen und magnetischen Feldstärken gegeneinander ausgetauscht sind. Bei den symmetrischen magnetischen Wellen läuft die elektrische Kraft in Kreisen um den Draht, die magnetische Kraft liegt in den Meridianebenen durch die Drahtachse; im Draht haben wir sozusagen einen magnetischen Strom. Da aber die magnetische Permeabilität niemals (auch nicht bei Eisen) an die elektrische Leitfähigkeit der Metalle heranreicht, so gibt es hier kein Analogon zu dem vollkommenen Leiter und daher keine „magnetische Hauptwelle". Die möglichen magnetischen Wellentypen werden durch eine zu (8) analoge Gleichung bestimmt (man hat rechts $\mu k_0^2/k^2$ zu ersetzen durch $1/\mu$); ihre Wurzeln sind wieder näherungsweise durch $J_0'(\eta) = 0$ gegeben. Die hierdurch charakterisierten symmetrischen „magnetischen Nebenwellen" sind, wie die elektrischen, ungeheuer stark gedämpft und entziehen sich daher der Beobachtung.

Wir können nun aber auch Wellen betrachten, welche keine Symmetrie um die Drahtachse besitzen. Statt J_0, H_0 haben wir dann im Sinne von XIII, § 4 die Partikularlösungen

$$J_n \overset{\cos}{\underset{\sin}{}} n\varphi \quad \text{und} \quad H_n^1 \overset{\cos}{\underset{\sin}{}} n\varphi$$

zu benutzen, die einer $2n$-fachen Unterteilung des Drahtumfanges in Gebiete entgegengesetzter Phase entsprechen. Es zeigt sich, daß in diesem unsymmetrischen Falle die elektrischen und magnetischen Wellen gegenseitig gekoppelt sind und nicht einzeln existieren können. Eine Hauptwelle ist auch hier nicht vorhanden, d. h. alle unsymmetrischen Wellen sind außerordentlich stark gedämpft und vom Typus der Nebenwellen.

Dieser Umstand kann herangezogen werden, um zu erklären, weshalb auch bei unsymmetrischer Anregung (z. B. im Lecherschen System) nur der symmetrische Wellentypus zur Beobachtung kommt: von dem gemeinsam angeregten Komplex der symmetrischen und unsymmetrischen elektrischen und magnetischen Haupt- und Nebenwellen werden alle bis auf die symmetrische elektrische Hauptwelle durch Dämpfung im Keime erstickt.

2. Drahtwellen am Nichtleiter[1]**).** Die Joulesche Wärme, welche unsere Nebenwellen in metallischen Drähten herunterdämpft, fällt fort in

[1]) D. Hondros und P. Debye, Ann. d. Phys. **32**, 465, 1910.

Nichtleitern. Es entsteht daher die Frage, ob Nebenwellen an einem „dielektrischen Draht", z. B. aus Wasser, beobachtet werden können. Die Beantwortung hat an die Gl. (8) des vorigen Paragraphen anzuknüpfen. Da die dem Draht zugehörige Wellenzahl k jetzt reell und proportional der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante ε oder, was dasselbe ist, proportional dem Brechungsindex n des Dielektrikums ist,

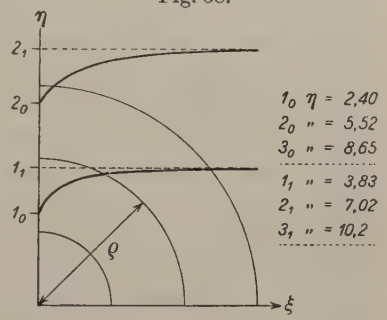
$$k = \sqrt{\varepsilon}\, k_0 = n\, k_0,$$

so schreibt sich Gl. (8) mit $\mu = 1$:

$$(16) \qquad \frac{\xi H_0(\xi)}{H_0'(\xi)} = \frac{\eta}{n^2} \frac{J_0(\eta)}{J_0'(\eta)} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{k_0^2 - h^2}\, a, \\ \eta = \sqrt{n^2 k_0^2 - h^2}\, a. \end{array} \right.$$

Hier bedeutet wie früher: a den Radius des Drahtes, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ die „Wellenzahl in Luft", also λ_0 die Wellenlänge bei der freien Ausbreitung der betreffenden Schwingungsfrequenz in Luft. Da die Dämpfung fortfällt, wird h reell, und wir können setzen $h = 2\pi/\lambda$, wo λ die Wellenlänge der längs des Drahtes fortgepflanzten und längs des Drahtes gemessenen Oberflächenwelle bedeutet. Da h reell, ist ξ entweder reell oder rein imaginär. Die erste Möglichkeit ist auszuschließen, da dann das Feld im Unendlichen nur wie $1/\sqrt{r}$ abnehmen und einen endlichen Energiefluß bedingen würde (vgl. § 1, Nr. 3). Wir schreiben daher weiterhin statt ξ lieber $i\xi$, wobei ξ nunmehr reell und $0 < \xi < \infty$ ist und können die ganze weitere Betrachtung in der Ebene der beiden reellen Variablen ξ und η durchführen.

Fig. 58.



Für $\xi = 0$ bzw. ∞ wird die linke Seite von (16) nach den Formeln (6) und (8) von S. 456 und 458 gleich 0 wie $\xi^2 \log \frac{\gamma \xi}{2}$ bzw. gleich ∞ wie ξ und ist auch für alle Zwischenwerte von ξ reell. Deshalb muß auch die rechte Seite von (16) für $\xi = 0$ verschwinden, für $\xi = \infty$ unendlich groß werden. Das bedeutet, daß dem Werte $\xi = 0$ die Wurzeln von $J_0(\eta) = 0$, dem Werte $\xi = \infty$ die Wurzeln von $J_0'(\eta) = -J_1(\eta) = 0$ entsprechen. Die Wurzeln beider Gleichungen sind reell und in unendlicher Anzahl vorhanden; wir markieren sie in Fig. 58 auf der Ordinatenachse und nennen sie der Reihe nach 1_0, 2_0, 3_0, ... entsprechend $J_0(\eta) = 0$ bzw. 1_1, 2_1, 3_1, ... entsprechend $J_1(\eta) = 0$. Durch die letzteren Punkte ziehen wir Parallelen zur Abszissen-

achse, welche Asymptoten der durch (16) gegebenen Kurven $\eta(\xi)$ darstellen. Der Verlauf dieser Kurven ist aus den Tafeln der Besselschen Funktionen zu entnehmen und hängt übrigens noch von dem Brechungsindex n ab. In unserer Figur ist $n = 9$ (Wasser, entsprechend $\varepsilon = 81$) gewählt.

Nun besteht aber außerdem zwischen η und ξ die Beziehung

$$\eta^2 + \xi^2 = (n^2 - 1) k_0^2 a^2, \tag{17}$$

die aus den Ausdrücken von ξ (oder vielmehr $i\xi$) und η in (16) durch Elimination von h folgt. Wir schlagen also um den Nullpunkt der Fig. 58 Kreise vom Radius

$$\varrho = \sqrt{n^2 - 1}\, k_0 a \tag{18}$$

und bringen sie zum Schnitt mit unserem Kurvensystem. Die Schnittpunkte liefern zusammengehörige Werte von ξ und η, welche allen Bedingungen unseres Problems genügen.

Die Konstruktion zeigt unmittelbar: Für $\varrho < 2{,}40$ (erste Wurzel von $J_0 = 0$) gibt es keinen Schnittpunkt, für $2{,}40 < \varrho < 5{,}52$ (zweite Wurzel von $J_0 = 0$) gibt es einen Schnittpunkt, für $5{,}52 < \varrho < 8{,}65$ zwei Schnittpunkte usf. Dem Radius ϱ entspricht nach (18) die Wellenlänge in Luft

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\sqrt{n^2 - 1}}{\varrho}\, a. \tag{19}$$

Es gibt also eine Grenze für die Wellenlänge λ_0, oberhalb deren Drahtwellen am Dielektrikum unmöglich sind. Für Wasser, $n = 9$ und $a = 1$ cm beträgt diese Grenzwellenlänge:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\sqrt{80}}{2{,}40}\, a = 23{,}4.$$

Da in diesem Grenzfalle $\xi = 0$, also nach (16) $h = k_0$ ist, wird auch die für die Fortpflanzung am Draht maßgebende Wellenlänge λ gleich der Grenzwellenlänge λ_0. Allgemein ist nach (16)

$$h^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_0^2 + \frac{\xi^2}{a^2},$$

λ nimmt also ab mit zunehmendem ϱ (zunehmendem k_0 und ξ), und zwar stärker als λ_0.

Wenn ϱ den Wert 5,52 erreicht, also

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\sqrt{80}}{5{,}52}\, a = 10{,}3$$

wird, so tritt eine zweite mögliche Wellenform auf, für die zunächst wieder $\lambda = \lambda_0$ ist, während die erste Wellenform mit $\lambda < \lambda_0$ fortbesteht usw. Indessen können wir uns mit Rücksicht auf die Beob-

achtungsmöglichkeiten auf die erste Wellenform, die „Grundwelle", beschränken; die „Oberwellen" dürften schwer zu beobachten sein.

Verfolgen wir den ganzen Ast der Grundwelle von $\varrho = 2{,}40$, $\lambda = \lambda_0$ bis zu $\varrho = \infty$, wo er sich asymptotisch an die Gerade $\eta = 3{,}83$ anlegt. An der ersteren Grenze wird mit $\lambda = \lambda_0$ ersichtlich die Fortpflanzung V längs des Drahtes gleich der Fortpflanzung im äußeren Medium (Luft), d. h. $V = c$. Welchen Wert hat V an der anderen Grenze? Aus der Definition von η in Gl. (16) folgt, da η endlich und k_0 mit wachsendem ϱ nach (18) unendlich wird:

$$\left(n^2 - \frac{h^2}{k_0^2}\right) a^2 = \frac{\eta^2}{k_0^2} = 0,$$

also

$$\frac{k_0}{h} = \frac{1}{n}. \tag{20}$$

Allgemein gilt aber $V = \frac{\omega}{h} = c\frac{k_0}{h}$. Daraus folgt wegen (20): Für den anderen Grenzfall der Grundwelle wird die Fortpflanzung längs des Drahtes gleich der Fortpflanzung im Innern unseres dielektrischen Drahtes, d. h. $V = c/n$. Dasselbe gilt für die anderen Äste, die den „Oberwellen" entsprechen. Immer liegt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs des Drahtes zwischen der für das äußere und der für das innere Medium charakteristischen Geschwindigkeit, nämlich zwischen $V = c$ und $V = c/n$.

Auch die Struktur des Feldes läßt sich zwischen unsere zwei Grenzfälle einordnen. Im ersten Grenzfall $h = k_0$ wird das Argument $\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r$ der Hankelschen Funktion, welche das Feld im Äußern des Drahtes darstellt, gleich Null: das Feld nimmt nach außen hin unendlich langsam ab, die Kraftlinien stehen senkrecht auf dem Draht. Im anderen Grenzfall wird dasselbe Argument sehr groß, nämlich gleich $i\xi\frac{r}{a} = i\infty$: Das Feld nimmt nach außen hin unendlich schnell ab, wir haben einen vollkommen ausgeprägten Skineffekt im Drahtäußern — nicht im Drahtinnern, welches vielmehr völlig von Stromlinien ausgefüllt ist. Zwischen diese beiden Grenzfälle ordnen sich die mittleren Fälle ein. Zur Darstellung der Kraftlinien in den beiden Grenzfällen können die früheren Fig. 57a und b dienen.

Die wesentlichen Züge der hier geschilderten Theorie lassen sich, wenn auch mit erheblichen technischen Schwierigkeiten, experimentell[1]) bestätigen.

---

[1]) O. Schriever, Ann. d. Phys. **63**, 645, 1920.

3. Probleme mit metallischer Rückleitung des Stromes. Praktisch wichtiger als der Fall des Einzeldrahtes ist das Lechersche System zweier Paralleldrähte, von denen der zweite die Rückleitung des im ersten fließenden Wechselstromes übernimmt. Für physikalische Meßzwecke bietet diese Anordnung den Vorteil, daß sie von der weiteren Umgebung viel unabhängiger ist als der Einzeldraht, da der Hauptteil des Feldes auf die Umgebung der beiden Leiter konzentriert ist (vgl. die Einleitung zu diesem Kapitel).

Indessen ist dieses Problem theoretisch schon recht kompliziert, da es der Zylindersymmetrie ermangelt. Der gegebene Ansatz besteht mathematisch in der Einführung eines solchen Systems von Bipolarkoordinaten, daß die beiden Drahtumfänge zu den Koordinatenkreisen des Systems gehören. Leider aber läßt sich die Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in Bipolarkoordinaten nicht separieren [1]), derart, daß ihre Integrale aus Produkten von Partikularlösungen je einer Koordinate aufgebaut werden könnten. G. Mie [2]), der das Problem der Paralleldrähte bis zur numerischen Diskussion vollständig durchgerechnet hat, ist deshalb gezwungen, nachträglich wieder auf gewöhnliche Polarkoordinaten überzugehen, also auf Reihen, die nach Besselschen und trigonometrischen Funktionen fortschreiten. Die dabei auftretenden Rechnungen übersteigen den hier verfügbaren Raum.

Der technisch interessante Fall, wo einer der beiden Drähte unendlich dünn, der andere unendlich dick ist (Luftleitung gegenüber Erde), ist von F. Pollaczek [3]) durch Anwendung der Methoden des folgenden Kapitels vollständig durchgerechnet worden.

Einfacher, weil mit Rotationssymmetrie behaftet, ist der Fall des Kabels: ein innerer Draht, umgeben von einem zylindrischen Isolator, der seinerseits von einem äußeren Leiter (z. B. Seewasser) umgeben ist. Dieser Fall ist von J. J. Thomson [4]) untersucht worden. In dem inneren Draht kommen Besselsche Funktionen J, in dem äußeren Leiter Hankelsche Funktionen H^1 zur Verwendung, während die Lösung in dem Isolator sich aus beiden Partikularlösungen der Besselschen Differentialgleichung zusammensetzt. Die vier an den Trennungsflächen geltenden Grenzbedingungen ergeben nach Elimination der drei Quotienten der multiplikativen Amplitudenkonstanten eine transzendente

---

[1]) Die Fälle, in denen dies möglich ist (rechtwinklige, Polarkoordinaten, elliptische Koordinaten und ihre Ausartungen), werden von F. Pockels, Die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (Leipzig 1891), S. 136, diskutiert. Vgl. auch XIII, § 4.

[2]) Ann. d. Phys. **2**, 201, 1900.

[3]) Elektrische Nachrichten-Technik 1926.

[4]) Vgl. Proc. Roy. Soc. of London **46**, 1, 1889, sowie sein Buch Recent Researches in electricity and magnetism. Oxford 1893.

Gleichung, aus der sich Fortpflanzung und Dämpfung bestimmen. Der Fall, wo der äußere Leiter durch Luft ersetzt ist (also Draht mit dielektrischem Mantel in Luft), ist von F. Harms[1]) behandelt worden.

Reichhaltige Literatur über Drahtwellen und Verwandtes enthält der Enzyklopädieartikel von M. Abraham, Bd. V, 18.

Sechzehntes Kapitel.

Drahtlose Telegraphie.

Die Probleme der drahtlosen Telegraphie liegen zum Teil in der Konstruktion von Sender und Empfänger, zum anderen Teil in der Ausbreitung der Wellen zwischen Sender und Empfänger. Nur die Probleme der letzteren Art werden uns hier beschäftigen, weil nur sie durch die partiellen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes beherrscht werden.

Die Erde werden wir teils als eben begrenzt, § 1 und 2, teils als kugelförmig, § 4, aber durchweg als homogen ansehen, d. h. wir werden mit räumlich konstanten Werten der Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit rechnen. Die interessanten aber schwierigen Verhältnisse, welche z. B. beim Übergang der Wellen von Land zu Wasser vorliegen, werden wir also nicht diskutieren. Auch die Atmosphäre werden wir notgedrungen als homogen behandeln, während gerade die neuesten Erfahrungen mit sehr kurzen Wellenlängen darauf hinweisen, daß den Schichtungen in der Atmosphäre große Wichtigkeit zukommt. Nur in § 4 werden diese Dinge gestreift werden können.

Die Form der Sendeantenne müssen wir weitgehend idealisieren. Wir dürfen dies tun, weil es für die Ausstrahlung auf große Entfernungen, d. h. auf Entfernungen, die viele Wellenlängen betragen, nur auf den in der Antenne fließenden Strom — nach Größe und Richtung —, nicht auf seine Verteilung ankommt. Wir beschäftigen uns in § 1 mit der einfachen Vertikalantenne, die wir als einen senkrecht zum Erdboden schwingenden Dipol behandeln, in § 2 mit der Horizontalantenne sowie mit der Rahmenantenne, die wir auch als „magnetischen Dipol“ bezeichnen können. Die Schwingungsform nehmen wir als rein monochromatisch, ihre Zeitabhängigkeit also gegeben durch $e^{-i\omega t}$ an. Dies entspricht in der Tat der modernen Form der Röhren- oder Maschinensender, während die ältere Form der Funkensender stark gedämpfte, also keineswegs harmonisch verlaufende Wellenzüge lieferte.

---

[1]) Ann. d. Phys. **23**, 44, 1907.

§ 1. Die Vertikalantenne auf der ebenen Erde. Die Erdoberfläche sei die Ebene $z = 0$; nach der Atmosphäre rechnen wir $z > 0$, nach dem Erdboden hin $z < 0$. Der Ort 0 des Senders sei der Ursprung eines Polarkoordinatensystems r, φ, z. Der Abstand des Aufpunktes P von 0 ist dann

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Im Sinne von XII, § 4, 4 stellen wir das Feld dar durch einen Hertzschen Vektor Π, welcher bei vertikaler Antenne überall die Richtung der z-Achse hat und von φ unabhängig ist:

$$\Pi = \Pi_z(r, z).$$

Derselbe genügt der Differentialgleichung (19′) a. a. O.

$$(1) \qquad \Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \begin{cases} k = k_0 = \dfrac{\omega}{c} & \text{für } z > 0 \\ k^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i\sigma\omega}{c^2} & \text{für } z < 0. \end{cases}$$

Wir setzen also für den Luftraum $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, für den Erdboden $\mu = 1$. Gesucht wird eine Lösung von (1), welche im Punkte 0 in bestimmter Weise unendlich wird (vgl. unter Nr. 1) und in unendlichem Abstand von 0 samt ihren ersten Ableitungen verschwindet. Aus der Gl. (18′) von S. 430 folgt bei Benutzung von Polarkoordinaten [vgl. hierzu Bd. 1, S. 76, Gl. (43)]:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_z = 0, \ \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\varphi = -i\dfrac{\varepsilon\omega + i\sigma}{c}\dfrac{\partial\Pi}{\partial r} = \begin{cases} -ik_0\dfrac{\partial\Pi}{\partial r} \cdots z > 0, \\ -i\dfrac{k^2}{k_0}\dfrac{\partial\Pi}{\partial r} \cdots z < 0. \end{cases} \\ \mathfrak{E}_r = \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial r\,\partial z}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = 0, \quad \mathfrak{E}_z = k^2\Pi + \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\Pi}{\partial r}\right). \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen fordern, daß $\mathfrak{H}_\varphi$ und $\mathfrak{E}_r$ beiderseits der Trennungsfläche gleich sein müssen. Dies liefert nach (2) zunächst:

$$k_0^2\frac{\partial\Pi_0}{\partial r} = k^2\frac{\partial\Pi}{\partial r},$$
$$\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial r\,\partial z} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial r\,\partial z}.$$

Hier haben wir den Wert von Π in Luft durch den Index 0 ausgezeichnet. Die vorstehenden Gleichungen gelten für jeden Wert von r und können daher nach r integriert werden; die Integrationskonstante

muß Null gesetzt werden, weil Π und $\partial \Pi / \partial r$ für $r = \infty$ verschwinden. Infolgedessen gehen die Grenzbedingungen über in

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} k_0^2 \Pi_0 = k^2 \Pi, \\ \dfrac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{cases}$$

1. Primäre und sekundäre Erregung. Die Art des Unendlichwerdens in 0 legen wir dadurch fest, daß wir verlangen: Das Feld soll sich in 0 verhalten wie ein einfacher Dipol mit vertikaler Achse. Dies bedeutet nach Gl. (20) von S. 430, daß wir (bei spezieller Wahl der Amplitude, Unterdrückung des Faktors 4π) für die Umgebung von 0 setzen:

$$\text{(4)} \qquad \Pi = \frac{1}{R} e^{ikR} + \cdots, \quad R^2 = r^2 + z^2,$$

oder auch, indem wir (4) für $z \gtrless 0$ spezifizieren:

$$\text{(4a)} \qquad \Pi = \begin{cases} \dfrac{1}{R} e^{ik_0 R} + \cdots z > 0, \\ \dfrac{1}{R} e^{ikR} + \cdots z < 0. \end{cases}$$

Wir verlangen also, daß Π bei der Annäherung an 0 sowohl im Luftraum als auch in Erde wie $1/R$ unendlich wird.

Wir nennen (4) die primäre, durch die Energiequelle in 0 erzwungene Erregung. Als sekundäre Erregung bezeichnen wir denjenigen Teil des Feldes, welcher aus den Bedingungen der Ausbreitung hervorgeht und der Verschiedenheit der Materialkonstanten zwischen Luft und Erde Rechnung trägt. Die sekundäre Erregung setzen wir an als Summe (Integral) von Partikularlösungen[1]) der Differentialgleichung (1) in der folgenden Form:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} f_0(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \ldots z > 0, \\ f(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} \ldots z < 0. \end{cases}$$

J ist die Besselsche Funktion vom Index 0, λ ein willkürlicher Parameter, f_0 und f willkürliche, alsbald zu bestimmende Funktionen. Wir verabreden, daß das Vorzeichen der Quadratwurzel im Exponenten von e stets so gewählt werden soll, daß der reelle Teil derselben positiv wird. Dann verschwindet die Exponentialfunktion in der oberen Zeile

[1]) Daß der Ansatz (5) der Differentialgleichung (1) genügt, läßt sich ohne weiteres verifizieren. Vgl. auch die in XIII, § 4, **1**, Gl. (3) angegebenen allgemeineren Partikularlösungen. Die in (5) gewählte Schreibweise hat den besonderen Vorteil, daß die (für Luft und Erde verschiedene!) Konstante k nur im Exponenten von e vorkommt und daher für $z = 0$ fortfällt. Dieser Umstand wird die Erfüllung der Grenzbedingungen erleichtern.

für $z = +\infty$, in der unteren für $z = -\infty$, wie wir es für das Verschwinden des Feldes im Unendlichen fordern müssen.

Wir setzen jetzt unsere primäre Erregung (4a) mit der sekundären Erregung (5) zusammen, indem wir letztere über alle Werte von λ zwischen 0 und ∞ integrieren; so erhalten wir:

$$(6)\quad \begin{cases} \Pi_0 = \dfrac{e^{ik_0 R}}{R} + \displaystyle\int_0^\infty f_0(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z}\, d\lambda \ldots z > 0, \\ \Pi = \dfrac{e^{ikR}}{R} + \displaystyle\int_0^\infty f(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z}\, d\lambda \ldots z < 0. \end{cases}$$

Durch diesen Ansatz haben wir nicht nur der Differentialgleichung (1), sondern auch dem geforderten Verhalten der Lösung im Punkt 0 und in unendlichem Abstande von 0 genügt. Es bleibt nur noch übrig, die Oberflächenbedingungen (3) zu erfüllen, wozu uns die beiden bisher willkürlichen Funktionen f_0 und f dienen werden.

2. Umformung der primären Erregung. Wir zeigen zunächst, daß wir auch unsere primäre Erregung als Summe von Partikularlösungen der Form (5) darstellen können. Hierzu schicken wir einen Satz über die Integraldarstellung einer willkürlichen Funktion $F(r)$ durch Besselsche Funktionen voraus. Der Satz lautet:

$$(7)\qquad F(r) = \int_0^\infty \lambda\, d\lambda \int_0^\infty \varrho\, d\varrho\, F(\varrho) J(\lambda\varrho) J(\lambda r).$$

Für unsere Zwecke genügt es, unter J die Besselsche Funktion vom Index 0 zu verstehen; der Satz gilt aber auch noch, wenn J die Besselsche Funktion von beliebigem ganzzahligem Index n bedeutet.

Der Beweis folgt aus dem Fourierschen Integral für eine willkürliche Funktion von zwei rechtwinkligen Koordinaten:

$$(8)\qquad f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, f(\xi, \eta)\, e^{i\alpha(x-\xi) + i\beta(y-\eta)}.$$

Vgl. hierzu XII, § 1, Gl. (26) oder 1. Bd., XIX, § 4, Gl. (26). In (8) führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir setzen:

$$x = r\cos\varphi, \quad \xi = \varrho\cos\psi, \quad \alpha = \lambda\cos\mu,$$
$$y = r\sin\varphi, \quad \eta = \varrho\sin\psi, \quad \beta = \lambda\sin\mu,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta = \int_0^\infty \lambda\, d\lambda \int_0^{2\pi} d\mu, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta = \int_0^\infty \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi,$$
$$\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) = \lambda r\cos(\mu-\varphi) - \lambda\varrho\cos(\mu-\psi),$$

und nehmen an, daß $f(x, y)$ nur von r abhänge:

$$f(x, y) = F(r), \quad f(\xi, \eta) = F(\varrho).$$

Dann wird

$$(8a)\quad F(r) = \int_0^\infty \lambda\, d\lambda \int_0^\infty \varrho\, d\varrho\, F(\varrho) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\mu\, e^{i\lambda r \cos(\mu-\varphi)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-i\lambda\varrho\cos(\mu-\psi)}.$$

Die beiden Integrale nach μ und ψ hängen lediglich von λr bzw. $\lambda\varrho$ ab (sind von φ bzw. μ unabhängig) und erweisen sich bei Einführung geeigneter Integrationsvariablen (z. B. $\mu - \varphi = \beta$, $\psi - \mu + \pi = \beta'$) als identisch mit der Integraldarstellung (5) von S. 456 für die Besselschen Funktionen vom Index Null:

$$J(\lambda r) \text{ bzw. } J(\lambda\varrho).$$

(8a) ist also identisch mit der zu beweisenden Gl. (7).

Um dieselbe Gleichung bei beliebigem Index n zu beweisen, hat man zu setzen:

$$f(x, y) = F(r)\, e^{in\varphi}, \quad f(\xi, \eta) = F(\varrho)\, e^{in\psi},$$

und sich zu überzeugen, daß $e^{in\varphi}$ bei Benutzung der gleichen Substitutionen ($\mu - \varphi = \beta$, $\psi - \mu + \pi = \beta'$) sich beiderseits heraushebt. Natürlich muß $F(r)$ in solchem Grade für $r \to \infty$ verschwinden, daß das Fouriersche Integral (8) konvergiert.

Wir wenden Gl. (7) an auf unsere primäre Erregung, und zwar für $z = 0$, wo $R = r$ wird. Wir setzen also

$$F(r) = \left(\frac{1}{R} e^{ikR}\right)_{z=0} = \frac{1}{r} e^{ikr}$$

und erhalten aus (7):

$$(9)\qquad \left(\frac{1}{R} e^{ikR}\right)_{z=0} = \int_0^\infty \lambda\, d\lambda\, J(\lambda r) \int_0^\infty d\varrho\, e^{ik\varrho} J(\lambda\varrho).$$

Das zweite Integral rechts läßt sich ausführen, wenn man $J(\lambda\varrho)$ durch seine Integraldarstellung (5) von S. 456 ersetzt. Es ist nämlich

$$(9a)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty d\varrho\, e^{ik\varrho} J(\lambda\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta \int_0^\infty d\varrho\, e^{i(k+\lambda\cos\beta)\varrho} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{k + \lambda\cos\beta}, \end{cases}$$

sofern man für das Verschwinden des Integrals an der Grenze ∞ bei komplexem k durch das Vorzeichen von k (bei reellem k durch

komplexe Wahl von λ) sorgt. Schließlich führe man in dem letzten Integral als neue Variable ein:

$$x = e^{i\beta}, \quad d\beta = -i\frac{dx}{x}.$$

Der Integrationsweg geht dann über in den Einheitskreis der komplexen x-Ebene und das Integral wird gleich:

$$\frac{1}{\pi}\oint \frac{dx}{2kx + \lambda(1+x^2)} = \frac{1}{\pi\lambda}\oint \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}, \tag{9b}$$

x_1 und x_2 sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \frac{2k}{\lambda}x + 1 = 0. \tag{9c}$$

Da ihr Produkt gleich **1** ist, liegt die eine Wurzel, sagen wir x_1, innerhalb des Einheitskreises, die andere außerhalb. Nach dem Cauchyschen Satz [1. Bd., III, § 3, (8)] ergibt sich dann als Wert von (9b):

$$\frac{2\pi i}{\pi\lambda}\frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \tag{9d}$$

da ja nach (9c) gilt

$$x_1 - x_2 = \frac{2}{\lambda}\sqrt{k^2 - \lambda^2}.$$

(9d) ist identisch mit dem Integral (9a). In (9) eingetragen ergibt sich:

$$\left(\frac{1}{R}e^{ikR}\right)_{z=0} = \int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J(\lambda r). \tag{10}$$

Von hieraus erhält man aber zugleich die Darstellung unserer primären Erregung für beliebige z. Man hat nur, ähnlich wie in (5), $J(\lambda r)$ zu ergänzen zu einer Lösung der Wellengleichung, was durch Hinzufügung des Faktors

$$e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}z} \ldots z > 0 \quad \text{bzw.} \quad e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}z} \ldots z < 0$$

geschieht. Indem wir noch $k = k_0$ für $z > 0$ schreiben, erhalten wir aus (10):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R}e^{ik_0R} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}z} \ldots z > 0, \\ \dfrac{1}{R}e^{ikR} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}z} \ldots z < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Unsere Darstellung (6) läßt sich daraufhin folgendermaßen zusammenziehen:

$$(12)\quad \begin{cases} \Pi_0 = \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} + f_0(\lambda) \right\} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} d\lambda \ldots z > 0, \\ \Pi = \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + f(\lambda) \right\} J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} d\lambda \ldots z < 0. \end{cases}$$

3. Erfüllung der Grenzbedingungen. Nunmehr lassen sich die Grenzbedingungen (3) leicht befriedigen. Die erste derselben verlangt:

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{k_0^2 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} - \frac{k^2 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + k_0^2 f_0(\lambda) - k^2 f(\lambda) \right\} J(\lambda r)\, d\lambda = 0.$$

Sie ist erfüllt, wenn wir machen:

$$(13)\qquad k_0^2 f_0(\lambda) - k^2 f(\lambda) = \frac{k^2 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - \frac{k_0^2 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}.$$

Bei der zweiten Grenzbedingung (3) tritt die Schwierigkeit auf, daß wir die primäre Erregung nicht durch die Formeln (11) darstellen dürfen, weil diese, unter dem Integralzeichen nach z differenziert, für $z = 0$ divergieren würden. Wir überzeugen uns aber unmittelbar durch Ausrechnung, daß gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) = \frac{d}{dR}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) \cdot \frac{z}{R} = 0 \quad \text{für } z = 0.$$

Infolgedessen fällt aus der zweiten Grenzbedingung (3) die primäre Erregung ganz fort; diese Bedingung lautet daher einfach:

$$\int_0^\infty \left\{ \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, f_0(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - k^2}\, f(\lambda) \right\} J(\lambda r) \lambda\, d\lambda = 0;$$

sie ist erfüllt, wenn wir machen:

$$(13\text{a})\qquad \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, f_0(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - k^2}\, f(\lambda) = 0.$$

Durch (13) und (13a) sind die Funktionen f_0 und f bestimmt:

$$(14)\quad \begin{cases} f_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \frac{k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \\ f = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2} - k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}{k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2} + k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}. \end{cases}$$

Tragen wir dies in (12) ein, so ergibt sich einfach:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Pi_0 = \int_0^\infty \frac{2k^2}{N} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda\, d\lambda \ldots z > 0, \\ \Pi = \int_0^\infty \frac{2k_0^2}{N} J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} \lambda\, d\lambda \ldots z < 0 \end{cases}$$

mit der Abkürzung

$$(15a)\qquad N = k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}.$$

In (15) haben wir die endgültige Lösung unseres Problems. Zur Kontrolle betrachten wir zwei Grenzfälle:

a) $k = k_0$, Dipol im einheitlichen Medium Luft. Es wird

$$\frac{k^2}{N} = \frac{k_0^2}{N} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}.$$

Die beiden Formeln (15) gehen über in die beiden Formeln (11) der primären Erregung. Die sekundäre Erregung verschwindet, wie es sein muß.

b) $k = \infty$, Luft gegen unendlich gut leitende Erde, z. B. Seewasser. Dieser Fall wird wegen seiner Einfachheit den älteren Betrachtungen über drahtlose Telegraphie zugrunde gelegt. Jetzt wird

$$\frac{k^2}{N} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}, \quad \text{also nach (11)} \quad \Pi_0 = 2\frac{e^{ik_0 R}}{R}$$

und

$$\frac{k_0^2}{N} = 0, \quad \text{also} \quad \Pi = 0,$$

wie es in einem unendlich gut leitenden Medium der Fall sein muß. Der Faktor 2 bei Π_0 deutet auf die vollkommene Spiegelung der primären Erregung an der Erdoberfläche hin.

4. Andere Formen der Lösung. Wir erwähnen zunächst, daß die Integraldarstellung (11) der primären Erregung aufgefaßt werden kann als ein Bündel ebener Wellen[1]), allerdings mit zum Teil komplexen Einfallsrichtungen. Dies entspricht ganz der Ableitung von (11) aus dem Fourier-Integral (8), dessen Integrand ja direkt die Form von optischen ebenen Welle hat, und bleibt auch gültig, wenn wir die

[1]) Diese Auffassung kommt bereits in der ursprünglichen Arbeit des Verf., Ann. d. Phys. **28**, 665, 1909, § 11, vor, an die sich die gegenwärtige Darstellung (bis auf unwesentliche Abweichungen in der Definition der Potentiale Π) anschließt; H. Weyl geht in den Ann. d. Phys. **60**, 481, 1919 direkt von dieser Auffassung aus und gründet auf sie die Integration des Problems.

exponentielle Abhängigkeit von z hinzufügen. Schreiben wir nämlich in (11)

$$\lambda = k \sin \vartheta, \quad \sqrt{\lambda^2 - k^2} = \pm i k \cos \vartheta,$$

und setzen wir für J die Integraldarstellung mit der Integrationsvariablen $\varphi - \varphi'$ ein, so entsteht aus (11)

$$\frac{1}{2\pi} \int\int \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi' \, e^{ik\left(r \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi') \pm z \cos \vartheta\right)}.$$

Hierfür können wir aber mit

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi, \qquad d\omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi',$$
$$\alpha = \sin \vartheta \cos \varphi', \qquad \beta = \sin \vartheta \sin \varphi', \qquad \gamma = \cos \vartheta$$

schreiben

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \, e^{ik(\alpha x + \beta y \pm \gamma z)}.$$

Hier erscheint der Integrand in der Tat als ebene Welle von der (im allgemeinen komplexen) Einfallsrichtung α, β, γ.

Man kann nun, ganz wie in der Optik, jede dieser Wellen an der Trennungsfläche $z = 0$ spiegeln und brechen und erhält dadurch die vollständige Lösung unseres Problems, nämlich die Formeln (15). Die Größe $1/N$ entspricht in dieser Auffassung den Fresnelschen Formeln für die reflektierte bzw. gebrochene Amplitude.

Wesentlicher für das Folgende ist eine Umformung unseres einseitig bei $\lambda = 0$ begrenzten, in ein beiderseits ins Unendliche verlaufenden Integrals. Wir setzen nach Gl. (4) von S. 455

$$J = \tfrac{1}{2}(H_0^1 + H_0^2)$$

und zerlegen dadurch (15) in zwei Integrale I und II, beide von 0 bis ∞ geführt, das eine mit H^1, das andere mit H^2 gebildet, wobei z. B. für $z > 0$ gilt

$$\text{II} = \int_0^\infty \frac{k^2}{N} H_0^2(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda \, d\lambda. \tag{16}$$

Nach den sogenannten Umlaufrelationen (6 c) von S. 457 ist

$$H_0^2(\lambda r) = -H_0^1(-\lambda r).$$

Führen wir nun in II statt λ die Integrationsvariable $\mu = -\lambda$ ein, so können wir, da N nur von λ^2 abhängt, statt (16) schreiben

$$\text{II} = -\int_0^{-\infty} \frac{k^2}{N} H_0^1(\mu r) e^{-\sqrt{\mu^2 - k_0^2}\, z} \mu \, d\mu, \tag{17}$$

und dieses Integral setzt sich bei Umkehrung der Integrationsgrenzen mit I zusammen zu einem Integral längs der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$, genommen über H^1.

Wir erhalten also als neue Form der Lösung unseres Problems:

$$(18)\qquad \begin{cases} \Pi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{N} H(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda \ldots z > 0, \\ \Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2}{N} H(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda \ldots z < 0. \end{cases}$$

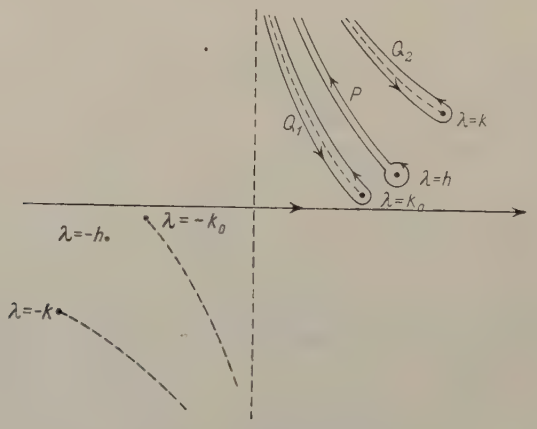
Der obere Index 1 und der untere 0 bei H ist hier und im folgenden unterdrückt. Ganz analog können wir die primäre Erregung (11) durch die folgenden Formeln darstellen:

$$(19)\qquad \begin{cases} \frac{e^{i k_0 R}}{R} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} H(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \ldots z > 0, \\ \frac{e^{i k R}}{R} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} H(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} \ldots z < 0. \end{cases}$$

5. Diskussion der Lösung. Oberflächenwellen. Schwieriger als die Aufstellung der allgemeinen Formeln erweist sich hier, wie so häufig, ihre spezielle Diskussion.

Zunächst eine mehr beiläufige Bemerkung: Unser Integrationsweg in (18), die reelle Achse, würde bei reellem k_0 durch die Verzweigungs-

Fig. 59.



punkte $\lambda = \pm k_0$ gehen, was zu einer Zweideutigkeit der Wurzel $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ führen würde. Wir entgehen dem, wenn wir k_0^2 ebenso wie k^2 als komplex ansehen, aber mit beliebig kleinem positiv-imaginären Teil (entsprechend einer beliebig geringen Leitfähigkeit der Luft). Die Ver-

zweigungspunkte der Integranden, sowohl von Π_0 als von Π, liegen dann paarweise in der positiv-imaginären und negativ-imaginären λ-Ebene ($\lambda = +k_0, +k$ und $\lambda = -k_0, -k$).

Die Riemannsche Fläche, auf der die Integranden von Π_0 und Π eindeutig sind, ist vierblättrig, entsprechend den vier Vorzeichenkombinationen von $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ und $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$. Von diesen vier Blättern kommt für uns mit Rücksicht auf die Konvergenz der Integrale und nach der Festsetzung von S. 543 nur dasjenige in Betracht — wir wollen es das obere Blatt nennen —, auf dem beide Wurzeln einen positiv-reellen Teil haben. Auf diesem oberen Blatte verläuft unser ursprünglicher reeller Integrationsweg; wenn wir ihn deformieren, muß es so geschehen, daß wir das obere Blatt nicht verlassen. Als „Verzweigungsschnitte", in welchen die Blätter zusammenhängen, haben diejenigen Linien zu gelten, in denen die reellen Teile von $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ und $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ verschwinden. Diese Schnitte, vgl. Fig. 59, verlaufen in der positiv-imaginären Halbebene von $\lambda = +k_0, +k$ nach $+i\infty$, in der negativ-imaginären Halbebene von $\lambda = -k_0, -k$ nach $-i\infty$. Bei der späteren Deformation des Integrationsweges dürfen diese Verzweigungslinien nicht überschritten werden.

Außerdem besitzen die Integranden noch eine weitere Singularität in jeder der beiden Halbebenen, nämlich einen Pol an der Stelle ($\lambda = h$), wo der Nenner N verschwindet. Wir berechnen h nach (15a) aus der Gleichung:

$$\sqrt{\frac{h^2 - k_0^2}{h^2 - k^2}} = -\frac{k_0^2}{k^2}. \tag{20}$$

und finden durch Quadrieren derselben:

$$h^2 = \frac{k_0^2\left(1 + \frac{k_0^2}{k^2}\right)}{1 - \frac{k_0^4}{k^4}} = \frac{k_0^2 k^2}{k_0^2 + k^2} \tag{21}$$

oder

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k^2}. \tag{22}$$

Wir bemerken vorab, daß dies mit Gl. (8c) aus Kap. 14, § 1 übereinstimmt und werden diesem Zusammenhang später nachzugehen haben.

Der Vollständigkeit halber wollen wir zunächst zeigen, daß die Stelle $\lambda = h$ wirklich im oberen Blatte unserer Riemannschen Fläche liegt. Läge sie in einem der unteren Blätter, so würde sie für unsere weitere Betrachtung ausscheiden und durch unseren Integrationsweg nicht zu erreichen sein. Wir berechnen aus (21) zunächst mit unbestimmtem Vorzeichen:

$$\sqrt{h^2 - k_0^2} = \frac{\pm i k_0^2}{\sqrt{k_0^2 + k^2}}, \qquad \sqrt{h^2 - k^2} = \frac{\pm i k^2}{\sqrt{k_0^2 + k^2}} \tag{23}$$

und setzen der größeren Deutlichkeit halber:

$$(24)\quad \begin{cases} k_0^2 = |k_0^2|\, e^{i\varepsilon} \ (\varepsilon \text{ sehr klein}), \\ k^2 = |k^2|\, e^{i\varphi} \ (\varphi \text{ nahezu } \pi/2 \text{ bei großer Leitfähigkeit } \sigma), \\ \sqrt{k_0^2 + k^2} = |\sqrt{k_0^2 + k^2}|\, e^{i\psi} \ (0 < \psi < \varphi/2). \end{cases}$$

Im oberen Blatte sind nun die Vorzeichen auf den rechten Seiten von (23) so zu wählen, daß die reellen Teile positiv werden, d. h. daß die zugehörigen Polarwinkel zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ liegen. Dies liefert eindeutig:

$$\sqrt{h^2 - k_0^2} = \frac{|k_0^2|}{|\sqrt{k_0^2 + k^2}|}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon - \psi\right)}, \quad \sqrt{h^2 - k^2} = \frac{|k|^2}{|\sqrt{k_0^2 + k^2}|}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi - \psi\right)},$$

$$(25)\qquad \sqrt{\frac{h^2 - k_0^2}{h^2 - k^2}} = \left|\frac{k_0^2}{k^2}\right| e^{i(\pi + \varepsilon - \varphi)} = -\frac{k_0^2}{k^2},$$

in Übereinstimmung mit (20). N verschwindet also wirklich im oberen Blatte unserer Riemannschen Fläche. Da wir ja h^2 aus (20) durch Quadrieren bekommen haben, wäre es ebensogut möglich gewesen, daß wir im oberen Blatte an Stelle von (20) hätten finden können:

$$\sqrt{\frac{h^2 - k_0^2}{h^2 - k^2}} = +\frac{k_0^2}{k^2},$$

in welchem Falle der Pol $\lambda = h$ nicht zum oberen Blatte gehören würde.

Zur Diskussion unserer Integraldarstellung (18) fortschreitend, ziehen wir nunmehr den Integrationsweg, wie Fig. 59 veranschaulicht, nach der positiv-imaginären λ-Ebene hinüber, wo die erste Hankelsche Funktion H im Unendlichen verschwindet. Er bleibt dann an den beiden Verzweigungsschnitten $k_1 \to i\infty$ und $k_2 \to i\infty$ hängen und außerdem an dem Pol $\lambda = h$, während bekanntlich die in Fig. 59 gezeichneten Zuführungswege zu dem Pol keinen Beitrag zum Integral liefern. Wir bezeichnen die drei Beiträge in der genannten Reihenfolge mit Q_1, Q_2 und P und schreiben:

$$(26)\qquad \Pi_0 = P + Q_1 + Q_2.$$

Zunächst befassen wir uns mit dem Beitrag P unseres Poles. In der Umgebung des Poles $\lambda = h$ ist

$$N = (\lambda - h)\left(\frac{dN}{d\lambda}\right)_{\lambda = h}.$$

Nach (15a) gilt

$$(27)\qquad \left(\frac{dN}{d\lambda}\right)_{\lambda = h} = \frac{k^2 h}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} + \frac{k_0^2 h}{\sqrt{h^2 - k^2}} = hK,$$

wo

$$K = \frac{k^2}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} + \frac{k_0^2}{\sqrt{h^2 - k^2}}$$

in k_0 und k symmetrisch ist.

Wir setzen dies in Gl. (18) ein und berechnen P nach dem Cauchyschen Satz:

$$P = 2\pi i \frac{k^2}{K} H(hr) e^{-\sqrt{h^2-k_0^2}\, z}. \tag{28}$$

h ist nach (22) von der Größenordnung k_0 (sofern $|k| \gg k_0$), also ist hr stets eine große Zahl, vorausgesetzt, daß der Abstand r viele Wellenlängen beträgt, was wir stets annehmen dürfen. Wir benutzen also für H die asymptotische Darstellung Gl. (8) von S. 458. Dann wird

$$P = \sqrt{\frac{2\pi i}{hr}} \frac{2k^2}{K} e^{ihr - \sqrt{h^2-k_0^2}\, z}. \tag{28a}$$

Ebenso wie Π_0, $z > 0$, haben wir den anderen Ausdruck (18), Π, $z < 0$, zu behandeln, der sich von Π_0 nur durch Vertauschung von k_0 mit k und Vorzeichenumkehr bei z unterscheidet. Als Beitrag des Poles $\lambda = h$ zu Π erhält man von hieraus

$$P = \sqrt{\frac{2\pi i}{hr}} \frac{2k_0^2}{K} e^{ihr + \sqrt{h^2-k^2}\, z}. \tag{28b}$$

Wir betrachten nun die Ausdrücke (28a), (28b) für P näher und zeigen, daß sie als Oberflächenwellen zu charakterisieren sind — ähnlich wie die Wasserwellen und gewisse seismische Phänomene und im Gegensatz zu den gewöhnlichen optischen und akustischen Wellen, die wir als Raumwellen zu bezeichnen haben.

Zunächst: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dr/dt längs der Oberfläche ist gleich ω/h, wenn wir den Zeitfaktor in der Form $e^{-i\omega t}$ annehmen und von dem imaginären Teil von h (Dämpfungsglied, s. unten) zunächst absehen. Diese Größe h bestimmt sich nun nach (21) oder (22) in völlig symmetrischer Weise aus den Materialkonstanten k_0 und k der beiden in $z = 0$ zusammenstoßenden Medien, so daß sie ihren Ursprung nicht einem Vorgang in dem einen oder anderen Medium, sondern einem Zusammenwirken beider Medien verdankt. Dagegen werden wir in der nächsten Nummer sehen, daß die Bestandteile Q_1, Q_2 unserer Lösung den Charakter von Raumwellen haben, daß nämlich ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit durch je eines der beiden aneinandergrenzenden Medien bestimmt wird.

Ferner: Unsere Welle P nimmt mit der Entfernung ab wie $r^{-1/2}$, wenn wir wieder von der exponentiellen Dämpfung zunächst absehen. Dieses Verhalten ist ebenfalls charakteristisch für eine Oberflächenwelle, d. h. für eine Ausbreitung in zwei Dimensionen (vgl. auch das S. 466 über Zylinderwellen Gesagte). Dagegen ist für eine Raumwelle charakteristisch eine Amplitudenabnahme wie $1/r$; denn hier bleibt die Energie (das Amplitudenquadrat) über die Kugelfläche $4\pi r^2$ konstant, bei der Oberflächenwelle dagegen die Energie über den Kreis $2\pi r$.

Wir haben dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß sich die Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, aus denen sich die Energie berechnet, hinsichtlich ihrer Abnahme mit r ebenso verhalten wie der Potentialbestandteil P, aus dem sie durch Differentiation gewonnen werden. Daß dies asymptotisch tatsächlich zutrifft, geht aus den untenstehenden Formeln hervor.

Daß eine örtliche Dämpfung auch im nichtleitenden Medium Luft auftritt, hat seinen Grund in dem Energiefluß nach dem leitenden Erdboden hin und spricht gleichfalls für den Oberflächenwellencharakter. Die Größe der Dämpfung finden wir, wenn wir Gl. (21) nach Potenzen von k_0/k entwickeln:

$$h = k_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{k^2}\right) = k_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{|k|^2}\,e^{-i\varphi/2}\right). \tag{29}$$

Hier haben wir k_0 als reell gedacht und für k die Darstellung aus (24) eingesetzt. Daraus folgt

$$\Re\mathrm{e}\,(ihr) = -\frac{1}{2}\frac{k_0^3}{|k|^2}\,r\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Dies ist negativ wegen $\varphi \leqq \pi$, Gl. (24); somit folgt in der Tat eine mit wachsendem r zunehmende exponentielle Dämpfung.

Schließlich zeigen wir, daß unsere jetzigen Oberflächenwellen P für $r = \infty$ in denjenigen Typus ebener Wellen übergehen, den wir bereits in Kap. 14, § 1 behandelt haben. Auf die Gleichheit der jetzigen mit der dortigen Größe h wurde bereits hingewiesen. Zum Nachweis der vollen Identität bestimmen wir das Feld $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$, welches nach den Gl. (2) unserem P entspricht. Dabei brauchen wir die Differentiation nach r nur an der Exponentialfunktion vorzunehmen, nicht an dem Faktor $r^{-1/2}$, welcher lediglich zu Zusatzgliedern Anlaß geben würde, die im Limes $r = \infty$ relativ zu den hinzuschreibenden verschwinden. Indem wir einen allen Feldgrößen gemeinsamen Faktor

$$C = \frac{k_0 k^2 h}{K}\sqrt{\frac{2\pi i}{hr}}$$

abspalten, erhalten wir nach (2):

$$\mathfrak{H}_\varphi = \begin{cases} C\,e^{ihr-\sqrt{h^2-k_0^2}\,z}, \\ C\,e^{ihr+\sqrt{h^2-k^2}\,z}, \end{cases} \qquad \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_z = 0,$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = 0, \quad \mathfrak{E}_r = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{k_0^2-h^2}{k_0^2}}\,C\,e^{ihr-\sqrt{h^2-k_0^2}\,z}, \\ +\dfrac{k_0}{k}\sqrt{\dfrac{k^2-h^2}{k^2}}\,C\,e^{ihr+\sqrt{h^2-k^2}\,z}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{E}_z = \begin{cases} \dfrac{h}{k_0}\,C\,e^{ihr-\sqrt{h^2-k_0^2}\,z}, \\ \dfrac{hk_0}{k^2}\,C\,e^{ihr+\sqrt{h^2-k^2}\,z}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind nun in der Tat identisch mit den Ausdrücken (1), (3) und (6), (7) aus Kap. 14, § 1, bis auf die Bezeichnungen: Unseren jetzigen Koordinaten r, z, φ entsprechen die früheren x, y, z, unsere jetzigen Größen $-\sqrt{h^2-k_0^2}$, $\sqrt{h^2-k^2}$ werden in den früheren Formeln vertreten durch $i\sqrt{k_0^2-h^2}$, $-i\sqrt{k^2-h^2}$, welche offenbar mit jenen identisch sind, wenn, wie wir festsetzten, das eine Mal der reelle Teil, das andere Mal der imaginäre Teil der Wurzeln positiv gerechnet wird.

Durch diese Überführung haben wir den Nachweis erbracht, daß die früher studierten ebenen Wellen, die zunächst etwas künstliche Anregungsbedingungen zu erfordern schienen, sich in großer Entfernung von einem linearen Sender von selbst einstellen als ein charakteristischer Bestandteil des von diesem ausgehenden Wellenkomplexes. Allerdings sind sie hier noch begleitet von Raumwellen Q_1, Q_2 und sind von diesen bei kleineren Entfernungen nicht scharf zu trennen.

Es entsteht die Frage, ob die Existenz der Oberflächenwellen das Grundproblem der drahtlosen Telegraphie auf der Erde zu lösen vermag: Wie können drahtlose Wellen die Erdkrümmung überwinden? Es liegt nahe, anzunehmen, daß unsere Oberflächenwellen der gekrümmten Erde nahezu ebensogut zu folgen vermögen, wie der bisher vorausgesetzten ebenen Erde, und daß sie in solchen Teilen der Erdoberfläche übrigbleiben werden, wo die Raumwellen durch die Erdkrümmung abgeschirmt oder durch ihre stärkere Amplitudenabnahme bereits ausgelöscht sind.

Demgegenüber ist zunächst darauf hinzuweisen, daß unsere Oberflächenwellen eine exponentielle Dämpfung erleiden, die bei den Raumwellen im nichtabsorbierenden Medium fehlt. Sodann aber müssen wir aus den neueren Erfahrungen, insbesondere solchen mit sehr kurzen Wellen (50 bis 100 m Wellenlänge) und aus ihren zum Teil überraschend großen Reichweiten schließen, daß bei der Übertragung auf große Entfernungen besondere Verhältnisse (Inhomogenitäten in der Atmosphäre) mitspielen. Wir kommen hierauf im letzten Paragraphen dieses Kapitels zurück. Hier wollten wir zunächst nur davor warnen, die Rolle der Oberflächenwellen bei der Überwindung der Erdkrümmung zu überschätzen.

6. Ergänzung der Diskussion bezüglich der Raumwellen. In aller Kürze wollen wir die „Raumwellen“ Q_1, Q_2 behandeln, obwohl sie für die Beurteilung der praktischen Verhältnisse unwesentlich sind. Q_1 ist für $z > 0$, Luft, dargestellt durch das erste Integral (18), erstreckt über die in Fig. 59 gezeichnete Schleife, welche den Pol $\lambda = h$ ausschließt und den Verzweigungspunkt $\lambda = k_0$ eng umschließt. Es ist begreiflich

[den Nachweis werden wir hier schuldig bleiben][1]), daß der wichtigste Teil dieses Weges die Umgebung von $\lambda = k_0$ ist. Den Nenner N behandeln wir als langsam veränderliche Größe und setzen daraufhin in ihm $\lambda = k_0$, so daß [Gl. (15a)]

$$N = N(k_0) = k_0^2 \sqrt{k_0^2 - k^2}$$

konstant wird. Dann ergibt sich aus der ersten Gl. (18)

$$Q_1 = \frac{k^2}{N(k_0)} \int H(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda \, d\lambda.$$

Da unter dem Integralzeichen der Verzweigungspunkt $\lambda = k$ und der Pol $\lambda = h$ nicht mehr vorkommen, ist der Integrationsweg frei beweglich geworden und kann z. B. in die reelle Achse von $\lambda = -\infty$ bis $\lambda = +\infty$ zurückverwandelt werden. Aus der ersten Gl. (19) folgt aber durch Differentiation nach z (welche für $z > 0$ keine Konvergenzschwierigkeit macht):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda \, d\lambda = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} e^{i k_0 R} \right).$$

Somit haben wir

$$Q_1 = \frac{-2 k^2}{N(k_0)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} e^{i k_0 R} \right). \tag{30}$$

Verfahren wir in gleicher Weise mit Q_2, indem wir auch hier den Nenner N konstant setzen, nämlich gleich seinem Werte im Verzweigungspunkt $\lambda = k$, so läßt sich das Integral Q_2 direkt auf Null zusammenziehen, da die Verzweigung bei $\lambda = k$ aus dem Integral verschwunden ist. Infolgedessen erhalten wir in der hier eingehaltenen Näherung $Q_2 = 0$.

Ganz entsprechend verschwindet in dem Ausdruck für Π, $z < 0$, Erde, das Glied Q_1, und wir erhalten hier für Q_2:

$$Q_2 = \frac{-2 k_0^2}{N(k)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} e^{i k R} \right). \tag{30a}$$

Diese Ergebnisse (30) und (30a) charakterisieren sich nun in der Tat als Raumwellen. Die Fortpflanzung in (30) wird bestimmt durch die Wellenzahl k_0 in Luft, diejenige in (30a) durch die (komplexe) Wellenzahl in Erde. Die Fortpflanzung wird also nicht, wie bei P, durch beide Medien gemeinsam gegeben, sondern je durch dasjenige

[1]) Dieser Nachweis ist in der ursprünglichen Arbeit, Ann. d. Phys. **28**, § 6, dadurch geführt, daß der Nenner N in eine nach Potenzen von $\sqrt{\frac{\lambda^2 - k_0^2}{\lambda^2 - k^2}}$ fortschreitende Reihe entwickelt wurde, deren erstes Glied gerade zu Gl. (30) des Textes Anlaß gibt. Das zweite Glied liefert einen Beitrag von ähnlicher Form und Größe, auf den wir hier nicht eingehen.

Medium, in dem die Fortpflanzung stattfindet. Ebenso die Absorption: die Absorption der Raumwelle für $z > 0$ ist Null, diejenige für $z < 0$ entspricht den Materialkonstanten des Erdbodens, in dem die Absorption stattfindet.

Darüber hinaus zeigt die Form der Ausdrücke (30) und (30 a), daß wir es nicht mit dem einfachsten Raumwellentypus zu tun haben, wie er von einem Dipol ausgeht, sondern mit einem komplizierteren Typus, der dem Zusammenrücken zweier Dipole in der z-Richtung, einem „Tetrapol" entspricht. (Hätten wir unsere Entwicklung weitergeführt, so würden wir noch höhere Gebilde, „Oktopole" usw., gefunden haben.) Daher kommt es, daß die Wellen mit wachsendem R nicht wie die Dipolwellen mit $1/R$, sondern mit $1/R^2$ abnehmen; es wird nämlich, bis auf höhere Potenzen von $1/R$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_0R}}{R} = ik_0z\frac{e^{ik_0R}}{R^2} \quad \text{usw.}$$

7. Näherungsformeln für kleine numerische Entfernungen. Aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Raumwellen in Luft und aus den der Oberflächenwellen bzw. den zugehörigen Wellenzahlen k_0 und h bilden wir eine unbenannte Größe, die wir „numerische Entfernung" nennen, nämlich

$$\varrho = (k_0 - h)ir. \tag{31}$$

Setzen wir den Wert von h aus Gl. (21) ein, so entsteht mit $|k^2| \gg k_0^2$:

$$\varrho = k_0\left(1 - \sqrt{\frac{k^2}{k_0^2 + k^2}}\right)ir = \frac{k_0^2}{k^2}\frac{ik_0r}{2}; \tag{31a}$$

diese Größe ist im allgemeinen komplex, wird aber reell in dem wichtigen Sonderfall, wo der reelle Bestandteil von k^2 gegen den imaginären vernachlässigt werden kann ($\varepsilon\omega \ll \sigma$).

Wenn wir in der vorigen Nummer von „großen Entfernungen" sprachen, so bedeutete dies nicht nur große r ($r \gg \lambda$, d. h. $k_0r \gg 1$), sondern, genauer gesagt, große ϱ ($k_0r \gg |k|^2/k_0^2$). Der Beweis hierfür folgt aus der in der Anmerkung zur vorigen Nummer angedeuteten Reihenentwicklung.

Wir wenden uns nun zu einer Darstellung für kleine numerische Entfernungen. Diese sind für die Praxis wichtiger, weil nur sie eine hinreichende Intensität der Signale verbürgen. Dabei können kleine numerische Entfernungen bei guter Leitfähigkeit (Seewasser) sehr große absolute Entfernungen (von der Größe des Erdquadranten) umspannen.

Wir bemerken zunächst, daß in dem Nenner

$$N = k^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2\sqrt{\lambda^2 - k^2}$$

der zweite Summand wegen $|k|^2 \gg k_0^2$ ein Korrektionsglied ist, und vernachlässigen in diesem λ^2 gegen k^2. Wir schreiben dementsprechend

$$N = k^2\left(\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a\right), \quad a = i\frac{k_0^2}{k}. \tag{32}$$

Das Vorzeichen bei a bestimmt sich daraus, daß $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ stets, auch für $\lambda = 0$, mit positiv reellem Teile zu rechnen ist (vgl. S. 543) und daß wir unter k die Wurzel aus k^2 mit positiv imaginärem Teile verstehen wollen.

Aus der ersten Gl. (15) wird auf diese Weise [es ist für das Folgende gleichgültig, ob wir an die Darstellung (15) durch die Besselsche oder an die Darstellung (18) durch die Hankelsche Funktion anknüpfen]

$$\Pi_0 = \int_0^{+\infty} \frac{2J(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda\, d\lambda. \tag{33}$$

Um den Nenner fortzuschaffen, bilden wir $\Pi_0 e^{az}$ und differenzieren nach z. Das Ergebnis läßt sich so schreiben:

$$\frac{1}{2} e^{-az} \frac{\partial}{\partial z}(\Pi_0 e^{az}) = -\int_0^{+\infty} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda\, d\lambda. \tag{34}$$

Nach (11) ist andererseits

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R} e^{ik_0 R}\right) = -\int_0^{+\infty} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda\, d\lambda. \tag{34a}$$

Durch Vergleich von (34) und (34a) folgt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\Pi_0 e^{az}) = e^{az}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R} e^{ik_0 R}\right).$$

Wir integrieren nach z, nennen die Integrationsvariable ζ und wählen als untere Grenze derselben einen Wert $\Omega = \infty$, für welchen das Integral nach ζ konvergiert. So entsteht mit $R_\zeta = \sqrt{r^2 + \zeta^2}$

$$\frac{1}{2}\Pi_0 e^{az} = \int_\Omega^z e^{a\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{R_\zeta} e^{ik_0 R_\zeta}\right) d\zeta$$

und nach Ausführung einer partiellen Integration:

$$\frac{1}{2}\Pi_0 = \frac{e^{ik_0 R}}{R} - a e^{-az}\int_\Omega^z e^{a\zeta}\frac{e^{ik_0 R_\zeta}}{R_\zeta}\, d\zeta. \tag{35}$$

Wir schreiben hierfür näherungsweise:

$$\frac{1}{2}\Pi_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R}\left(1 - ae^{-az}\int_{\Omega}^{z} e^{a\zeta}\, e^{ik_0(R_\zeta - R)}\, d\zeta\right). \tag{35a}$$

Beim Übergang von (35) zu (35a) haben wir im Nenner R_ζ mit R identifiziert, mit Rücksicht darauf, daß in

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2+z^2} = r + \dfrac{1}{2}\dfrac{z^2}{r} + \cdots, \\ R_\zeta = \sqrt{r^2+\zeta^2} = r + \dfrac{1}{2}\dfrac{\zeta^2}{r} + \cdots \end{cases} \tag{35b}$$

je das zweite Glied der Entwicklung wegen $r \gg z$ ein Korrektionsglied ist, welches die Größenordnung von $1/R$ und $1/R_\zeta$ nicht wesentlich beeinflußt. Aus (35b) folgt gleichzeitig genähert

$$R_\zeta - R = \frac{1}{2r}(\zeta^2 - z^2),$$

mithin aus (35a)

$$\frac{1}{2}\Pi_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R}\left(1 - ae^{-az - \frac{ik_0}{2r}z^2}\int_{\Omega}^{z} e^{a\zeta + \frac{ik_0}{2r}\zeta^2}\, d\zeta\right). \tag{36}$$

Die Exponenten von e werden nun je zu einem vollständigen Quadrat dadurch ergänzt, daß wir ihnen $\pm\varrho$ hinzufügen, unter ϱ die numerische Entfernung aus Gl. (31a) verstanden. Es ist nämlich mit Rücksicht auf die Definition von a in (32):

$$\begin{cases} \varrho + a\zeta + \dfrac{ik_0}{2r}\zeta^2 = \dfrac{ik_0}{2rk^2}(k_0r + k\zeta)^2 = u^2, \\ \varrho + az + \dfrac{ik_0}{2r}z^2 = \dfrac{ik_0}{2rk^2}(k_0r + kz)^2 = w^2. \end{cases} \tag{36a}$$

u und w sind neue Abkürzungen. u benutzen wir weiterhin als Integrationsvariable statt ζ, wobei der unteren Grenze Ω nunmehr der Wert $u = i\infty$ entsprechen wird. Dabei ist

$$d\zeta = \sqrt{\frac{2r}{ik_0}}\, du$$

und wegen (31a) und (32)

$$a\sqrt{\frac{2r}{ik_0}} = 2\sqrt{\varrho}.$$

Aus (36) wird somit

$$\frac{1}{2}\Pi_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R}\left(1 - 2\sqrt{\varrho}\, e^{-w^2}\int_{i\infty}^{w} e^{u^2}\, du\right). \tag{37}$$

Dies die endgültige Formel, zu welcher auch Weyl in der S. 548 zitierten Arbeit bei der Diskussion unseres Problems auf anderem Wege gelangt. Sie stimmt für $z = 0$ (also $w^2 = \varrho$, $R = r$) vollkommen überein mit der Formel, welche der Verfasser früher in Ann. d. Phys. **28** abgeleitet hatte[1]). Um auch die dort gegebene Reihenentwicklung, nunmehr auf den Fall $z > 0$ erweitert, abzuleiten, spalten wir

$$\int_{i\infty}^{w} e^{u^2} du \quad \text{in} \quad \int_{i\infty}^{0} e^{u^2} du + \int_{0}^{w} e^{u^2} du = \frac{i}{2}\sqrt{\pi} + \int_{0}^{w} e^{u^2} du.$$

Dadurch zerlegt sich Π_0 in zwei Teile Π_1 und Π_2, nämlich:

$$(38) \qquad \begin{cases} \Pi_1 = 2\dfrac{e^{ik_0R}}{R}(1 - 2\sqrt{\varrho}\,W), \quad W = e^{-w^2}\displaystyle\int_0^w e^{u^2} du, \\ \Pi_2 = -2i\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\sqrt{\varrho\pi}\,e^{-w^2}. \end{cases}$$

Für hinreichend kleine Werte von ϱ und w wird

$$(39) \qquad \Pi_0 = \Pi_1 = \frac{2e^{ik_0R}}{R}.$$

Dies entspricht (auch hinsichtlich des Faktors 2) dem Grenzfall unendlich guter Leitfähigkeit des Erdbodens, vgl. den Schluß von **3**, Fall b).

Die Größe W läßt sich leicht in eine Potenzreihe nach w entwickeln. Es gilt nämlich für sie die Differentialgleichung

$$\frac{dW}{dw} + 2wW = 1$$

und die Anfangsbedingung $W = 0$ für $w = 0$. Daraus folgt sofort durch Koeffizientenvergleichung

$$W = w\left(1 - \frac{2}{1.3}w^2 + \frac{2.2}{1.3.5}w^4 - \frac{2.2.2}{1.3.5.7}w^6 + \cdots\right).$$

Die Reihenentwicklung für Π_1 lautet daher:

$$\Pi_1 = 2\frac{e^{ik_0R}}{R}\left[1 - \sqrt{\varrho}\,w\left(\frac{2}{1} - \frac{2.2}{1.3}w^2 + \frac{2.2.2}{1.3.5}w^4 - \cdots\right)\right].$$

Wir gehen zu dem Ausdruck von Π_2 in (38) über, dessen Reihenentwicklung trivial ist. In Π_2 erkennen wir nun unsere frühere Ober-

[1]) Vgl. insbesondere daselbst Gl. (47) von S. 711 und Gl. (55) von S. 719. Statt unserem ϱ ist dort α^2 geschrieben.

flächenwelle P wieder. Der Exponent von e in Π_2 wird nämlich vermöge (35), (36a), (31) und (32):

$$ik_0R - w^2 = ik_0r + \frac{ik_0z^2}{2r} + \cdots - \varrho - az - \frac{ik_0z^2}{2r}$$
$$= ihr - az = ihr - i\frac{k_0^2}{k}z;$$

dies stimmt aber mit dem Exponenten in (28a) überein, wenn wir dort entwickeln:

$$\sqrt{h^2 - k_0^2}\,z = k_0 z\sqrt{\frac{k^2}{k^2 + k_0^2} - 1} = -i\frac{k_0^2}{k}z.$$

Natürlich wird außer der Exponentialfunktion in Π_2 auch die Amplitude, insbesondere in ihrer Abhängigkeit von r, mit unserem früheren Ausdruck P identisch.

Daß allemal, wie oben bemerkt, für kleine ϱ (bzw. w) der Grenzfall des vollkommenen Leiters herauskommt, ist eine interessante Bestätigung des Standpunktes, der in den ersten Arbeiten über drahtlose Telegraphie z. B. von M. Abraham eingenommen wurde, demzufolge die Erde als vollkommen leitend behandelt und die Antenne an der Erdoberfläche gespiegelt wurde. Wir sehen jetzt aber, daß dieser Standpunkt nur für $\varrho \ll 1$ zulässig ist und daß für größere ϱ Abweichungen eintreten, die von den besonderen Eigenschaften des Erdmaterials abhängen.

Unser Ausdruck (31a) für ϱ enthält eine Art Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie. Da das Feld durch die Formeln (38) gegeben ist und diese am Erdboden, wo $w = \sqrt{\varrho}$ wird, abgesehen von dem belanglosen Faktor e^{ikR}/R, nur Funktionen von ϱ sind, so bedeuten gleiche Werte von ϱ (bei eventuell sehr verschiedenen Werten von r) ähnliche Größe und Beschaffenheit der Felder.

Die Definition (31) zeigt, daß ϱ in dem Maße wächst, als eine Spannung auftritt zwischen der Phase der Oberflächenwellen hr und der Phase der Raumwellen k_0r. In demselben Maße wird die Übertragung der Signale beeinträchtigt. Man kann sich also die Vorstellung bilden, daß eine Unstimmigkeit in den beiderlei Phasen dem Ausbreitungsvorgang hinderlich ist.

Alle Umstände, welche ϱ vergrößern (verkleinern), werden die Übertragung der wellentelegraphischen Signale verschlechtern (verbessern). Wir betrachten in dieser Hinsicht einmal die Bodenbeschaffenheit, sodann die Frequenz oder Wellenlänge der Schwingungen.

Der Einfluß der Bodenbeschaffenheit ist sehr beträchtlich. Nicht nur kommt es auf die Leitfähigkeit σ des Bodens, sondern auch auf die Dielektrizitätskonstante ε desselben an, deren Wert ja nach Gl. (1) neben σ die Größe von k und daher auch nach (31a) diejenige

von ϱ bestimmt. Über die Materialkonstanten verschiedener Bodenarten liegen Schätzungen von J. Zenneck[1]) vor. Man berechnet aus ihnen beispielsweise für die Entfernung $r = \frac{1}{4}$ Erdquadrant (entsprechend der ersten transatlantischen Station Irland-Labrador) und für eine Wellenlänge $\lambda = 2$ km (entsprechend den älteren Großstationen) in runden Zahlen für

Seewasser:	Nasser Boden:	Süßwasser:	Trockener Boden:
$\varrho = \frac{1}{30}$,	$\varrho = 6{,}5$,	$\varrho = 30$,	$\varrho = 300$.

Entsprechend der ganz verschiedenen Größenordnung dieser Zahlen haben wir bei diesen verschiedenen Bodenarten auch eine ganz verschiedene Größenordnung der wellentelegraphischen Wirkung und ein ganz verschiedenes Bild des Wellenvorganges zu erwarten.

Sodann betrachten wir den Einfluß der Wellenlänge auf die numerische Entfernung, etwa im Falle von Seewasser, wo der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigt werden kann. Dann wird nach (1) $k^2 = i\sigma\omega/c^2$, $k_0 = \omega/c$ und nach (31a):

$$\varrho = \frac{\omega^2 r}{2\sigma c}.$$

Vergrößerung der Frequenz (Verkleinerung der Wellenlänge) vergrößert also ϱ, und zwar in dem betrachteten Sonderfalle quadratisch. Verkleinern wir also im obigen Beispiel die Wellenlänge von 2 km auf 200 m, so wird ϱ von $^1/_{30}$ auf 3,3 vergrößert. Wir erwarten, daß dementsprechend die wellentelegraphische Wirkung sich verschlechtern würde. Umgekehrt haben wir in der von der Praxis ursprünglich befolgten Tendenz, bei den Großstationen zu immer größeren Wellenlängen überzugehen, den Beweis dafür, daß die Vergrößerung der Wellenlänge — wegen Verkleinerung der numerischen Entfernung — für die Überwindung großer absoluter Entfernungen günstig ist.

Natürlich ist dieser Schluß gebunden an die Annahme einer homogenen Atmosphäre und stetiger Ausbreitung längs des Erdbodens. Mit Rücksicht auf die möglichen Inhomogenitäten der Atmosphäre (Diskontinuitätsflächen, welche die Wellen zurückreflektieren) können sich die Verhältnisse umkehren. Die neueren Erfahrungen[2]) mit sehr kurzen Wellenlängen (< 200 m) haben gezeigt, daß diese in bevorzugter Weise aus den oberen Luftschichten zurückreflektiert werden und daher weite Entfernungen überbrücken können. Man kann im Experiment geradezu die beiden Arten der Wellenübertragung voneinander trennen: die di-

[1]) Ann. d. Phys. **23**, 859, 1907.

[2]) Vgl. die Arbeiten von E. V. Appleton und seiner Schüler, insbesondere J. A. Ratcliffe und M. A. F. Barnett, Cambridge Phil. Soc. Proc. **23**, 288, 1926; E. V. Appleton und M. A. F. Barnett, R. Soc. Proc. **113**, 450, 1926.

rekte oder Bodenwelle (ground ray) und die indirekte oder zurückreflektierte Welle (atmospheric ray). Unsere Formeln beziehen sich nur auf die erste dieser beiden Wellenarten und werden bei dieser, insbesondere was die Abhängigkeit von den Materialkonstanten des Erdbodens betrifft, von dem Experiment bestätigt.

§ 2. Horizontalantenne und Rahmenantenne.

Außer mit Vertikalantennen (vertikaler Mast mit darüber ausgespanntem Schirm) können drahtlose Signale auch übermittelt werden mit Horizontalantennen (Kabel in der Nähe des Erdbodens von vorwiegend horizontaler Erstreckung). Solche Horizontalantennen waren nicht nur im Kriege aus militärischen Gründen als Sender und Empfänger üblich, sondern eignen sich auch für die Ferntelegraphie als sogenannter genickter Marconisender (vgl. Fig. 60), bei dem der horizontale Ast der Antenne länger und wirksamer ist als der vertikale. Der besondere Vorzug der Horizontalantennen besteht in ihrer Richtwirkung, d. h. darin, daß sie in ihrer eigenen Richtung stärker senden als senkrecht dazu, während bei der Vertikalantenne das ausgesandte Feld natürlich rundum symmetrisch ist.

Beide Arten, Vertikal- und Horizontalantenne, fassen wir als elektrische Antennen zusammen und stellen sie gegenüber den Rahmenantennen, die wir auch als magnetische Antennen[1]) bezeichnen. Wenn nämlich durch eine auf einen Rahmen gewickelte Leitung Wechselstrom fließt, so wird die Mittellinie des Rahmens zur Achse eines pulsierenden Magnetfeldes. Die primäre Erregung ist in diesem Falle ein „magnetischer Dipol", senkrecht zum Rahmen schwingend. Der elektrischen Horizontalantenne entspricht als magnetisches Gegenstück eine Rahmenantenne mit vertikal gestelltem Rahmen. Der elektrischen Vertikalantenne würde entsprechen ein horizontal gestellter Rahmen. In der Praxis sind Rahmenantennen der ersten Art, zumal als Empfänger, sehr gebräuchlich. Sie teilen mit den elektrischen Horizontalantennen den Vorzug der Richtwirkung. Als Empfänger sprechen sie, wie unmittelbar verständlich ist, in bevorzugter Weise auf solche Wellen an, die in der Ebene des Rahmens einfallen, deren magnetische Kraftlinien also senkrecht zum Rahmen pulsieren. Daß andererseits die Rahmenantennen von vertikaler Achse, d. h. von horizontal gestelltem Rahmen, praktisch unbrauchbar sind, ist ebenfalls leicht verständlich (wegen der im Erdboden hervorgerufenen Wirbelströme, welche den Primärstrom des Rahmens auf große Entfernungen völlig ver-

[1]) Auf die Möglichkeit, Rahmenantennen durch magnetische Linearantennen zu idealisieren, bin ich durch Herrn H. Barkhausen hingewiesen worden.

nichten) und wird durch die nachfolgende mathematische Behandlung im einzelnen begründet.

Während sich manche Eigenschaften, insbesondere die Richtwirkungen als Interferenzerscheinungen, auf elementarem Wege erklären lassen, wollen wir hier eine analytische Behandlung geben, im engen Anschluß an § 1, also mit Rücksicht auf die endliche Leitfähigkeit des Erdbodens, die in der Tat für die Wirkungsweise sowohl der Horizontal- wie der Rahmenantenne wesentlich ist. Außerdem wird auf diesem Wege der Dualismus zwischen den elektrischen und magnetischen Problemen zum vollen Ausdruck kommen.

1. Die magnetische Vertikalantenne. Wir beginnen mit dem praktisch belanglosen, aber theoretisch einfachsten Falle der magnetischen Vertikalantenne (horizontal gestelltem Rahmen), weil sich dieser am engsten an den vorigen Paragraphen anschließt. Hier wie dort wird das Feld beschrieben durch einen Hertzschen Vektor $\Pi = \Pi_z(r, z)$, senkrecht zum Erdboden gerichtet, der nur von den Koordinaten r und z abhängt und unabhängig ist von der dritten Polarkoordinate φ. Π genügt, nach S. 431 derselben Differentialgleichung, wie im Falle der elektrischen Vertikalantenne, nämlich der Gl. (1) in § 1. Aber das Feld $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$ leitet sich aus diesem Π nicht nach der Gl. (18) von S. 429, sondern nach der Gl. (21) von S. 431 ab. An Stelle der Gl. (2) in § 1 erhält man daher jetzt (mit dem Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ und unter der Annahme $\mu = 1$):

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_z = 0, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi = -\dfrac{i\omega}{c}\dfrac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ \mathfrak{H}_r = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial r\, \partial z}, \quad \mathfrak{H}_\varphi = 0, \quad \mathfrak{H}_z = k^2 \Pi + \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Das magnetische Feld liegt also in den Vertikalebenen durch die Rahmenachse, das elektrische Feld verläuft in Kreisen um dieselbe.

Die Grenzbedingungen verlangen, wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{E}_\varphi$ und $\mathfrak{H}_r$, wenn wir wieder die Werte in Luft ($z > 0$) durch den Index 0 auszeichnen und sogleich nach r integrieren:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Pi_0 = \Pi, \\ \dfrac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} \end{cases} \cdots \text{ für } z = 0.$$

Für den primären magnetischen Dipol machen wir denselben Ansatz wie in § 1 für den elektrischen Dipol [Gl. (4a) und (11) daselbst] und stellen die Gesamterregung, primäre + sekundäre, durch die früheren Formeln (12) dar. Die hier eingehenden Funktionen f_0 und f bestimmen sich aber jetzt anders als im elektrischen Falle, wegen der

abgeänderten Grenzbedingungen. Die erste Gl. (2) verlangt nämlich jetzt, an Stelle der früheren Gl. (13):

$$f_0(\lambda) - f(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}};$$

die zweite Gl. (2) liefert, in Übereinstimmung mit der früheren Gl. (13 a):

$$\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, f_0(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - k^2}\, f(\lambda) = 0.$$

Daraus folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} f_0(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + \sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \\ f(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}, \end{cases}$$

und, in formaler Übereinstimmung mit der früheren Gl. (15)

$$(4) \qquad \begin{cases} \Pi_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,J(\lambda r)}{N'} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda\, d\lambda \ldots z > 0, \\ \Pi = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,J(\lambda r)}{N'} e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} \lambda\, d\lambda \ldots z < 0. \end{cases}$$

Der einzige Unterschied besteht in der jetzigen Bedeutung des Nenners N':

$$(4\,a) \qquad N' = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + \sqrt{\lambda^2 - k^2}.$$

Dieser Unterschied hat zunächst zur Folge, daß im Limes $k = \infty$ nicht nur wie früher Π, sondern auch Π_0 verschwindet: durch die in einer vollkommen leitenden Erde induzierten Wirbelströme wird die Fernwirkung der magnetischen Antenne restlos aufgehoben.

Derselbe Unterschied bringt sodann mit sich, daß es jetzt keine Oberflächenwellen gibt. Setzen wir nämlich $N' = 0$, so erhalten wir keine endliche Wurzel für λ. Die magnetische Vertikalantenne sendet nur „Raumwellen“ aus. Auf eine nähere Diskussion derselben können wir verzichten wegen ihrer praktischen Belanglosigkeit.

2. Die elektrische Horizontalantenne. Wir nehmen die Richtung der Antenne zur x-Achse, die Erdoberfläche sei wieder $z = 0$. Am nächsten würde es liegen, mit einem Hertzschen Vektor

$$\Pi = \Pi_x$$

zu rechnen, der dieselbe Richtung hat wie die Antenne. Dies führt aber auf einen Widerspruch. Berechnen wir nämlich das Feld $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$

nach den Gl. (18′) von S. 430, so ergibt sich in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial z}, \quad \mathfrak{H}_z = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial y},$$

$$\mathfrak{E}_x = k^2 \Pi_x + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x^2}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial z}.$$

Die Grenzbedingungen verlangen jetzt die Stetigkeit von $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$. Das sind drei Übergangsbedingungen, während wir zur Festlegung von Π_x nur zwei brauchen können. Aus der Stetigkeit von $\mathfrak{E}_y$ würde folgen, wenn wir nach x und y integrieren und den Wert von Π in Luft ($z > 0$) wieder durch den Index 0 hervorheben: $\Pi_0 = \Pi$. Dann aber würde die Stetigkeit von $\mathfrak{E}_x$ verlangen: $k_0^2 = k^2$, was gegen die Voraussetzung ist.

Wir müssen deshalb unseren Ansatz erweitern, indem wir die horizontale Erregung Π_x mit einer vertikalen Π_z koppeln:

$$\Pi = (\Pi_x, \Pi_z).$$

Physikalisch bedeutet dies, daß der horizontale Strom in der Antenne seine Rückleitung durch Vermittlung von Vertikalströmen im Erdboden findet. Beide Komponenten Π_x und Π_z genügen nach Gl. (19′) von S. 429 derselben Differentialgleichung $\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0$.

Die Gl. (18′) von S. 430 liefern jetzt:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = -\frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_z}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{ic}{\omega} k^2 \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{E}_x = k^2 \Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right), \end{cases}$$

$$(5\,a) \quad \mathfrak{H}_z = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = k^2 \Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right).$$

Die Grenzbedingungen verlangen die Stetigkeit der Komponenten (5) und liefern daher vier Übergangsgleichungen. Gerade so viel Gleichungen sind erforderlich, um die zwei Komponenten Π_x und Π_z des Hertzschen Vektors festzulegen. Die Grenzbedingungen lauten, auf möglichst einfache, integrierte Form gebracht:

$$(6) \quad k_0^2 \Pi_{z0} = k^2 \Pi_z \ \ldots \text{ wegen } \mathfrak{H}_x,$$

$$(7) \quad k_0^2 \frac{\partial \Pi_{x0}}{\partial z} = k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} \ \cdots \text{ wegen } \mathfrak{H}_y \text{ und (6)},$$

$$(8) \quad \frac{\partial \Pi_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{z0}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \ \cdots \text{ wegen } \mathfrak{E}_y,$$

$$(9) \quad k_0^2 \Pi_{x0} = k^2 \Pi_x \ \ldots \text{ wegen } \mathfrak{E}_x \text{ und (8)}.$$

Wir betrachten zunächst die Gl. (7) und (9), welche zur Berechnung von Π_x dienen. Sie sind identisch mit den Gl. (2), wenn man $k_0^2 \Pi_{0x}$ bzw. $k^2 \Pi_x$ mit dem dortigen Π_0 bzw. Π identifiziert. Ein Unterschied besteht darin, daß wir jetzt die primäre Erregung nur bei Π_0, in Luft, nicht bei Π voraussetzen werden[1]). Die analoge Rechnung wie oben liefert daraufhin:

$$(10)\quad \begin{cases} \Pi_{x0} = \int_0^{+\infty} \frac{J(\lambda r)}{N'} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda\, d\lambda \ldots z > 0, \\ \Pi_x = \frac{k_0^2}{k^2} \int_0^{+\infty} \frac{J(\lambda r)}{N'} e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} \lambda\, d\lambda \ldots z < 0, \\ N' = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + \sqrt{\lambda^2 - k^2}. \end{cases}$$

Da Π_x nicht von x und y einzeln, sondern nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt, wird

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial r},$$

wenn wir den Winkel φ wie üblich definieren durch die Gleichungen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Aus der Bedingung (8) folgt hiernach, daß Π_z den Faktor $\cos\varphi$ enthalten muß oder, genauer gesagt, daß Π_z sich aus den Partikularlösungen

$$\cos\varphi\, J'(\lambda r) e^{\mp\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} = -\cos\varphi\, J_1(\lambda r) e^{\mp\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z}$$

aufbauen muß, in analoger Weise wie Π_x aus den Partikularlösungen

$$J_0(\lambda r) e^{\mp\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z}.$$

Dabei bedeutet $J_1 = -J'$ die Besselsche Funktion vom Index 1. Die allgemeine Form dieser Partikularlösungen, die wir hier aber nicht nötig haben werden, ist offenbar in Übereinstimmung mit XIII, § 4, 1, Gl. (3):

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \varphi J_n(\lambda r) e^{\mp\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z}.$$

---

[1]) Wir hätten etwas vorsichtiger so vorgehen können, daß wir die Horizontalantenne zunächst nicht in die Grenzfläche $z = 0$ selbst, sondern in einen endlichen Abstand a davon legten. Dies tut H. v. Hörschelmann in seiner Münchener Dissertation: Über die Wirkungsweise des geknickten Marconischen Senders in der drahtlosen Telegraphie, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 5, 14 und 188, 1911, welche die erste Behandlung der Horizontalantenne und eine volle Diskussion des Problems gibt. Im Limes $a = 0$ würden wir aber von hieraus genau auf die obigen Formeln zurückkommen.

Wir setzen also die z-Komponente unseres Hertzschen Vektors in der Form an (eine primäre Erregung ist hier natürlich nicht vorhanden):

$$(11)\qquad \begin{cases} \Pi_{z0} = \cos\varphi \int_0^{+\infty} F_0(\lambda) J'(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda, \\ \Pi_z = \cos\varphi \int_0^{+\infty} F(\lambda) J'(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda. \end{cases}$$

Durch Eintragen in (6) ergibt sich für die unbekannten Funktionen F_0 und F erstens:

$$(12)\qquad k_0^2 F_0 - k^2 F = 0.$$

Durch Eintragen von (10) und (11) in (8) folgt sodann:

$$(13)\qquad \sqrt{\lambda^2-k_0^2}\, F_0 + \sqrt{\lambda^2-k^2}\, F = \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right) \frac{\lambda}{N'}.$$

Aus (12) und (13) berechnet man

$$(14)\qquad F_0 = (k^2 - k_0^2) \frac{\lambda}{N N'}, \quad F = (k^2 - k_0^2) \frac{k_0^2}{k^2} \frac{\lambda}{N N'}.$$

Hier hat $N = k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, Gl. (15 a). Die Ausdrücke (11) nehmen also die folgende definitive Form an:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Pi_{z0} = (k^2 - k_0^2) \cos\varphi \int_0^{+\infty} \frac{J'(\lambda r)}{N N'} e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\, z}\, \lambda^2\, d\lambda, \\ \Pi_z = (k^2 - k_0^2) \frac{k_0^2}{k^2} \cos\varphi \int_0^{+\infty} \frac{J'(\lambda r)}{N N'} e^{+\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z}\, \lambda^2\, d\lambda. \end{cases}$$

Für J' können wir nach S. 549 auch $\frac{1}{2} H'$ schreiben, wo H' den Differentialquotienten der ersten Hankelschen Funktion vom Index 0 nach dem Argument bedeutet, ebenso für J in Gl. (10) $\frac{1}{2} H$, sofern wir beidemal die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken.

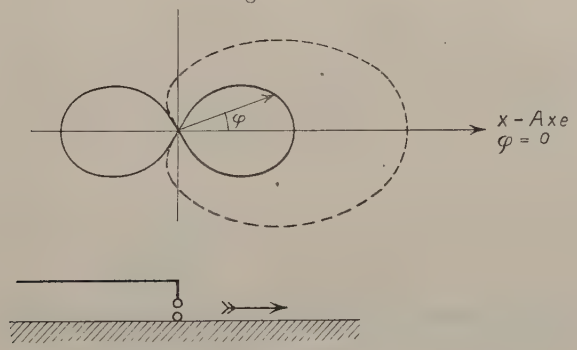
Zur Diskussion der Ausdrücke (10) und (15) übergehend, bemerken wir zunächst: Die Ausdrücke (10) liefern keine Oberflächenwellen, ebensowenig wie die analogen Ausdrücke (4) bei der magnetischen Vertikalantenne. Wohl aber liefern die Ausdrücke (15) Oberflächenwellen: durch Nullsetzen des Nenners N entsteht, genau so wie in § 1, der Pol $\lambda = h$, aus dessen Residuum die Oberflächenwellen entstanden. Geschwindigkeit und Form dieser Wellen sind dieselben wie in § 1, nur die Amplitude ist von der früheren verschieden.

Mit dem Fehlen bzw. Auftreten von Oberflächenwellen hängt es zusammen, daß die x-Komponente von Π, zumal in größeren Entfernungen vom Sender, klein wird gegen die z-Komponente (vgl. unten

S. 571). Bei der weiteren Diskussion brauchen wir auf erstere keine Rücksicht zu nehmen. Dies ist sehr merkwürdig, da die primäre Erregung bei unserer Horizontalantenne in der x-Richtung lag. Die primäre Erregung dient hier gewissermaßen nur dazu, die z-Komponente von Π hervorzurufen. Die Fernübertragung der Welle wird dann von letzterer bewirkt.

Für diese Fernübertragung ist vor allem die Richtwirkung charakteristisch, die durch den Faktor $\cos\varphi$ in (15) bedingt wird. Derselbe Faktor multipliziert auch die für die Ausstrahlung maßgebenden elektrischen und magnetischen Feldkomponenten und tritt daher in der ausgestrahlten Energie quadratisch auf. Letztere wird

Fig. 60.



für irgend eine Entfernung r als Funktion von φ durch das symmetrische Polardiagramm der Fig. 60 gegeben ($\cos^2\varphi$ als Radiusvektor aufgetragen; wegen der punktierten Kurve siehe unten). Dasselbe ist identisch mit dem symmetrischen Ausstrahlungsdiagramm in Fig. 35, mit dem Unterschied, daß jetzt das Maximum in Richtung der Horizontalantenne, also scheinbar longitudinal liegt, während die longitudinale Ausstrahlung in Fig. 35 Null war. Der Grund ist natürlich der, daß es gar nicht die Horizontalantenne, d. h. die Komponente Π_x ist, die ausstrahlt, sondern die induzierten Vertikalströme, d. h. die Komponente Π_z.

Kombiniert man die Horizontalantenne kohärent mit einer Vertikalantenne, wie im geknickten Marconisender, unterer Teil der Fig. 60, so addiert sich das Π_z der Vertikalantenne algebraisch zu dem Π_z der Horizontalantenne. Dadurch wird die Wirkung für $\varphi = 0$ verstärkt, für $\varphi = \pi$ geschwächt. Die punktierte Kurve im oberen Teil der Fig. 60 stellt den Sonderfall dar, wo beide Π_z gleich groß sind. Dann haben wir keine Ausstrahlung für $\varphi = \pi$, verdoppelte Amplituden für $\varphi = 0$, also eine ausgesprochen einseitige Richtwirkung.

Eine schräge Antenne kann man, je nach ihrer Neigung, auflösen in Dipole von horizontaler und vertikaler Achse, deren Wirkungen sich einfach überlagern. Da aber in größerer Entfernung die Wirkung der horizontalen Anregung doch wieder auf die Wirkung von Vertikalantennen hinausläuft, wird die Superposition beider Bestandteile — bis auf die Richtwirkung — dem Felde von einfachen Vertikalantennen entsprechen, mit im wesentlichen senkrecht zum Erdboden gerichteten Kraftlinien.

Zur näheren Diskussion der Ausdrücke (15) für kleine „numerische“ (aber große absolute) Entfernungen verfahren wir nach § 1, 7. Wir vernachlässigen also k_0 und λ neben dem großen k und setzen, wie in (32), § 1:

$$N = k^2\left(\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a\right), \quad a = \frac{i k_0^2}{k}. \tag{16}$$

Das entsprechende Verfahren, auf N' angewandt, liefert:

$$N' = -ik. \tag{16 a}$$

Aus dem ersten Ausdruck (15) wird dann (der zweite interessiert uns nicht)

$$\Pi_{z\,0} = i\,\frac{k^2 - k_0^2}{k^3}\cos\varphi \int_0^{+\infty} \frac{J'(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a}\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z}\, \lambda^2\, d\lambda.$$

Vergleichen wir ihn mit dem Ausdruck (33) in § 1 für den Hertzschen Vektor Π_0 der Vertikalantenne, so sehen wir sofort:

$$\Pi_{z\,0} = C\cos\varphi\,\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}. \tag{17}$$

Hier hat C bei konsequenter Vernachlässigung von k_0 gegen k den Wert

$$C = \frac{i}{2k}. \tag{17 a}$$

Der Zusammenhang (17) zwischen Horizontal- und Vertikalantenne ist sehr lehrreich: Er zeigt, daß die Fernwirkung Π_{0z} der Horizontalantenne aufgefaßt werden kann als das Zusammenwirken zweier Vertikalantennen, im Sinne der Fig. 61. Der hier gezeichnete „Antennendipol“, bestehend aus den Vertikalströmen zum und vom Erdboden, wirkt nach außen in der Richtung der Horizontalantenne nach der Formel

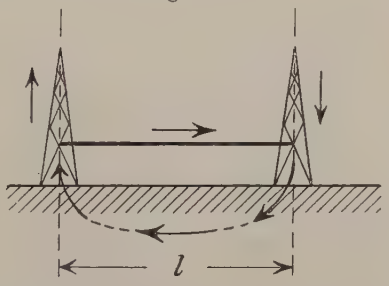
$$l\,\frac{\partial \Pi_0}{\partial r},$$

wo l der effektive Abstand der beiden Vertikalströme und Π_0 die Wirkung der einzelnen Vertikalantenne nach Gl. (33) in § 1 ist. Für die Ausstrahlung unter dem Winkel φ ist der effektive Abstand l ersichtlich zu ersetzen durch $l\cos\varphi$. Dadurch erklärt sich die Richt-

wirkung der Horizontalantenne, insbesondere die Ausstrahlung 0 für $\varphi = \pi/2$. Der Amplitudenfaktor C, Gl. (17 a), zeigt überdies, daß die endliche Leitfähigkeit am Standort der Horizontalantenne eine notwendige Vorbedingung des ganzen Vorganges ist (Hörschelmann): für $k = \infty$ wird $C = 0$.

Eine entsprechende Richtwirkung, wie sie die Horizontalantenne spontan erzeugt, wird man zu erwarten haben von zwei Vertikalantenen, die kohärent, aber mit entgegengesetzter Phase gespeist werden. In Fig. 61 sind solche Mastantennen, im Abstand l voneinander, vergleichsweise eingezeichnet. In der Tat hat F. Braun in früheren Stadien der drahtlosen Telegraphie Versuche mit solchen Doppelantennen gemacht und die erwartete Richtwirkung erhalten, die sich hier offenbar (vermöge der Formel $l \cos \varphi$) elementar begründen läßt.

Fig. 61.



Ein wesentlicher Punkt in unserer Darstellung war die Annahme, daß wir die Komponente Π_x gegen Π_z vernachlässigen durften. Wir wollen dies nachträglich begründen. — Verfahren wir mit Π_{x_0}, Gl. (10), ebenso wie mit Π_{z_0}, ersetzen also N' durch (16 a) und benutzen die Konstante C aus (17 a), so ergibt sich

$$\Pi_{x\,0} = 2C \int_0^{+\infty} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} \lambda \, d\lambda.$$

Vergleichen wir dies mit (11) in § 1, so sehen wir sofort, daß wir schreiben können:

$$(18) \qquad \Pi_{x\,0} = -2C \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_0 R}}{R} \simeq -2iCk_0 \frac{z}{R} \frac{e^{ik_0 R}}{R}.$$

Setzen wir andererseits in (17) den Wert von Π_0 aus § 1 ein, wobei wir nur die erste Näherung, Gl. (39) von S. 560, hinschreiben wollen, so ergibt sich

$$(19) \qquad \Pi_{z\,0} = 2C \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ik_0 R}}{R} + \cdots \right) = 2iCk_0 \cos\varphi \frac{r}{R} \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \cdots$$

Die Ausdrücke (18) und (19) unterscheiden sich im wesentlichen nur durch die Faktoren r/R und z/R. Nun ist $r/R \sim 1$, dagegen z/R in der Nähe der Erdoberfläche sehr klein. Es wird also wirklich

$$|\Pi_{0x}| \ll |\Pi_{0z}|,$$

was zu beweisen war.

Die Beschaffenheit des elektromagnetischen Feldes ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$) der Horizontalantenne ist nunmehr durch die Gl. (5) und (5 a) vollkommen bestimmt. Doch dürfen wir auf die nähere Ausrechnung verzichten, um so mehr, als dieses Feld im wesentlichen übereinstimmt mit dem Felde der vertikalen Doppelantenne aus Fig. 61, welches sich elementar übersehen läßt.

3. Die magnetische Horizontalantenne (Rahmenantenne von vertikaler Ebene). Wir legen den primären magnetischen Dipol in die y-Achse, also den Rahmen in die xz-Ebene. Wir haben auf diese Weise analoge Verhältnisse wie bei der elektrischen Horizontalantenne nach Fig. 60. Denken wir uns nämlich den Rahmen rechteckig, so entsprechen die horizontalen Seiten des Rahmens dem Strom in der elektrischen Horizontalantenne und dem Gegenstrom in Erde, die vertikalen Seiten dem Strom zum und vom Erdboden der Fig. 60.

Zur Berechnung des Feldes gehen wir, ebenso wie in Nr. 1 dieses Paragraphen, von den Gl. (21) von S. 431 aus. Versuchen wir es zunächst mit dem Ansatz

(20) $\Pi = \Pi_y$ (reiner magnetischer Dipol in der y-Richtung),

so werden wir auf ähnliche Widersprüche geführt, wie zu Beginn von Nr. 2 dieses Paragraphen. Deshalb erweitern wir den Ansatz zu

(21) $$\Pi = (\Pi_y, \Pi_z).$$

Mit $\mu = 1$ und harmonischer Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ folgt dann aus den genannten Gl. (21):

(22)
$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = \dfrac{i\omega}{c}\left(\dfrac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \Pi_y}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{E}_y = \dfrac{-i\omega}{c}\dfrac{\partial \Pi_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{H}_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{H}_y = k^2 \Pi_y + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right), \end{cases}$$

(22 a) $$\mathfrak{E}_z = \frac{i\omega}{c}\frac{\partial \Pi_y}{\partial x}, \quad \mathfrak{H}_z = k^2 \Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right).$$

Die Grenzbedingungen verlangen, daß die Komponenten (22) sich stetig verhalten beim Übergang von Luft (Index 0) zu Erde. Daraus folgt, falls man sogleich nach x und y integriert:

(23) $$\Pi_{z0} = \Pi_z \ldots \text{ aus } \mathfrak{E}_y,$$

(24) $$\frac{\partial \Pi_{y0}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \cdots \text{ aus } \mathfrak{E}_x \text{ und (23)},$$

(25) $$\frac{\partial \Pi_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{z0}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \cdots \text{ aus } \mathfrak{H}_x,$$

(26) $$k_0^2 \Pi_{y0} = k^2 \Pi_y \ldots \text{ aus } \mathfrak{H}_y \text{ und (25)}.$$

Hier enthalten die Bedingungen (24) und (26) Π_y, Π_{y0} allein; sie bestimmen zusammen mit der Differentialgleichung $\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$ und den Bedingungen im Unendlichen und im Nullpunkt diese beiden Funktionen eindeutig, und zwar sind sie genau dieselben, wie diejenigen für die elektrische Vertikalantenne in § 1. Wir entnehmen daher aus den Gl. (15) daselbst:

$$(27)\qquad \begin{cases} \Pi_{y0} = \int_0^{+\infty} \dfrac{2k^2}{N} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda, \\ \Pi_y = \int_0^{+\infty} \dfrac{2k_0^2}{N} J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda, \\ N = k^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2} + k_0^2\sqrt{\lambda^2-k^2}. \end{cases}$$

Da hiernach Π_y nur von r, nicht von x und y einzeln abhängt, wird mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\frac{\partial \Pi_y}{\partial y} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi\, \frac{\partial \Pi_y}{\partial r}.$$

Nach (25) muß also auch Π_z den Faktor $\sin\varphi$ enthalten. Wir haben daher Π_z aus den Partikularlösungen (vgl. S. 567)

$$\sin\varphi\, J'(\lambda r)\, e^{\mp\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z}$$

aufzubauen und schreiben:

$$(28)\qquad \begin{cases} \Pi_{z0} = \sin\varphi \int_0^{+\infty} F_0(\lambda) J'(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda, \\ \Pi_z = \sin\varphi \int_0^{+\infty} F(\lambda) J'(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda. \end{cases}$$

Tragen wir diesen Ansatz in (23) ein, so ergibt sich erstens

$$F_0(\lambda) = F(\lambda).$$

Gehen wir hiermit und mit den Ausdrücken (27) in (25) ein, so folgt zweitens:

$$\left(\sqrt{\lambda^2-k_0^2} + \sqrt{\lambda^2-k^2}\right) F(\lambda) = 2\,\frac{k^2-k_0^2}{N}\,\lambda.$$

Die Gl. (28) lauten also definitiv

$$(29)\qquad \begin{cases} \Pi_{z0} = 2\sin\varphi\,(k^2-k_0^2) \int_0^{+\infty} \dfrac{J'(\lambda r)}{N N'}\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\, z}\, \lambda^2\, d\lambda, \\ \Pi_z = 2\sin\varphi\,(k^2-k_0^2) \int_0^{+\infty} \dfrac{J'(\lambda r)}{N N'}\, e^{+\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z}\, \lambda^2\, d\lambda, \\ N' = \sqrt{\lambda^2-k_0^2} + \sqrt{\lambda^2-k^2}. \end{cases}$$

Jetzt haben beide Komponenten Π_y und Π_z (im Gegensatz zu der vorigen Nummer) den Faktor N; beide geben also Anlaß zu Oberflächenwellen. Trotzdem besteht auch hier ein Unterschied in der Größenordnung, so daß wieder nur eine Komponente, und zwar hier Π_y, maßgebend sein wird.

Da (27) identisch ist mit (15) in § 1, so entnehmen wir der Näherungsgleichung (37) daselbst

$$\Pi_{y0} = \frac{2\,e^{ik_0R}}{R}\,(1 - \cdots), \tag{30}$$

indem wir die numerische Entfernung ϱ gegen 1 vernachlässigen. Andererseits ergibt (29) mit den Näherungen von S. 570 ($N' \cong -ik$):

$$\Pi_{z0} = 2i \sin\varphi\,\frac{k^2 - k_0^2}{k}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{+\infty}\frac{J(\lambda r)}{N}\,e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\,z}\,\lambda\,d\lambda.$$

Dies ist nach den Gl. (15) und (37) in § 1 näherungsweise gleichbedeutend mit

$$\Pi_{z0} = 2i \sin\varphi\,\frac{k^2 - k_0^2}{k^3}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{e^{ik_0R}}{R}\,(1 - \cdots)\right\}, \tag{31}$$

$$\cong -2 \sin\varphi\,\frac{k_0}{k}\,\frac{k^2 - k_0^2}{k^2}\,\frac{r}{R}\,\frac{e^{ik_0R}}{R}\,(1 - \cdots).$$

Während die übrigen Faktoren, welche hier gegenüber (30) hinzugetreten sind, die Größenordnung 1 haben [nämlich r/R und $(k^2 - k_0^2)/k^2$], ist der Faktor k_0/k sehr klein gegen 1. Wir haben also

$$|\Pi_{z0}| \ll |\Pi_{y0}|$$

und brauchen uns weiterhin nur mit Π_{y0} zu beschäftigen, wofür wir (bei Unterdrückung des nunmehr unwesentlichen Faktors 2) kurz Π schreiben werden.

Aus diesem Π leitet sich das Feld in Luft nach den entsprechend spezialisierten Formeln (22) und (22 a) ab. Wir beschränken uns sogleich auf die Nähe der Erdoberfläche $z \ll R$, $r \simeq R$ und erhalten:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = -ik_0\,\dfrac{\partial}{\partial z}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong k_0^2\,\dfrac{z}{R}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong 0, \\ \mathfrak{E}_y = 0, \\ \mathfrak{E}_z = +ik_0\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong -k_0^2\,\dfrac{x}{R}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong -k_0^2 \cos\varphi\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}. \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong -k_0^2\,\dfrac{xy}{R^2}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong -k_0^2 \cos\varphi \sin\varphi\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}, \\ \mathfrak{H}_y = \left(k_0^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong +k_0^2\,\dfrac{x^2 + z^2}{R^2}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong k_0^2 \cos^2\varphi\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}, \\ \mathfrak{H}_z = \dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong -k_0^2\,\dfrac{yz}{R^2}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R} \cong 0. \end{cases} \tag{33}$$

Wir haben also im wesentlichen ein zur Erdoberfläche senkrechtes elektrisches Feld mit Richteffekt wie bei der Horizontalantenne und eine im wesentlichen azimutal verlaufende magnetische Feldstärke, ebenfalls mit Richteffekt und numerisch gleich der elektrischen. In der Tat folgt aus den Werten (33) für $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$

$$\mathfrak{H}_\varphi = -\mathfrak{H}_x \sin\varphi + \mathfrak{H}_y \cos\varphi = k_0^2 \cos\varphi \frac{e^{ik_0 R}}{R},$$

$$\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_x \cos\varphi + \mathfrak{H}_y \sin\varphi = 0.$$

Aus $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ ergibt sich ein Energiestrom

$$\mathfrak{S}_r = c\,\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_\varphi$$

proportional $\cos^2\varphi$, also von der in Fig. 60 gezeichneten Verteilung. Hätten wir bei der Horizontalantenne die Feldberechnung in derselben Näherung wie hier durchgeführt, so hätten wir dort für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ (abgesehen von der multiplikativen Constanten C) dieselben Formeln (32) und (33) gefunden.

Eine genauere Berechnung der Felder bei der elektrischen und magnetischen Horizontalantenne sowie eine Abschätzung ihrer Wirkungsgrade findet man in den Ann. d. Phys. **81**, 1135, 1926.

§ 3. Das Reziprozitätstheorem der drahtlosen Telegraphie.

Reziprozitätssätze sind wohlbekannt aus der Potentialtheorie (Satz über die Vertauschung von Quellpunkt und Aufpunkt in der Greenschen Funktion, vgl. 1. Bd., XIII, § 3, wo der Satz für beliebige selbstadjungierte Differentialgleichungen vom elliptischen Typus bewiesen ist), ferner aus der Akustik (Helmholtz' Theorie der offenen und gedeckten Pfeifen) und aus der technischen Elastizitätstheorie (Maxwells Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen in einem Fachwerk). In der Optik kennt man den Helmholtzschen Satz von der Umkehrbarkeit der Lichtwege.

Für die drahtlose Telegraphie gilt der folgende Reziprozitätssatz: Eine Antenne A_1 sende im Punkt O_1 und werde im Punkt O_2 von der beliebig gerichteten Antenne A_2 empfangen. Andererseits sende A_2 mit derselben Frequenz und Energie wie vorher A_1 und werde von A_1 empfangen. Dann ist die empfangene Feldstärke in A_1 dieselbe wie vorher die in A_2, und zwar unabhängig davon, wie das Zwischenmedium elektromagnetisch beschaffen ist (Wasser oder Land oder Wechsel von beiden, geschichtete oder irgendwie sonst inhomogene Atmosphäre, mehr oder weniger ionisiert usw.) und wie die Antennen geformt sind. Beim

Beweise folgen wir einer älteren Arbeit von H. A. Lorentz[1]) über elektromagnetische Schwingungen, welche allerdings auf die besonderen Fragen der drahtlosen Telegraphie naturgemäß noch nicht eingeht.

1. Allgemeine Grundlegung nach H. A. Lorentz. Das elektromagnetische Feld des ersten Vorganges (Sender A_1) sei durch die Gl. (1), das des zweiten Vorganges (Sender A_2) durch die Gl. (2) gegeben. $\mathfrak{E}$ sei der Gesamtstrom, also die Summe von Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$. Bezeichnungen und Einheiten sind dieselben wie in der Gl. (I) und (II) von S. 391.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}_1 = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}_1 & +\mathfrak{H}_2, \\ \mathfrak{E}_1 = +c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}_1 & -\mathfrak{E}_2; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}_2 = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}_2 & -\mathfrak{H}_1, \\ \mathfrak{E}_2 = +c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}_2 & +\mathfrak{E}_1. \end{cases}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen skalar mit den rechts daneben geschriebenen Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$, ähnlich, wie es bei der Ableitung des Poyntingschen Energiesatzes (S. 393) üblich ist, benutzen dazu aber nicht die Vektoren des gleichen, sondern die des anderen Vorganges mit kreuzweise umgekehrten Vorzeichen. Indem wir die so erhaltenen Resultate addieren, schreiben wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{H}_2\dot{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{H}_1\dot{\mathfrak{B}}_2) + (\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2) - (\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_1) \\ = c\{(\mathfrak{H}_1\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}_2) - (\mathfrak{H}_2\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}_1) + (\mathfrak{E}_1\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}_2) - (\mathfrak{E}_2\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}_1)\}. \end{cases}$$

Diese Folgerung gilt, ebenso wie die Grundgleichungen (1) und (2), im ganzen unendlichen Raume, unabhängig von etwa vorhandenen Diskontinuitäten und Inhomogenitäten der elektromagnetischen Materialkonstanten, also auch in den Trennungsflächen von Erde—Luft, Erde—Wasser usw. Man leitet ja die an solchen Flächen geltenden Grenzbedingungen gerade daraus ab, daß man (unter Annahme stetiger Übergangsschichten) die Grundgleichungen als ausnahmslos gültig postuliert. Auszuschließen sind bei der Anwendung der Gl. (3) (vgl. den Schluß dieser Nummer) nur die Quellen (Antennen) selbst, insofern wir in ihnen zur schematischen Vereinfachung der Rechnung den Feldvektoren unendlich große Werte beilegen.

Die rechte Seite von (3) formen wir um nach dem Vektorsatz [1. Bd., S. 69, Gl. (26)]

$$\mathrm{div}\,[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}) - (\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}).$$

---

[1]) Amsterdamer Akademie van Wetenschappen **4**, 176, 1895—1896. Vgl. auch H. Pfrang, Diss. München 1925 (nicht gedruckt) und A. Sommerfeld, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie **26**, 93, 1925. Mehrere damit zusammenhängende Arbeiten von W. Schottky behandeln das „Gesetz des Tiefempfanges", vgl. Preuß. Akad. d. Wiss. Jahrg. 1926, S. 116; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **27**, 131, 1926.

Dadurch entsteht aus (3)

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{1}{c}\{(\mathfrak{H}_2\dot{\mathfrak{B}}_1)-(\mathfrak{H}_1\dot{\mathfrak{B}}_2)+(\mathfrak{E}_1\mathfrak{C}_2)-(\mathfrak{E}_2\mathfrak{C}_1)\} \\ \qquad = \operatorname{div}(\mathfrak{E}_2\times\mathfrak{H}_1)-\operatorname{div}(\mathfrak{E}_1\times\mathfrak{H}_2). \end{cases}$$

Wir setzen jetzt voraus, daß beide Vorgänge aus monochromatischen Schwingungen der gleichen Frequenz ω bestehen und stellen sie dar (vgl. S. 395) durch

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_{1,2} = e^{-i\omega t}H_{1,2}, & \mathfrak{E}_{1,2} = e^{-i\omega t}E_{1,2}, \\ \mathfrak{B}_{1,2} = e^{-i\omega t}B_{1,2}, & \mathfrak{C}_{1,2} = e^{-i\omega t}C_{1,2}. \end{cases}$$

Diese komplexen Ausdrücke genügen den Grundgleichungen ebenso wie ihre reellen Teile, die Feldvektoren. Deshalb bleibt auch Gl. (4) richtig, wenn man in ihr statt der Feldvektoren die Größen (5) einsetzt. Während ein solches Verfahren bekanntlich unzulässig wäre, wenn man Aufschluß über Energie oder Energiefluß der wirklichen physikalischen Vorgänge erhalten will, die bekanntlich mit den reellen Feldvektoren, nicht mit ihren komplexen Ausdrücken zu bilden sind (vgl. S. 397, letzten Absatz), ist das Verfahren gerechtfertigt, wenn es sich wie hier um analytische Beziehungen zwischen den komplexen durch (5) definierten Vektoren H, E, B, C handelt.

Wir setzen ferner voraus, daß zwischen den Feldvektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ die üblichen[1]) linearen Beziehungen bestehen, Gl. (V) von S. 392, in denen ε, μ und σ von Ort zu Ort veränderlich gedacht werden können. Diese Beziehungen übertragen sich auf die komplexen Ausdrücke (5) und ergeben für letztere

$$(6)\qquad \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}_{1,2} = -i\omega\mu H_{1,2}e^{-i\omega t}, \\ \mathfrak{C}_{1,2} = (\sigma - i\omega\varepsilon)E_{1,2}e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

Setzen wir nun (6) in (4) ein, so heben sich die beiden ersten und die beiden letzten Terme der linken Seite gegenseitig auf und wir erhalten unter Forthebung des gemeinsamen Faktors

$$e^{-2i\omega t}$$

die Gleichung

$$(7)\qquad \operatorname{div}(E_2\times H_1) = \operatorname{div}(E_1\times H_2).$$

Diese Gleichung gilt überall da, wo die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ stetig definiert sind, derart, daß die Divergenzoperation gebildet werden kann. Da wir die Antennen A_1, A_2 in der Folge als einfache Dipole idealisieren werden, also am Orte O_1, O_2 der Antennen das Feld unendlich groß rechnen werden, müssen wir die Punkte O_1, O_2 ausschließen. Wir

[1]) Der Fall der Ionenleitung, der für die Verhältnisse in der Atmosphäre wichtig ist, wird neben der metallischen Leitung in der oben zitierten Arbeit von A. Sommerfeld, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **26**, besprochen.

schlagen daher um diese Punkte zwei Kugeln mit den Oberflächen K_1, K_2. Ferner grenzen wir das Unendlichferne durch eine Kugel K ab. Über den ganzen übrigen Raum integrieren wir Gl. (7) und wenden den Gaußschen Satz an. Dieser gibt, da die Oberflächenintegrale über K im Limes beiderseits verschwinden,

$$(8) \qquad \int\limits_{K_1 + K_2} (E_2 \times H_1)_n \, d\sigma = \int\limits_{K_2 + K_1} (E_1 \times H_2)_n \, d\sigma.$$

2. Zwei elektrische Linearantennen. Indem wir beide Antennen, gleichviel wie sie im einzelnen konstruiert sein mögen, je durch einen elektrischen Dipol darstellen, sprechen wir von der Achse A des Dipols (Haupterstreckung der Antenne = Richtung des auf große Entfernungen wirksamen Stromes) und machen diese zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ursprung mit dem Ort O des Dipols zusammenfällt. Die beiden Achsen A_1, A_2 an den Örtern O_1, O_2 der beiden Antennen (d. h. die z-Achse der für die Umgebung derselben zu benutzenden Koordinatensysteme) sind beliebig gegeneinander gerichtet.

Das Feld jedes der beiden Dipole stellen wir dar durch den Hertzschen Vektor:

$$(9) \qquad \begin{cases} 4\pi \Pi = 4\pi \Pi_z = M \dfrac{e^{ikR}}{R}, \\ k^2 = \dfrac{\varepsilon \mu \omega^2 + i \sigma \mu \omega}{c^2}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

M bedeutet das Moment des Dipols (Ladung × Amplitude der Ausschwingung). Natürlich gelten diese Formeln nur in der unmittelbaren Umgebung des felderzeugenden Dipols, wo die „primäre“ Wirkung der Quelle überwiegt gegenüber den „sekundären“ (reflektierten, gebeugten usw.) Wirkungen, die durch Inhomogenitäten der weiteren Umgebung hervorgerufen sein mögen.

Wir bilden nun die beiden auf der linken bzw. rechten Seite von (8) vorkommenden Integrale:

$$(10) \qquad \begin{cases} J_{11} = \int\limits_{K_1} (E_2 \times H_1)_n \, d\sigma, \quad J_{12} = \int\limits_{K_2} (E_2 \times H_1)_n \, d\sigma, \\ J_{21} = \int\limits_{K_1} (E_1 \times H_2)_n \, d\sigma, \quad J_{22} = \int\limits_{K_2} (E_1 \times H_2)_n \, d\sigma. \end{cases}$$

Alle vier Integrale J bedeuten sozusagen „wechselseitige Energieflüsse“ durch die Kugeln K_1 oder K_2, wie sie auftreten würden, wenn beide Felder superponiert vorhanden wären, aber nicht berechnet mit den reellen Feldkomponenten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, sondern mit ihren komplexen Bestandteilen E, H.

Indem wir H_1 in J_{11} nach (18) (S. 429) ausdrücken, schreiben wir (a_1 ist der Wert der Materialkonstante $\frac{\varepsilon\omega + i\sigma}{c}$ in der Umgebung von O_1)

$$J_{11} = -ia_1 \int_{K_1} (E_2 \times \operatorname{rot} \Pi)_n \, d\sigma$$

$$= -ia_1 \int_{K_1} \left\{ \frac{x}{R} (E_2 \times \operatorname{rot} \Pi)_x + \frac{y}{R} (E_2 \times \operatorname{rot} \Pi)_y + \frac{z}{R} (E_2 \times \operatorname{rot} \Pi)_z \right\} d\sigma.$$

Für $\operatorname{rot} \Pi$ tragen wir die Werte (9a) von S. 424 ein und erhalten

$$J_1 = -ia_1 \int_{K_1} \left\{ \frac{x^2 + y^2}{R^2} E_{2z} - \frac{xz}{R^2} E_{2x} - \frac{yz}{R^2} E_{2y} \right\} \Pi' \, d\sigma.$$

Für die Integration über die Kugelfläche K_1 ist R^2 und Π' konstant; auch der hier stetig verlaufende Vektor E_2 kann näherungsweise als konstant angesehen werden; ferner gilt

$$(11) \qquad \begin{cases} \int xz \, d\sigma = \int yz \, d\sigma = \int xy \, d\sigma = 0, \\ \int x^2 \, d\sigma = \int y^2 \, d\sigma = \int z^2 \, d\sigma = \frac{4\pi}{3} R^4, \\ \int x \, d\sigma = \cdots \int x^3 \, d\sigma = \int xy^2 \, d\sigma = \cdots = 0. \end{cases}$$

Somit wird

$$J_{11} = -\frac{8\pi i a_1}{3} R^2 \Pi' E_{2z},$$

und da nach der Bedeutung von Π' in Gl. (9) von S. 424

$$\lim_{R=0} R^2 \Pi' = -M_1/4\pi,$$

wo M_1 das Moment des Dipols in O_1 ist, so wird schließlich

$$(12) \qquad J_{11} = \frac{2}{3} i a_1 M_1 E_{2z}.$$

Bei der Bildung von J_{12} haben wir E_2 durch Gl. (18) von S. 429 auszudrücken und H_1 als näherungsweise konstant zu behandeln. Wir erhalten:

$$J_{12} = \int_{K_2} [(\operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi) \times H_1]_n \, d\sigma$$

$$= \int_{K_2} \left\{ \frac{x}{R} [\quad]_x + \frac{y}{R} [\quad]_y + \frac{z}{R} [\quad]_z \right\} d\sigma.$$

Nun enthalten die Ausdrücke für die x-y-z-Komponenten des Vektors $(\operatorname{grad} \operatorname{div} + k^2)\Pi$ sämtlich gerade, nämlich zweite oder nullte Potenzen

der Koordinaten x, y, z. Dasselbe gilt von den Komponenten unseres Vektorprodukts. Also enthalten alle Terme unter dem Integralzeichen ungerade Potenzen der Koordinaten, abgesehen von Faktoren, die auf der ganzen Kugelfläche K_2 konstant sind. Alle ungeraden Potenzen geben aber nach der letzten Zeile von (11) bei der Integration Null. Wir haben also

(13) $$J_{12} = 0.$$

Indem wir uns zur rechten Seite von Gl. (8) wenden, brauchen wir nur die Indizes 1 und 2 durchweg zu vertauschen. Es ergibt sich aus (12) und (13)

$$J_{21} = \int_{K_1} (E_1 \times H_2)_n \, d\sigma = 0,$$

$$J_{22} = \int_{K_2} (E_1 \times H_2)_n \, d\sigma = \frac{2}{3} i a_2 M_2 E_{1z}.$$

Somit gilt nach Gl. (8)

(14) $$a_1 M_1 E_{2z} = a_2 M_2 E_{1z}.$$

Wir haben zunächst zu entscheiden, wie wir die beiden Dipolmomente M_1, M_2 wählen müssen, damit sie gleicher Energieausstrahlung der beiden Antennen A_1, A_2 entsprechen.

Dabei können wir uns auf Formel (17) von S. 428 stützen. In dieser bedeutete a die Schwingungsamplitude, also ea das Dipolmoment M. Dementsprechend schreibt sich die genannte Gleichung:

$$\bar{S} = \frac{M^2 \omega^4}{12 \pi c^3}.$$

Sie ist für das Normalmedium ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$) abgeleitet. Ihre Erweiterung für ein beliebiges elektromagnetisches Medium ergibt:

(15) $$\bar{S} = \frac{\varepsilon M^2 \omega^4}{12 \pi V^3}, \qquad V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Sollen also beide Antennen mit der gleichen Energie senden, so müssen die korrespondierenden Dipolmomente nach (14) und (15) in dem Verhältnis stehen:

(16) $$\frac{\varepsilon_1 M_1^2}{V_1^3} = \frac{\varepsilon_2 M_2^2}{V_2^3}.$$

Befinden sich beide Antennen in dem Normalmedium, so wird natürlich $M_1 = M_2$. Gl. (14) liefert dann einfach:

(17) $$E_{2z} = E_{1z}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$E_2\begin{pmatrix}\text{im Punkte } O_1\\ \text{in Richtung } A_1\end{pmatrix} = E_1\begin{pmatrix}\text{im Punkte } O_2\\ \text{in Richtung } A_2\end{pmatrix}.$$

Die von der Antenne A_1 aus dem Felde E_2 empfangene Feldstärke ist nach Amplitude und Phase gleich der von der Antenne A_2 aus dem Felde E_1 empfangenen.

Allgemeiner ergibt sich, wenn die elektromagnetischen Materialkonstanten in der Umgebung von O_1 und O_2 verschieden sind, aus (14) und (16):

$$\left(\varepsilon_1 + \frac{i\sigma_1}{\omega}\right)\frac{V_1^{3/2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} E_{2z} = \left(\varepsilon_2 + \frac{i\sigma_2}{\omega}\right)\frac{V_2^{3/2}}{\sqrt{\varepsilon_2}} E_{1z}. \tag{18}$$

Amplituden und Phasen der in den beiden Fällen empfangenen Feldstärken stehen alsdann in einem festen Verhältnis, welches durch die Materialkonstanten in der unmittelbaren Umgebung von Sender und Empfänger gegeben ist.

3. Zwei magnetische Antennen oder eine elektrische und eine magnetische Antenne. Es befinde sich jetzt in O_1 und O_2 je ein magnetischer Dipol von den Achsen A_1, A_2, also je eine Rahmenantenne, deren Ebene senkrecht steht zu A_1 bzw. A_2. Diese beiden Achsen, die wieder beliebig gegeneinander gerichtet sein können, machen wir zur z-Achse, die Örter O_1, O_2 der Antennen zum Ursprung je eines rechtwinkligen Koordinatensystems. In der unmittelbaren Umgebung von O_1, O_2 ist das Feld jedes der beiden Dipole gegeben durch die Gl. (9). Die Feldstärken E, H werden daraus gewonnen mittels der Gl. (21) von S. 431. Tragen wir die so entstehenden Ausdrücke in die Gl. (10) für $J_{11}, J_{12}, \ldots$ ein, so werden jetzt J_{11} und J_{22} verschwinden, da bei Einsetzen von H_1 und H_2 aus der genannten Gl. (21) nur ungerade Potenzen von x, y, z unter dem Integralzeichen vorkommen. Dagegen erhält man jetzt, wenn a_1 und a_2 die Werte der Materialkonstante $\mu\omega/c$ am Orte O_1 bzw. O_2 bedeuten:

$$J_{12} = -ia_2 \int_{K_2} (H_1 \times \operatorname{rot} \Pi)_n \, d\sigma, \quad J_{21} = -ia_1 \int_{K_1} (H_2 \times \operatorname{rot} \Pi)_n \, d\sigma.$$

Diese Integrale haben dieselbe Form wie das in der vorigen Nummer berechnete Integral J_{11}, nur daß H_1, H_2 an Stelle von E_2 steht. Man liest daher aus (12) ab

$$J_{12} = \frac{2}{3} i a_2 M_2 H_{1z}, \quad J_{21} = \frac{2}{3} i a_1 M_1 H_{2z}.$$

Gl. (8) sagt also aus, wenn man M und $a = \mu\omega/c$ beiderseits als gleich ansieht:

$$H_{1z} = H_{2z}, \tag{19}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$H_1\begin{pmatrix}\text{im Punkte } O_2\\ \text{in Richtung } A_2\end{pmatrix} = H_2\begin{pmatrix}\text{im Punkte } O_1\\ \text{in Richtung } A_1\end{pmatrix}.$$

Die von der Antenne A_1 ausgehende Strahlung erzeugt am Orte und in der Richtung von A_2 nach Amplitude und Phase dieselbe magnetische Feldstärke, wie die von der Antenne A_2 ausgehende Strahlung am Orte und in der Richtung von A_1.

Bei verschiedenen Werten von ε, μ, σ in O_1 und O_2 stehen die gleicher Ausstrahlung entsprechenden Dipole M_1, M_2 in dem zu Gl. (16) analogen Verhältnis:

$$\frac{\mu_1 M_1^2}{V_1^3} = \frac{\mu_2 M_2^2}{V_2^3}. \tag{20}$$

An Stelle von (18) erhält man dann durch Gleichsetzen von J_{12} und J_{21}

$$\sqrt{\mu_2}\, V_2^{3/2} H_{1z} = \sqrt{\mu_1}\, V_1^{3/2} H_{2z}, \tag{21}$$

also auch hier ein festes, nur von den Materialkonstanten der unmittelbaren Umgebung abhängiges Verhältnis der in beiden Fällen empfangenen magnetischen Feldstärken.

Schließlich befinde sich in O_1 eine elektrische Antenne (Linearantenne), in O_2 eine magnetische (Rahmenantenne). Dann haben wir für E_1, H_1 die Gl. (18) von S. 429, für E_2, H_2 die Gl. (21) von S. 431 zu benutzen. Gleiche Stärke des Senders in beiden Fällen bedeutet dann Gleichheit der Momente des elektrischen und magnetischen Dipols, wenn sich beide Antennen im Normalmedium (Luft) befinden; im allgemeinen Falle müßte nach (16) und (20) M_1 und M_2 in solchem Verhältnis zueinander gewählt werden, daß

$$\frac{\varepsilon_1 M_1^2}{V_1^3} = \frac{\mu_2 M_2^2}{V_2^3}.$$

Jetzt verschwinden von den vier Integralen (10) J_{21} und J_{22} und man erhält aus (8):

$$J_{11} = -J_{12},$$

$$J_{11} = -ia_1 \int_{K_1} (E_2 \times \operatorname{rot} \Pi)_n \, d\sigma, \quad a_1 = \frac{\varepsilon_1 \omega + i\sigma_1}{c},$$

$$J_{12} = -ia_2 \int_{K_2} (H_1 \times \operatorname{rot} \Pi)_n \, d\sigma, \quad a_2 = \frac{\mu_2 \omega}{c}.$$

Die Ausrechnung liefert

$$J_{11} = \frac{2}{3} i a_1 M_1 E_{2z}, \quad J_{12} = \frac{2}{3} i a_2 M_2 H_{1z},$$

also

$$a_1 M_1 E_{2z} = -a_2 M_2 H_{1z},$$

insbesondere, wenn beide Antennen in Luft liegen:

$$E_2\begin{pmatrix}\text{im Punkte } O_1\\ \text{in Richtung } A_1\end{pmatrix} = -H_1\begin{pmatrix}\text{im Punkte } O_2\\ \text{in Richtung } A_2\end{pmatrix}.$$

Die von der elektrischen Antenne A_1 aufgenommene elektrische Feldstärke des magnetischen Dipols in O_2 ist der Amplitude nach gleich, der Phase nach entgegengesetzt der von der magnetischen Antenne A_2 aufgenommenen magnetischen Feldstärke des elektrischen Dipols in O_1, vorausgesetzt, daß beide Antennen mit gleicher Energie senden und die Phase auf diejenige des betreffenden Senders bezogen wird.

Besonders bemerkenswert und für die Praxis wichtig ist der Umstand, daß unser Satz gänzlich unabhängig ist von der Beschaffenheit der Erdoberfläche zwischen Sender und Empfänger. Diese kann aus Land und Wasser in beliebigem Wechsel bestehen. Auch die Bodenbeschaffenheit am Orte von Sender und Empfänger ist unwesentlich, da sie nur die multiplikativen Konstanten in den Gl. (18) und (21) bedingt. Die Reziprozität bleibt also im wesentlichen bestehen, wenn der Sender auf Land, der Empfänger auf See sich befindet oder umgekehrt. Desgleichen ist bei unserem Beweise nichts über die Homogenität der Atmosphäre vorausgesetzt, wie ja auch die Umkehrbarkeit der Lichtwege in der Optik ebensowohl für ein geschichtetes Medium gilt, wie für ein homogenes. Nur ein äußeres Magnetfeld (z. B. das Erdfeld) ist auszuschließen[1]).

Es liegt auf der Hand, daß unser Reziprozitätssatz die Behandlung von Sonderfällen erheblich vereinfachen kann. Z. B. läßt sich die Stärke, in der die Signale eines Flugzeuges, bei variabler Lage desselben und beliebiger Beschaffenheit des Erdbodens, von einer festen Station auf der Erdoberfläche aufgenommen werden, beurteilen, wenn man das Feld im Luftraum kennt, welches dieselbe feste Station als Sender erzeugt. Für dieses letztere Problem haben wir die erforderlichen Formeln in § 1 entwickelt (allerdings für homogenen Erdboden und homogene Atmosphäre). Diese Formeln können jetzt, nach dem Reziprozitätssatz, übertragen werden auf den Fall: Sender in Luft, Empfänger auf der Erde.

§ 4. Drahtlose Telegraphie um die Erde.

Um die oft aufgeworfene Frage zu entscheiden, ob die Oberflächenwellen zur Überwindung der Erdkrümmung[2]) genügen (vgl. hierzu S. 555) oder ob dazu die sogenannte Heavisideschicht erforderlich ist, wollen wir in diesem Paragraphen zunächst das elektromagnetische Feld eines Senders bei homogener Atmosphäre durch strenge und

[1]) Vgl. E. V. Appleton und M. A. F. Barnett, Proc. Cambridge Phil. Soc. **22**, 672, 1925. Vgl. auch A. Sommerfeld, Jahrb. d. drahtl. Telegr., l. c.

[2]) Man kann die drahtlosen Signale heutzutage mit Hilfe eines guten Verstärkers bis zum Antipodenpunkt des Senders nachweisen.

diskutierbare Formeln darstellen. Über die mannigfachen und mannigfach voneinander abweichenden Ergebnisse früherer Autoren orientieren die Arbeiten von G. N. Watson[1]) und O. Laporte[2]), denen wir auch bei der Diskussion unserer Formeln folgen werden. Anhangweise wollen wir das Problem einer schematisiert inhomogenen Atmosphäre streifen, nämlich die Wellenausbreitung zwischen der Erdoberfläche und einer scharf ausgebildeten Heavisideschicht, deren Vorhandensein die Überwindung der Erdkrümmung natürlich sehr begünstigen wird.

1. Homogene Atmosphäre, allgemeine Formulierung des Problems. Wir knüpfen an XIII, § 4, **4** an. Dort wurde das optische Feld um eine Kugel durch zwei Potentiale u und v dargestellt, aus denen die elektrischen und magnetischen Kräfte durch Differentiation abzuleiten waren. Gegenwärtig handle es sich um eine Antenne, die senkrecht zur Erdoberfläche steht. Ihr Feld ist symmetrisch um den durch die Antenne gehenden Erddurchmesser, derart, daß die magnetischen Kraftlinien in Kreisen um diesen Durchmesser, die elektrischen Kraftlinien in den Meridianebenen verlaufen. Die magnetische Komponente $\mathfrak{H}_r$ senkrecht zur Erdoberfläche ist also überall Null. Deshalb kommen wir hier mit dem einen Potential u aus, welches, im Gegensatz zu v, gerade durch die Bedingung $\mathfrak{H}_r = 0$ charakterisiert war. Bei Einführung von Polarkoordinaten im Erdmittelpunkt r, ϑ, φ, wobei die Achse $\vartheta = 0$ nach der Antenne hinweisen möge, wird u überdies von φ unabhängig. Das Feld wird also dargestellt durch die Gl. (28) von S. 496, welche mit $\partial/\partial\varphi = 0$ geben (wir denken uns den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ überall hinzu und setzen $\mu = 1$, nicht nur in Luft, sondern auch in Erde):

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = k^2 r u + \dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r\,\partial\vartheta}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = 0, \\ \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{H}_\varphi = -\dfrac{ic}{\omega} k^2 \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Das primär von der Antenne ausgehende Feld behandeln wir als Dipolfeld von vertikaler Achse (r-Richtung). Nach dem Additionstheorem (18) von S. 493 wird ein solches Feld in den Koordinaten r, ϑ, φ des Aufpunktes und den Koordinaten r', 0 des Quellpunktes dargestellt durch

$$(2)\qquad u = \frac{e^{ikR}}{ikR} = \begin{cases} \sum (2n+1)\,\psi_n(kr')\,\xi_n(kr)\,P_n(\cos\vartheta) \ldots r > r', \\ \sum (2n+1)\,\xi_n(kr')\,\psi_n(kr)\,P_n(\cos\vartheta) \ldots r < r'. \end{cases}$$

Den oberen Index 1 bei ξ_n lassen wir durchweg fort; für r' substituieren wir b, bezeichnen also mit b den Abstand der Antenne vom

[1]) Proc. Roy. Soc. **95**, 83, 1918.
[2]) Ann. d. Phys. **70**, 595, 1923.

Erdmittelpunkt. Wir setzen zunächst voraus $b > a$ ($a =$ Erdradius), weil die Kugel $r = b$ nach (2) eine singuläre Rolle für die Darstellung von u spielt und von der singulären Kugel $r = a$, für welche die Oberflächenbedingungen zu bilden sind, getrennt zu halten ist. Wir haben dann drei Gebiete zu unterscheiden:

1. Außenraum	2. Zwischenschale	3. Erdinneres
$r > b,\ k = k_0,$	$b > r > a,\ k = k_0,$	$a > r,\ k = k.$

Nach (2) und mit Rücksicht darauf, daß das Erdinnere primär nicht angeregt wird, setzen wir als primäre Erregung an:

1. $u_1 = \sum c_n \xi_n(k_0 r) P_n(\cos\vartheta), \ldots, \quad c_n = (2n+1)\psi_n(k_0 b).$
2. $u_2 = \sum d_n \psi_n(k_0 r) P_n(\cos\vartheta), \ldots, \quad d_n = (2n+1)\xi_n(k_0 b).$
3. $u_3 = 0.$

Beim Ansatz der sekundären Erregung ist zu beachten, daß für sie die Kugel $r = b$ keine singuläre Bedeutung hat, daß also in den Gebieten 1. und 2. dieselbe Formel gelten wird. Da es sich ferner um Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ handelt, die im Innern der Erde überall endlich sind, im Äußern den Charakter ausstrahlender Wellen haben, setzen wir mit unbekannten Koeffizienten a_n, b_n an:

$$\text{1. und 2.} \quad \left\{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right\} = \sum a_n \xi_n(k_0 r) P_n(\cos\vartheta).$$

$$\text{3.} \quad u_3 = \sum b_n \psi_n(kr) P_n \cos\vartheta.$$

Für die Gesamterregung haben wir also:

1. $u_1 = \sum (a_n + c_n) \xi_n(k_0 r) P_n(\cos\vartheta).$
2. $u_2 = \sum [a_n \xi_n(k_0 r) + d_n \psi_n(k_0 r)] P_n(\cos\vartheta).$
3. $u_3 = \sum b_n \psi_n(kr) P_n(\cos\vartheta).$

Die Bedingungen für die Erdoberfläche $r = a$ (Grenze zwischen Gebiet 2. und 3.) lauten nach der Gl. (1):

a) $\mathfrak{E}_\vartheta$ stetig, also $\dfrac{\partial(ru)}{\partial r}$ stetig:

$$\text{(3 a)} \qquad a_n \frac{\partial}{\partial r}[r\xi_n(k_0 r)]_{r=a} + d_n \frac{\partial}{\partial r}[r\psi_n(k_0 r)]_{r=a} = b_n \frac{\partial}{\partial r}[r\psi_n(kr)]_{r=a}$$

b) $\mathfrak{H}_\varphi$ stetig, also $k^2 u$ stetig:

$$\text{(3 b)} \qquad k_0^2 \{a_n \xi_n(k_0 a) + d_n \psi_n(k_0 a)\} = k^2 b_n \psi_n(ka).$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen, führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$(4)\qquad \begin{cases} kr = \varrho, \quad k_0 r = \varrho_0, \quad ka = \alpha, \quad k_0 a = \alpha_0, \\ \Psi(\varrho) = \dfrac{d}{d\varrho}\,[\varrho\,\psi(\varrho)], \quad Z(\varrho) = \dfrac{d}{d\varrho}\,[\varrho\,\xi(\varrho)]^{1}). \end{cases}$$

Damit gehen die Bedingungen (3) über in:

$$(5)\qquad \begin{cases} b_n \Psi_n(\alpha) - a_n Z_n(\alpha_0) = d_n \Psi_n(\alpha_0), \\ k^2 b_n \psi_n(\alpha) - k_0^2 a_n \xi_n(\alpha_0) = k_0^2 d_n \psi_n(\alpha_0) \end{cases}$$

und ergeben

$$a_n = d_n \frac{k_0^2 \psi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha) - k^2 \psi_n(\alpha)\Psi_n(\alpha_0)}{k^2 \psi_n(\alpha) Z_n(\alpha_0) - k_0^2 \xi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha)}.$$

Nunmehr, nach Erfüllung der Oberflächenbedingungen, können wir zur Grenze $b = a$ übergehen. (Wegen der bei diesem Grenzübergang auftretenden Konvergenzfragen vgl. Watson l. c.) Dann haben wir

$$c_n = (2n+1)\psi_n(\alpha_0), \quad d_n = (2n+1)\xi_n(\alpha_0), \quad d_n = c_n \frac{\xi_n(\alpha_0)}{\psi_n(\alpha_0)}.$$

Da hierbei das Gebiet 2. auf Null zusammengezogen wird, interessiert uns nur noch das Gebiet 1. und die Koeffizientenverbindung

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_n + c_n &= c_n \left(\frac{k_0^2 \xi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha) - k^2 \dfrac{\psi_n(\alpha)}{\psi_n(\alpha_0)}\,\xi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha_0)}{k^2 \psi_n(\alpha) Z_n(\alpha_0) - k_0^2 \xi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha)} + 1 \right) \\ &= (2n+1) k^2 \psi_n(\alpha) \frac{\psi_n(\alpha_0) Z_n(\alpha_0) - \xi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha_0)}{k^2 \psi_n(\alpha) Z_n(\alpha_0) - k_0^2 \xi_n(\alpha_0)\Psi_n(\alpha)}. \end{aligned}$$

Hier hängt der Zähler nunmehr von dem einen Argument α_0 ab und ist wegen der Definitionen (4) zunächst identisch mit:

$$(7)\qquad \alpha_0[\psi_n(\alpha_0)\xi_n'(\alpha_0) - \xi_n(\alpha_0)\psi_n'(\alpha_0)].$$

Beide Funktionen ψ_n und ξ_n genügen aber der Differentialgleichung (7) von S. 489:

$$v'' + \frac{2}{\varrho} v' + \left(1 - \frac{n(n+1)}{\varrho^2}\right) v = 0.$$

---

[1]) Wir hätten die Einführung der Abkürzungen Ψ und Z vermeiden können, wenn wir uns der Debyeschen Normierung der Funktionen ψ und ζ angeschlossen hätten, vgl. Anm. 1 auf S. 490; in diesem Falle wäre statt Ψ und Z in den folgenden Formeln einfach ψ' und ζ' zu setzen gewesen. Wir haben an der älteren (Heineschen) Normierung der ψ und ζ festgehalten, weil sie so direkt die „Normalfunktionen" der Kugel bedeuten. Die oben genannten Arbeiten von G. N. Watson und O. Laporte benutzen die Debyesche Normierung und weichen daher von der unsrigen um den Faktor ϱ ab.

Daher gilt nach einem bekannten Satz über lineare Differentialgleichungen [1. Bd., VI, § 2 (26)]:

$$\psi_n(\varrho)\xi_n'(\varrho) - \xi_n(\varrho)\psi_n'(\varrho) = \frac{C}{\varrho^2}.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, können wir uns auf die asymptotischen Formeln (11) von S. 490 stützen. Aus ihnen und dem Zusammenhang zwischen ψ und ξ^1, ξ^2, Gl. (10) daselbst, ergibt sich $C = i$, also für (7) der Wert i/α_0. Für (6) können wir jetzt schreiben:

$$a_n + c_n = \frac{(2n+1)i}{\alpha_0} \frac{1}{Z_n(\alpha_0) - A_n}, \tag{6 a}$$

$$A_n = \frac{k_0^2}{k^2} \frac{\Psi_n(\alpha)}{\psi_n(\alpha)} \xi_n(\alpha_0) \tag{6 b}$$

und unser Potential im Äußern der Erde wird

$$\begin{cases} u = u_1 = \dfrac{i}{\alpha_0} \sum (2n+1) \dfrac{\xi_n(\varrho_0) P_n(\cos\vartheta)}{Z_n(\alpha_0) - A_n}, \\ \varrho_0 = k_0 r, \quad \alpha_0 = k_0 a. \end{cases} \tag{8}$$

Entsprechend ergibt sich für das Erdinnere:

$$\begin{cases} u = u_3 = \dfrac{i}{\alpha_0} \dfrac{k_0^2}{k^2} \sum (2n+1) \dfrac{\xi_n(\alpha_0)}{\psi_n(\alpha)} \dfrac{\psi_n(\varrho) P_n(\cos\vartheta)}{Z_n(\alpha_0) - A_n}, \\ \varrho = kr, \quad \alpha_0 = k_0 a, \quad \alpha = ka. \end{cases} \tag{9}$$

Bei unendlicher Leitfähigkeit des Bodens wird $A_n = 0$

$$u_1 = u_\infty = \frac{i}{\alpha_0} \sum (2n+1) \frac{\xi_n(\varrho_0)}{Z_n(\alpha_0)} P_n(\cos\vartheta), \tag{10}$$

und natürlich $u_3 = 0$. Bei endlicher, aber großer Leitfähigkeit können wir (8) entwickeln:

$$u = u_\infty + u_\sigma,$$

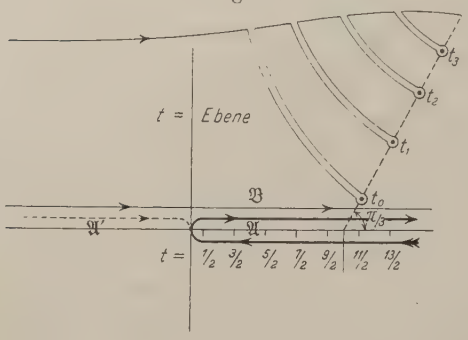
$$u_\sigma = \frac{i}{\alpha_0} \sum (2n+1) A_n \frac{\xi_n(\varrho_0)}{Z_n^2(\alpha_0)} P_n(\cos\vartheta). \tag{10 a}$$

2. Übergang von der Reihen- zur Integraldarstellung. Wir interessieren uns wesentlich für das Feld in Luft, Gl. (8), und zwar zunächst für den Grenzfall (10). Wegen der Größenordnung des Verhältnisses $a/\lambda \simeq 10^3$ sind α und ϱ (wir unterdrücken weiterhin den Index 0 bei α und ϱ sowie den Index ∞ bei u) große Zahlen. Solange also n von mäßiger Größe ist, gelten die asymptotischen Formeln (11) von S. 490, welche zeigen, daß ξ/Z von n unabhängig wird. Da $(2n+1)P_n$ mit n sogar zunimmt, kann von einer praktischen Konvergenz der Reihe (10) nicht die Rede sein. Man müßte über 1000 Glieder der Reihe mitnehmen, bis die genannten Formeln (11) ungültig werden

und an ihre Stelle die Debyeschen asymptotischen Näherungen (vgl. S. 460) treten; dann erst beginnt die Reihe wirklich zu konvergieren.

Infolgedessen wird die Reihe (10) zur numerischen Berechnung ganz ungeeignet. Wir benutzen sie nur als Ausgangsmaterial für ein komplexes Integral, von solcher Bauart, daß die Summe seiner Residuen mit der Ausgangsreihe identisch wird.

Fig. 62.



Wir fügen nämlich nach einer auch sonst vielfach nützlichen Methode den Nenner $\cos \pi t$ hinzu, welcher auf der positiven reellen Achse für $t = n + {}^1/_2$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ verschwindet wie

(11) $(-1)^n \pi (t - n - {}^1/_2)$.

Das gesuchte Integral erhalten wir nun, wenn wir in dem allgemeinen Gliede von (10) statt n überall $t - {}^1/_2$ schreiben und es nach t über eine Schleife $\mathfrak{A}$ um die positive reelle Achse im Uhrzeigersinne integrieren. So entsteht als gleichbedeutend mit (10):

$$(12) \qquad u = \frac{1}{\alpha} \int t\,dt\, \frac{\xi_{t-1/2}(\varrho)}{Z_{t-1/2}(\alpha)} \frac{P_{t-1/2}[\cos(\pi - \vartheta)]}{\cos \pi t}.$$

Das Argument $\pi - \vartheta$ in der Kugelfunktion trägt dabei dem Faktor $(-1)^n$ in (11) Rechnung, indem $P_n(-x) = (-1)^n P_n(+x)$ ist.

Der Weg $\mathfrak{A}$ um die positive reelle Achse ist aber äquivalent mit dem Wege $\mathfrak{B}$ oberhalb der reellen Achse, vgl. Fig. 62. Wir zeigen, um dies zu beweisen, daß der Faktor von $t\,dt$ in (12) eine gerade Funktion von t ist. Zunächst folgt aus der Differentialgleichung der Kugelfunktionen, daß für jedes (nicht nur ganzzahliges) n

$$P_n = P_{-n-1}, \quad \text{also, mit} \quad n = t - {}^1/_2, \quad P_{t-1/2} = P_{-t-1/2}.$$

Sodann erkennt man aus dem Zusammenhang von ζ_n mit $H_{n+1/2}$ in Gl. (9) von S. 490 und aus Gl. (6 a) von S. 457, daß

$$(12\,a) \qquad \zeta_{-t-1/2} = e^{i\pi t} \zeta_{t-1/2}.$$

Dieselbe Gleichung gilt nach der Definition (4) auch für Z. Somit ist auch ζ/Z eine gerade Funktion von t. Da auch $t\,dt$ gerade in t ist, ändert sich das Integral in (12) nicht, wenn wir t mit $-t$ vertauschen. Der Teil von $\mathfrak{A}$ unterhalb der reellen Achse geht dabei über in den in der Figur punktiert gezeichneten spiegelbildlichen Weg $\mathfrak{A}'$ und dieser läßt sich zusammen mit dem Teile von $\mathfrak{A}$ oberhalb der reellen Achse in der Tat in den Weg $\mathfrak{B}$ überführen.

Den Weg $\mathfrak{B}$ wollen wir weiterhin nach der positiv-imaginären Halbebene der Fig. 62 deformieren. Als Vorbereitung untersuchen wir das Verhalten von $P_{t-1/2}/\cos \pi t$ für große positiv-imaginäre Werte von t. Nach 1. Bd., IX, § 2, (5) ist für solche t:

$$P_{t-1/2}[\cos(\pi - \vartheta)] = [2\pi(t - 1/2)\sin\vartheta]^{-1/2} e^{-it(\pi-\vartheta)-\frac{i\pi}{4}};$$

da gleichzeitig

$$\cos \pi t = \frac{1}{2} e^{-i\pi t}$$

ist, so wird

$$\frac{P_{t-1/2}[\cos(\pi - \vartheta)]}{\cos \pi t} = \sqrt{\frac{2}{\pi t \sin\vartheta}}\, e^{it\vartheta - \frac{i\pi}{4}}, \tag{12 b}$$

also exponentiell verschwindend. Dabei wurde im Nenner $t - 1/2$ bequemerweise durch t ersetzt, was bei einer asymptotischen Formel natürlich erlaubt ist.

Sodann haben wir das Verhalten von $\zeta(\varrho)$ und $Z(\alpha)$ als Funktion von t in der positiv-imaginären t-Ebene zu untersuchen und insbesondere die Wurzeln von $Z(\alpha)$ zu bestimmen. Die gewöhnlichen asymptotischen Formeln, Gl. (11) von S. 490, sind hier natürlich unbrauchbar, weil sie nur für endlichen Index bei unendlich wachsendem Argument abgeleitet sind. Vielmehr müssen wir uns auch hier nach Debye[1]) auf die Methode der Sattelpunkte stützen und Formeln gewinnen, welche bei großem Argument (Erdradius) und großem bzw. unendlich großem Index gelten. Wegen der Einzelheiten müssen wir auf Debye verweisen und können hier nur den allgemeinen Weg angeben.

Zunächst unterscheidet sich $\zeta^1_{t-1/2}(\varrho)$ von $H^1_t(\varrho)$ nur um den von t unabhängigen Faktor $\sqrt{\pi/2\varrho}$, Gl. (9) von S. 490. Wir können also $H^1_t(\varrho)$ statt ζ betrachten. Die Integraldarstellung (3) von S. 455 schreiben wir

$$\pi H^1_t = \int e^{if(\beta)}\, d\beta, \quad f(\beta) = \varrho\cos\beta + t(\beta - \pi/2). \tag{13}$$

Sattelpunkte haben wir da, wo $f'(\beta) = 0$ wird. Also nach (13)

$$\sin\beta = \frac{t}{\varrho}.$$

Setzen wir im Anschluß an Debye

$$\frac{t}{\varrho} = \cos\tau, \tag{14 a}$$

[1]) Es kommt in Betracht: Münchener Akademie 1910, wo komplexe Werte von Argument oder Index behandelt werden; eine übersichtliche, von Debye selbst herrührende Darstellung der Resultate bei Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl., S. 102 und 103.

so ist in den Sattelpunkten ($\beta = \beta_0$):

$$(14\,b) \qquad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \beta_0 = \pm\,\tau, \quad \sin\beta_0 = \cos\tau, \quad \cos\beta_0 = \pm\sin\tau, \\ f(\beta_0) = \pm\,\varrho\,(\sin\tau - \tau\cos\tau). \end{cases}$$

Das asymptotische Verhalten von H wird nun wesentlich (vgl. S. 458) durch die Exponentialfunktion $\exp\{i(\pi/4 + f(\beta_0)\}$ bestimmt; von dem hinzutretenden Faktor, der sich aus $f''(\beta_0) = \pm\sin\tau$ berechnet, können wir hier absehen.

Die angegebene exponentielle Form von H zeigt bereits, daß Wurzeln von $H = 0$ nicht auftreten können, sofern für das asymptotische Verhalten nur einer der Sattelpunkte $\pm\,\tau$ maßgebend ist. (Von den weiteren Sattelpunkten $\pm\,\tau + 2\pi m$, m ganzzahlig, können wir offenbar absehen.) Das wird immer dann der Fall sein, wenn $f(\beta_0)$ komplex ist, was ja wegen (14 a) bei komplexem t im allgemeinen zutreffen wird. Ist aber im besonderen $f(\beta_0)$ reell, so tragen beide Sattelpunkte $\pm\,\tau$ in gleichem Maße zum asymptotischen Wert von H bei. An die Stelle der Exponentialfunktion tritt dann die Kosinusfunktion und wir erhalten als asymptotische Darstellung (bis auf den genannten, hier unterdrückten Faktor):

$$(15) \qquad H_t^1(\varrho) \sim \cos\left(\frac{\pi}{4} + f(\beta_0)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varrho\,(\sin\tau - \tau\cos\tau)\right).$$

Die Wurzeln sind also gegeben durch

$$(15\,a) \qquad \varrho\,(\sin\tau - \tau\cos\tau) = \frac{4n+1}{4}\,\pi.$$

Hier ist (vgl. Debye) die ganze Zahl n negativ zu nehmen. Wir schreiben daher weiterhin $-n$ statt n. Für kleine Werte von τ (nicht zu große $|n|$) folgt dann sofort

$$\frac{\tau^3}{3} = -(4n-1)\,\frac{\pi}{4\varrho}, \qquad \tau = (4n-1)^{1/3}\left(\frac{3\pi}{4\varrho}\right)^{1/3} e^{-\frac{i\pi}{3}},$$

wobei wegen des Vorzeichens in der Einheitswurzel wieder auf Debye [1]) zu verweisen ist. Daraus folgt nach (14 a):

$$(16) \qquad \frac{t}{\varrho} = 1 - \frac{\tau^2}{2} + \cdots = 1 - \frac{1}{2}(4n-1)^{2/3}\left(\frac{3\pi}{4\varrho}\right)^{2/3} e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

oder

$$(16\,a) \qquad t = \varrho + \frac{1}{2}(4n-1)^{2/3}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3}\varrho^{1/3}\, e^{+\frac{i\pi}{3}} \ldots n = 1, 2, 3 \ldots$$

Diese Werte sind Wurzeln von $H_t^1(\varrho) = 0$, als Gleichung für t aufgefaßt, sie liegen (bei reellem ϱ) in der positiv-imaginären t-Halb-

[1]) L. c., § 4. Debye gibt die Wurzeln von $H^2 = 0$ an; diejenigen von $H' = 0$ sind dazu konjugiert.

ebene[1]); zur Veranschaulichung ihrer Anordnung kann in qualitativer Hinsicht Fig. 62 dienen, welche (vgl. unten) die Wurzeln von $Z(\alpha) = 0$ andeutet. Gleichzeitig erhalten wir die Wurzeln von $H_t^1(\varrho)$, als Gleichung für ϱ aufgefaßt. Wir schließen nämlich unmittelbar aus (16)

$$\frac{\varrho}{t} = 1 + \frac{1}{2}(4n-1)^{2/3}\left(\frac{3\pi}{4\varrho}\right)^{2/3} e^{-\frac{2i\pi}{3}},$$

und da in erster Näherung $\varrho = t$ ist:

$$\varrho = t + \frac{1}{2}(4n-1)^{2/3}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} t^{1/3}\, e^{-\frac{2i\pi}{3}}. \tag{16b}$$

Die Wurzeln ϱ von $H_t^1(\varrho) = 0$ liegen also (bei reellem t) in der negativ-imaginären Halbebene der Variablen ϱ. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit einer S. 461 erwähnten Folgerung aus dem Greenschen Satz.

Zur Diskussion unseres Integrals (12) brauchen wir aber nicht die Wurzeln von $\zeta = 0$, sondern die des Nenners $Z = \zeta + \varrho\zeta' = 0$. Diese finden wir jetzt leicht auf folgende Weise: Zunächst sehen wir, daß, wenn sich H exponentiell verhält, auch Z asymptotisch durch eine Exponentialfunktion dargestellt wird und keine Wurzel haben kann. Wir werden also annehmen, daß H durch (15) dargestellt werde, und berechnen

dann aus $\zeta_{t-1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}}\, H_t$

$$\sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}}\, Z = \frac{1}{2} H_t + \varrho \frac{dH_t}{d\varrho} = \frac{1}{2}\cos z - \varrho \sin z \frac{dz}{d\varrho}. \tag{17}$$

Hier ist

$$z = \frac{\pi}{4} + \varrho(\sin\tau - \tau\cos\tau), \tag{17a}$$

also

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{d\varrho} &= \sin\tau - \tau\cos\tau + \varrho\,\tau\sin\tau\,\frac{d\tau}{d\varrho}, \\ \frac{dz}{dt} &= \varrho\,\tau\sin\tau\,\frac{d\tau}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{17b}$$

Nach Gl. (14a) gilt aber

$$\sin\tau\,\frac{d\tau}{d\varrho} = \frac{t}{\varrho^2} = \frac{\cos\tau}{\varrho}, \quad \sin\tau\,\frac{d\tau}{dt} = \frac{-1}{\varrho}, \tag{18}$$

[1]) Nach Gl. (12a) haben wir eine zweite Serie von Wurzeln an den diametral entgegengesetzten Stellen $-t$, also im dritten Quadranten der t-Ebene. Dies gilt sowohl von den Wurzeln von H_t bzw. ζ als von denen von Z, Gl. (19). Hätten wir in Fig. 62 den ursprünglichen Weg $\mathfrak{A}$ ersetzt durch einen Weg $\mathfrak{B}$ unterhalb der reellen Achse, so würde dieser, bei der Deformation nach der negativ-imaginären t-Ebene, an jenen Wurzeln $-t$ von $Z = 0$ hängen bleiben.

also wird

$$\frac{dz}{d\varrho} = \sin\tau, \quad \frac{dz}{dt} = -\tau, \tag{18 a}$$

und nach (17)

$$\sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}}\, Z = \frac{1}{2}\cos z - \varrho \sin\tau \sin z \simeq -\varrho \sin\tau \sin z. \tag{18 b}$$

Wie wir hier angedeutet haben, kann in der Tat das erste Glied im Ausdruck von Z gegen das zweite wegen $\varrho \gg 1$ gestrichen werden. Die Wurzeln von $Z = 0$ (und ebenso die von $\zeta = 0$) sind also gegeben durch $\sin z = 0$, $z = n\pi$. Behandeln wir diese Gleichung ebenso wie die analoge Gl. (15 a), nehmen also τ klein, n negativ an, so ergibt sich, wenn wir noch entsprechend Gl. (12) das Argument von Z gleich α setzen:

$$\begin{cases} \tau = (4n+1)^{1/3}\left(\dfrac{3\pi}{4\alpha}\right)^{1/3} e^{-\frac{i\pi}{3}}, \\ t = t_n = \alpha + \dfrac{1}{2}(4n+1)^{2/3}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)^{2/3} \alpha^{1/3} e^{\frac{i\pi}{3}} \ldots \; n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases} \tag{19}$$

Auch diese Wurzeln liegen in der positiv-imaginären Halbebene der Fig. 62 und sind dort als t_0, t_1 ... eingetragen.

Entwickeln wir $\sin z$ für die Umgebung eines der Wurzelpunkte $t = t_n$, so erhalten wir

$$\sin z = (t - t_n)\left(\cos z \frac{dz}{dt}\right)_{t=t_n} + \cdots,$$

also wegen (18 a) und wegen $\cos z = \cos n\pi = (-1)^n$

$$\sin z = -\tau_n (-1)^n (t - t_n).$$

Für $Z(\alpha)$ ergibt sich daraufhin aus (18 b):

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\, Z(\alpha) = \alpha \tau_n \sin\tau_n (-1)^n (t - t_n).$$

Wir berechnen weiterhin die im Zähler von (12) stehende Funktion ζ für dasselbe Argument wie Z, beschränken uns also auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche $r = a$, $\varrho = \alpha$. Dann ist ζ im Sinne von (15) dargestellt durch $\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\zeta = \cos z = \cos n\pi = (-1)^n$. Wir haben also in der Umgebung von $t = t_n$

$$\frac{\zeta(\alpha)}{Z(\alpha)} = \frac{1}{\alpha \tau_n \sin\tau_n} \frac{1}{t - t_n}. \tag{20}$$

Unser Integral (12) wird nun nach dem Cauchyschen Satz gleich $2\pi i$-mal der Summe der Residuen an den Stellen $t = t_n$, also nach (12b) und (20):

$$u = \frac{2}{\alpha^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\sin\vartheta}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \sum\nolimits^{(n)} e^{it_n\vartheta}\, \frac{\sqrt{t_n}}{\tau_n \sin\tau_n}.$$

Drücken wir noch den letzten Faktor in hinreichender Näherung durch (19) aus ($\tau_n = \sin\tau_n =$ Konst $(4n+1)^{1/3}$, $t_n = \alpha$) und nehmen wir alle Konstanten in die ohnehin fortgelassene Amplitude von u auf, so ergibt sich schließlich

$$u = \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \sum\nolimits^{(n)}_{0,1,2\ \ldots} (4n+1)^{-2/3}\, e^{it_n\vartheta}. \tag{21}$$

3. Numerische Diskussion und Ergänzungen. Die durch (19) gegebenen Wurzeln t_n haben einen positiv-imaginären Teil und geben daher nach (21) zu einer Art exponentieller Dämpfung (oder vielleicht besser Abschattung) Anlaß. Wir schreiben den durch $\alpha^{1/3}$ dividierten imaginären Teil J von t_n tabellarisch hin:

n	$J(t_n)/\alpha^{1/3}$
0	0,70 [1])
1	2,23
2	3,32

Der zugehörige Dämpfungsfaktor wird für $n = 0$

$$e^{-0{,}70\,\alpha^{1/3}\vartheta}.$$

Mit $\lambda = 10$ km und $a =$ Erdradius $= \frac{2}{\pi}\cdot 10^4$ km findet man

$$\alpha^{1/3} = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^{1/3} = 15{,}85;$$

daraus ergibt sich für $\vartheta = 10^0$ als Dämpfung

$$e^{-1{,}94} \sim {}^1/_7.$$

Für die zweite Wurzel ($n = 1$), deren imaginärer Teil etwas mehr als dreimal so groß ist, wird die Dämpfung also $\sim ({}^1/_7)^3 \sim {}^1/_{350}$. Wegen des Faktors $(4n+1)^{-2/3} = 5^{-2/3}$ in (21) reduziert sich dieser Betrag weiter auf etwa ${}^1/_{1000}$. Wir sind daher berechtigt, das zweite und um

[1]) Nach Gl. (19) würde sich 0,76 ergeben. Es ist aber zu bedenken, daß unsere approximative Ableitung der Wurzeln gerade für die kleinsten Wurzeln durch höhere Glieder der Entwicklung zu ergänzen ist. Wir haben daher den Wert 0,76 nach Debye bzw. Laporte in 0,70 korrigiert. Für die folgenden Wurzeln reicht dagegen unsere Darstellung (19) bereits praktisch aus.

so mehr alle folgenden Glieder in der Summe (21) zu vernachlässigen und einfach zu schreiben

$$u = \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} e^{i k_0 d} \cdot e^{-0{,}70 \sqrt[3]{\frac{2\pi a}{\lambda}} \vartheta}. \tag{22}$$

Hier haben wir im reellen Teil von t_0 das Korrektionsglied mit $\alpha^{1/3}$ gegen das Hauptglied $\alpha = k_0 a$ vernachlässigt; $d = a\vartheta$ bedeutet die auf der Erdoberfläche gemessene Distanz zwischen Sender und Empfänger. Von den folgenden beiden Ausdrücken für den Dämpfungsfaktor (Abschattungsfaktor) δ entsteht der erste, wenn wir für den Erdradius a seinen Wert in Kilometern einsetzen, der zweite, wenn wir überdies statt ϑ die Distanz d einführen.

$$\delta = e^{-23{,}9\,\lambda^{-1/3}\vartheta} = e^{-3{,}76 \cdot 10^{-3} \cdot \lambda^{-1/3} \cdot d}. \tag{22 a}$$

Natürlich ist in den beiden letzten Ausdrücken λ bzw. λ und d ebenfalls in Kilometern zu messen.

Die Abhängigkeit des Exponenten in (22a) von λ besagt, daß die Abschattung um so vollkommener wird, je kleiner λ, je weniger wirksam also die Beugung um die Kugel ist. Die Ausbreitung der Phase, gegeben durch den Faktor in (22)

$$e^{i k_0 d},$$

erfolgt mit Lichtgeschwindigkeit c längs der Erdoberfläche. Sehr interessant ist der Faktor $(\sin\vartheta)^{-1/2}$ in (22). Er zeigt eine Konzentration der Energie im Antipodenpunkt des Senders an, wie sie tatsächlich nachgewiesen worden ist. Dabei muß allerdings beachtet werden, daß für diesen Punkt selbst unsere Formel unbrauchbar wird. Denn hier ist die in (12b) benutzte asymptotische Darstellung der Kugelfunktion (siehe unten) ungültig, so daß auch das scheinbare Unendlichwerden von u für $\vartheta = \pi$ irreal ist. Andererseits macht der Faktor $(\sin\vartheta)^{-1/2}$ deutlich, daß der Ausbreitungsvorgang von dem der geometrischen Optik weit verschieden ist, daß nämlich tatsächlich eine Leitung der Kraftlinien an der Oberfläche der Erde (auch der vollkommen leitenden) stattfindet. Man könnte im Rahmen der Beugungstheorie die Intensitätszunahme für $\vartheta = \pi$ vergleichen mit den sogenannten Poissonschen Beugungserscheinungen, die auf der Rückseite einer völlig undurchsichtigen Kreisscheibe auftreten.

Werfen wir noch einen Blick auf den Ausdruck u_σ in Gl. (10a), der in erster Näherung der endlichen Leitfähigkeit des Erdbodens Rechnung trägt. Hier haben wir statt des Nenners $Z_n(\alpha_0)$ das Quadrat desselben. Beim Übergang zur Integraldarstellung treten also die Nullstellen $t = t_n$ quadratisch auf, ohne übrigens ihre Lage zu verändern. Infolgedessen muß das Residuum des Integranden anders berechnet werden wie oben, aber der Dämpfungsfaktor δ, der sich aus

dem asymptotischen Wert von $P_{t-1/2}/\cos \pi t$ an diesen Nullstellen ergibt, bleibt derselbe. Die endliche Leitfähigkeit ändert also das Maß der Dämpfung (oder Abschattung) nicht und trägt zur Erklärung der beobachteten wellentelegraphischen Reichweiten nichts Wesentliches bei.

Schließlich können wir den Grenzübergang $a \to \infty$ zur ebenen Erde machen, der uns auf die Formeln von § 1 zurückführen muß. Mit $a = \infty$ wird der vom Erdmittelpunkt aus gemessene Winkel $\vartheta = d/a$ zu Null, bei endlichem d. Fur die Kugelfunktion P_n gilt dann nicht mehr Gl. (12 b), sondern[1])

$$\lim_{n=\infty} P_n\left(\cos \frac{\Theta}{n}\right) = J_0(\Theta).$$

Hieraus schließen wir, indem wir $n = \mu a$, $\frac{\Theta}{n} = \vartheta = \frac{d}{a}$ setzen,

$$P_{\mu a}\left(\cos \frac{d}{a}\right) = J_0(\mu d).$$

Tragen wir dies in Gl. (10) ein und verwandeln die Summation nach $n = \mu a$ in eine Integration nach μ mit $d\mu = 1/a$, so ergibt sich

$$u = \frac{2i}{k_0} \int_0^\infty a\, \mu\, d\mu\, \frac{\xi_{\mu a}(\varrho)}{Z_{\mu a}(\alpha)}\, J_0(\mu d). \tag{23}$$

Bei der Berechnung von ξ und Z beschränken wir uns der Kürze halber auf die Erdoberfläche selbst, $r = a$, $\varrho = \alpha$, und beachten, daß es sich jetzt nicht um die Nullpunkte von Z, sondern um eine beliebige Stelle auf der reellen μ-Achse handelt, so daß die ursprüngliche exponentielle Form der asymptotischen Darstellung von H auf S. 589 zu benutzen ist, nicht die trigonometrische Form, nämlich nach Anleitung der Gl. (13), (14) und (18 b):

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\, \xi(\alpha) = e^{if(\beta_0)}, \quad \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\, Z(\alpha) = -\alpha \sin\tau\, i\, e^{if(\beta_0)}, \\ \frac{\xi}{Z} = \frac{-1}{i\alpha \sin\tau}. \end{cases} \tag{24}$$

Nach (14 a) ist aber in unseren jetzigen Bezeichnungen (n und α an Stelle von t und ϱ gesetzt)

$$\begin{aligned} \cos\tau = \frac{n}{\alpha} = \frac{\mu}{k_0}, \quad \sin\tau = \frac{1}{k_0}\sqrt{k_0^2 - \mu^2}, \\ i\alpha \sin\tau = a\sqrt{\mu^2 - k_0^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

[1]) Vgl. z. B. Heine, Handb. d. Kugelf. I, Gl. (30).

(24) und (25), in (23) eingesetzt, liefern:

$$u = \frac{2}{ik_0} \int_0^\infty \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{\mu^2 - k_0^2}} J_0(\mu d). \tag{26}$$

Das ist (abgesehen von den Bezeichnungen d, μ statt r, λ) genau unser früheres Resultat (11) in § 1 für $z = 0$, und zwar [vgl. daselbst unter b)] im Grenzfall $k = \infty$, der den Faktor 2 bedingt. Der Faktor ik_0 vor dem Integral kommt daher, daß wir in Gl. (2) dieses Paragraphen nicht wie früher von dem Ansatz e^{ikR}/R für die primäre Erregung, sondern von e^{ikR}/ikR ausgegangen sind. Wie Laporte, l. c., ausführt, kann man in analoger Weise auch die Formel (15) aus § 1 für beliebiges k durch Grenzübergang $a \longrightarrow \infty$ gewinnen.

In historischer Hinsicht sei bemerkt, daß die allgemeine Form (22a) des Dämpfungsfaktors δ zuerst bei Poincaré 1905, der darin vorkommende Zahlenfaktor, auf den es wesentlich ankommt, bei Nicholson 1910 und Macdonald 1914 angegeben wird. Unsere Darstellung ist wesentlich identisch mit den zitierten Arbeiten von Watson und Laporte.

4. Vergleich mit der Erfahrung, Heavisideschicht. Quantitative Beobachtungen über die Größe der Empfangsstärke sind sehr schwierig; die besten dürften von L. W. Austin herrühren. Das allgemeine Ergebnis ist, daß die Empfangsstärken in Wirklichkeit viel größer sind, als sie nach der vorangehenden Theorie der homogenen Atmosphäre sein dürften, sowohl bei Tage, wo die Beobachtungen ziemlich regelmäßig ausfallen, als besonders bei Nacht, wo sie unregelmäßig liegen und zum Teil viel größere Reichweiten liefern als bei Tage. Austin stellt seine Ergebnisse durch eine empirische Formel dar mit dem Dämpfungsfaktor

$$\delta = e^{-9{,}6\,.\,\lambda^{-1/2}\vartheta} \quad (\lambda \text{ in Kilometern}). \tag{27}$$

Die Abhängigkeit $\lambda^{-1/2}$ an Stelle von $\lambda^{-1/3}$ in (22a) ist charakteristisch.

Zur Erklärung der unerwartet großen Reichweiten nimmt man (vgl. auch S. 555) seit Heaviside (1900) eine ionisierte und daher leitende obere Luftschicht an. Behandelt man diese und die Erde als vollkommene Leiter, so wäre die Wellenausbreitung auf eine relativ dünne Kugelschale konzentriert. Innerhalb dieser gilt, da das Feld nicht mehr ins Unendliche reicht, statt des Ansatzes 1. von S. 585 der allgemeinere

$$\sum (a_n \zeta_n + a'_n \psi_n) P_n(\cos\vartheta)$$

und es tritt eine neue Randbedingung an der äußeren Begrenzung der Kugelschale hinzu. Es ist nun bemerkenswert, daß G. N. Watson[1])

[1]) Proc. Roy. Soc. **95**, 546, 1919.

nach derselben Methode, mit der er den vorangehenden Fall der homogenen Atmosphäre behandelt hatte, zeigen konnte, daß der Dämpfungsfaktor für die Kugelschale die allgemeine Form (27) annimmt, also die Abhängigkeit $\lambda^{-1/2}$ zeigt. Um den Austinschen Zahlenfaktor zu erklären, sind allerdings speziellere Annahmen erforderlich.

Auch direkte Erfahrungen mit Signalen auf kurze Entfernungen scheinen die Existenz der Heavisideschicht sicherzustellen. Besonders Appleton und seine Schüler haben in dieser Hinsicht wertvolles Material geliefert. Von G. Breit und H. A. Tuve wird das an der Heavisideschicht entstehende wellentelegraphische Echo beschrieben und gemessen[1]). Die Höhe der reflektierenden Schicht ergibt sich aus der beobachteten Zeitdifferenz zu 80 bis 200 km.

Lehrbücher.

J. Zenneck, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie, 5. Aufl., zusammen mit H. Ruhkopp. Stuttgart 1925, vgl. insbesondere Kap. 10 und 13.
W. H. Eccles, Wireless Telegraphy and Telephony. London 1918.

[1]) Phys. Rev. **28**, 554, 1926.

V. Abschnitt.

Mechanik der Kontinua.

Siebzehntes Kapitel.

Mathematische Grundlagen der Elastizitätstheorie.

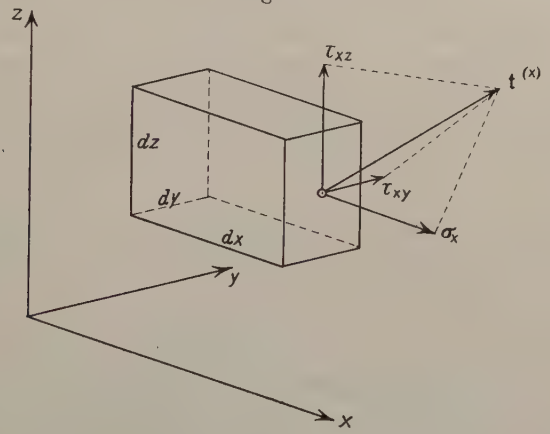
§ 1. Problemstellung. Bezeichnungen.

Die Erfahrung lehrt, daß die festen Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte gewisse Gestaltsänderungen erfahren, welche bei allmählicher Entlastung wieder verschwinden oder bei plötzlicher Entlastung zu Schwingungen des Körpers Anlaß geben. Die Elastizitätstheorie stellt sich die Aufgabe, die auf solche Weise hervorgerufenen Gestaltsänderungen und Bewegungen einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen. Genauer ausgedrückt handelt es sich um die folgenden Fragen: Gegeben sei ein elastischer Körper, der irgendwie gelagert sei — wobei wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall beschränken, daß gewisse Punkte oder Oberflächenteile unverschieblich festgehalten seien — auf die übrigen Teile der Oberfläche sollen gegebene Kräfte und auf die inneren Punkte die Schwerkraft oder andere Massenkräfte wirken. Dann fragen wir erstens nach der Gestaltsänderung, welche der Körper erfahren hat, wenn sich unter der gegebenen Einwirkung Gleichgewicht eingestellt hat, bzw. nach der Bewegung und zweitens nach der „Beanspruchung des Materials", d. h. nach den inneren Kräften (Spannungen), welche zwischen den einzelnen Massenteilchen des Körpers wirken.

Bezeichnungen. Die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des elastischen Körpers bezeichnen wir mit x, y, z. Die Verschiebung, welche ein Punkt infolge der elastischen Deformation erfährt, werde durch ihre Projektionen u, v, w auf die drei Achsenrichtungen gegeben, die Kräfte, welche auf die Flächeneinheit der Oberfläche wirken, durch ihre Komponenten Ξ, H, Z und die auf die Volumeneinheit der inneren Punkte wirkenden Kräfte durch X, Y, Z. Ist also do ein Flächenelement der Oberfläche und $d\omega$ ein Volumenelement im Innern, so wirken auf das erstere in den drei Koordinatenrichtungen die Kräfte Ξdo, Hdo, Zdo, auf das letztere die Kräfte $Xd\omega$, $Yd\omega$, $Zd\omega$. Die inneren Kräfte, mit welchen benachbarte Teile des Körpers aufeinander wirken, beschreiben wir folgendermaßen: wir denken uns zwei benachbarte Parallelepipede von den in den Achsenrichtungen liegenden Kanten dx, dy, dz, welche in der x-Richtung nebeneinander liegen, und

mit den senkrecht zur x-Achse liegenden Flächen $dy.dz$ aneinander stoßen. Die Komponenten der Kräfte, welche das rechts (d. h. in Richtung wachsender x) liegende Element auf das links liegende ausübt, bezeichnen wir mit $\sigma_x dy\,dz$, $\tau_{xy} dy\,dz$, $\tau_{xz} dy\,dz$. Es sind also σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} die Kräfte, welche auf die Flächeneinheit eines zur x-Achse senkrechten Flächenelements von rechts nach links ausgeübt werden. Ebenso seien τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} und τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z die Kraftkomponenten, welche durch Flächenelemente senkrecht zur y- und z-Achse pro Flächeneinheit übertragen werden. Die Vektoren mit den Komponenten σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} bzw. τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} bzw. τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z wollen wir durch $t^{(x)}$ bzw. $t^{(y)}$ bzw.

Fig. 63.



$t^{(z)}$ bezeichnen. Von diesen Kräften setzen wir voraus, daß sie dem Grundsatze der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen, daß also die Kraft, welche von einem Teilchen 1 auf ein Teilchen 2 durch die Grenzfläche übertragen wird, entgegengesetzt gleich der von 2 auf 1 übertragenen Kraft ist. Ferner nehmen wir an, daß die durch ein Flächenelement übertragene Kraft für ein unendlich kleines Flächenelement durch dessen Schwerpunkt geht (präziser gesagt: ist h der Abstand der Kraft vom Schwerpunkt des Flächenelements, dessen größter Durchmesser ε sei, so ist $\lim_{\varepsilon=0} \frac{h}{\varepsilon} = 0$). Die Größen σ_x, τ_{xy} usw. nennen wir die „Spannungskomponenten“ oder kurzweg „Spannungen“; die Komponenten σ_x, σ_y, σ_z, welche senkrecht zu den Flächenelementen liegen, auf die sie wirken, nennen wir „Normalspannungen“, die Komponenten τ_{xy} usw., welche in diesen Flächenelementen liegen, „Schubspannungen“. Bezüglich der Vorzeichen, welche die Spannungskomponenten erhalten, sei die folgende Regel hervorgehoben, die aus dem oben Gesagten folgt: Betrachten wir das Flächenelement, welches ein

infinitesimales Parallelepiped nach der Seite wachsender x begrenzt, so sind die Spannungen σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} positiv, wenn sie auf dieses Flächenelement in Richtung wachsender x, y und z wirken; auf das in Richtung abnehmender x begrenzende Flächenelement wirken die gleichen Spannungen in Richtung abnehmender Koordinaten. Z. B. ist σ_x positiv, wenn das Parallelepiped auf der rechten Seite nach rechts, auf der linken nach links gezogen wird, positive Normalspannungen ergeben somit eine Zugbeanspruchung des Materials, negative eine Druckbeanspruchung.

§ 2. Analyse der Spannungen und Verzerrungen.

1. Gleichgewichtssätze. Die Grundlage der Spannungsanalyse ist das folgende Prinzip: Denkt man sich irgend einen endlichen oder infinitesimalen Volumteil irgendwie aus dem elastischen Körper herausgeschnitten, so besteht Gleichgewicht zwischen den angreifenden äußeren Kräften und den Spannungskräften, welche auf die Schnittfläche wirken.

Erste Anwendung des Gleichgewichtsgrundsatzes. Wir denken uns ein infinitesimales Tetraeder, mit drei achsenparallelen Kanten $O—A$, $O—B$, $O—C$. Die von ihnen gebildeten Dreiecke sind die Projektionen der Grundfläche $A—B—C$ auf die drei Koordinatenebenen. Ist also dF der Inhalt der Grundfläche und sind $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$, $\cos(\nu, z)$ die Richtungskosinus ihrer Normalen gegen die Achsenrichtungen, so haben die Dreiecke $O—B—C$, $O—C—A$, $O—A—B$ die Inhalte $dF\cos(\nu, x)$, $dF\cos(\nu, y)$, $dF\cos(\nu, z)$. Es wirken also auf die Flächen

$O—B—C$	die	Kraft	(Spannung	$\times$	Fläche)	$-\mathfrak{t}^{(x)}\,dF\cos(\nu, x)$,
$O—C—A$	„	„	„	$\times$	„	$-\mathfrak{t}^{(y)}\,dF\cos(\nu, y)$,
$O—A—B$	„	„	„	$\times$	„	$-\mathfrak{t}^{(z)}\,dF\cos(\nu, z)$

mit negativen Vorzeichen, weil die Begrenzungsflächen auf der Seite abnehmender Koordinaten liegen.

Auf die Grundfläche muß nun eine solche Spannung wirken, daß diesen drei Kräften das Gleichgewicht gehalten wird. Die Massenkräfte fallen heraus, weil sie dem Volumen proportional sind, also bei hinreichend kleinem Volumen mit der dritten Potenz der Linearabmessungen klein werden, während die von den Spannungen herrührenden Kräfte den Flächen proportional sind, also mit der zweiten Potenz abnehmen, so daß die Massenkräfte gegen die Spannungskräfte bei hinreichend kleinem Tetraeder verschwinden.

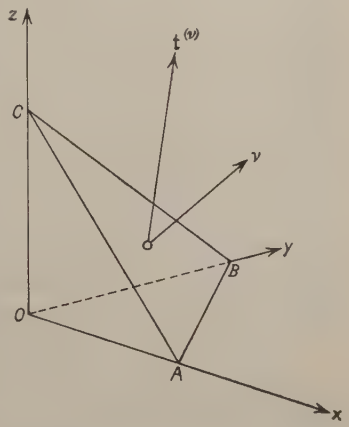
Ist $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ der zur Grundfläche gehörende Spannungsvektor, so ist die von den Spannungen auf die Grundfläche ausgeübte Kraft $\mathfrak{t}^{(\nu)}\,dF$. Soll

diese mit den oben genannten Spannungskräften im Gleichgewicht sein, so muß

$$(1) \qquad t^{(\nu)} = t^{(x)} \cos(\nu, x) + t^{(y)} \cos(\nu, y) + t^{(z)} \cos(\nu, z)$$

sein. Diese Gleichung liefert uns den Spannungsvektor für ein beliebig orientiertes Flächenelement, wenn die Spannungsvektoren in den Koordinatenebenen gegeben sind.

Fig. 64.



Gleichgewicht an der Oberfläche. Schneiden wir das Tetraeder so aus dem Körper heraus, daß die Grundfläche ein Flächenelement do der Oberfläche ist, auf welches in den drei Koordinatenrichtungen die Kräfte Ξdo, $H do$, $Z do$ wirken, so müssen diese mit den Spannungskräften der in den Koordinatenebenen liegenden Dreiecke im Gleichgewicht sein. Sind $e^{(x)}$, $e^{(y)}$, $e^{(z)}$ drei Einheitsvektoren in Richtung der Achsen, so ist der Kraftvektor, welcher auf do wirkt,

$$(\Xi e^{(x)} + H e^{(y)} + Z e^{(z)})\, do,$$

und das Gleichgewicht erfordert somit

$$(2) \qquad \Xi e^{(x)} + H e^{(y)} + Z e^{(z)} = t^{(x)} \cos(\nu, x) + t^{(y)} \cos(\nu, y) + t^{(z)} \cos(\nu, z).$$

Zerlegen wir diese Vektorgleichung in drei Gleichungen für die Komponenten nach den drei Achsenrichtungen, so erhalten wir

$$(3) \qquad \begin{cases} \Xi = \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{yx} \cos(\nu, y) + \tau_{zx} \cos(\nu, z), \\ H = \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{zy} \cos(\nu, z), \\ Z = \tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) \end{cases}$$

als Gleichgewichtsbedingungen für die Oberflächenelemente.

Zweite Anwendung des Gleichgewichtsgrundsatzes. Wir denken uns ein beliebiges endliches Volumen aus dem Innern des Körpers herausgeschnitten. Auf das herausgeschnittene Stück wirken dann die folgenden Kräfte: auf die Volumenelemente im Innern die Massenkräfte $X d\omega$, $Y d\omega$, $Z d\omega$, auf die Schnittfläche die Spannungskräfte:

$$t^{(\nu)} dF = \{t^{(x)} \cos(\nu, x) + t^{(y)} \cos(\nu, y) + t^{(z)} \cos(\nu, z)\}\, dF$$

oder, in Komponenten nach den drei Achsenrichtungen geschrieben,

in der x-Richtung: $\{\sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{yx} \cos(\nu, y) + \tau_{zx} \cos(\nu, z)\}\, dF$,
„ „ y-Richtung: $\{\tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{zy} \cos(\nu, z)\}\, dF$,
„ „ z-Richtung: $\{\tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z)\}\, dF$.

Soll Gleichgewicht herrschen, so muß für jede der drei Achsenrichtungen die Summe aller Kräfte verschwinden.

$$\iiint X\,d\omega + \iint \{\sigma_x \cos(\nu,x) + \tau_{yx}\cos(\nu,y) + \tau_{zx}\cos(\nu,z)\}\,dF = 0,$$
$$\iiint Y\,d\omega + \iint \{\tau_{xy}\cos(\nu,x) + \sigma_y \cos(\nu,y) + \tau_{zy}\cos(\nu,z)\}\,dF = 0,$$
$$\iiint Z\,d\omega + \iint \{\tau_{xz}\cos(\nu,x) + \tau_{yz}\cos(\nu,y) + \sigma_z \cos(\nu,z)\}\,dF = 0.$$

Die Flächenintegrale können wir in Raumintegrale verwandeln. Bezeichnen wir durch

$\bar{t}^{(x)}$ den Vektor mit den Komponenten $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$,
$\bar{t}^{(y)}$ „ „ „ „ „ $\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}$,
$\bar{t}^{(z)}$ „ „ „ „ „ $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$,

so ist $\sigma_x\cos(\nu,x) + \tau_{yx}\cos(\nu,y) + \tau_{zx}\cos(\nu,z)$ die Normalkomponente $\bar{t}_\nu^{(x)}$ von $\bar{t}^{(x)}$. Die Gleichgewichtsbedingung für die x-Richtung wird also

$$\iiint X\,d\omega + \iint \bar{t}_\nu^{(x)}\,dF = 0.$$

Nun ist aber nach dem Gaußschen Integralsatz (1. Bd., S. 71)

$$\iint \bar{t}_\nu^{(x)}\,dF = \iiint \operatorname{div}\bar{t}^{(x)}\,d\omega,$$

so daß wir als Gleichgewichtsbedingung

$$\iiint \{\operatorname{div}\bar{t}^{(x)} + X\}\,d\omega = 0$$

und in gleicher Weise

$$\iiint \{\operatorname{div}\bar{t}^{(y)} + Y\}\,d\omega = 0, \quad \iiint \{\operatorname{div}\bar{t}^{(z)} + Z\}\,d\omega = 0$$

erhalten. Sollen diese Bedingungen erfüllt sein, wie immer wir unser Volumen aus dem Innern des Körpers herausschneiden, so muß

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}\bar{t}^{(x)} + X = \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + X = 0, \\ \operatorname{div}\bar{t}^{(y)} + Y = \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + Y = 0, \\ \operatorname{div}\bar{t}^{(z)} + Z = \dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + \dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

sein.

Zum Gleichgewicht ist noch erforderlich, daß auch die Summe der Momente aus Massenkräften und Spannungskräften verschwindet. Die Komponente aller Momente um die z-Achse ist

$$M_z = \iiint (Xy - Yx)\,d\omega + \iint \{\bar{t}_\nu^{(x)}\,y - \bar{t}_\nu^{(y)}\,x\}\,dF.$$

Hier formen wir die Flächenintegrale in der gleichen Weise um wie oben. Es ist

$$\operatorname{div} y\,\bar{t}^{(x)} = y\operatorname{div}\bar{t}^{(x)} + \bar{t}^{(x)}\cdot\operatorname{grad} y,$$
$$\operatorname{div} x\,\bar{t}^{(y)} = x\operatorname{div}\bar{t}^{(y)} + \bar{t}^{(y)}\cdot\operatorname{grad} x.$$

Nun hat grad y nur die Komponente 1 in der y-Richtung, also ist

$$\bar{\mathfrak{t}}^{(x)} \cdot \operatorname{grad} y = \tau_{yx},$$
$$\bar{\mathfrak{t}}^{(y)} \cdot \operatorname{grad} x = \tau_{xy},$$

so daß

$$\int\int \{\bar{t}_\nu^{(x)} y - \bar{t}_\nu^{(y)} x\}\, dF = \int\int\int \{y \operatorname{div} \bar{\mathfrak{t}}^{(x)} - x \operatorname{div} \bar{\mathfrak{t}}^{(y)}\}\, d\omega + \int\int\int (\tau_{yx} - \tau_{xy})\, d\omega$$

wird. Es ist also das Moment um die z-Achse:

$$M_z = \int\int\int \{y(\operatorname{div} \bar{\mathfrak{t}}^{(x)} + X) - x(\operatorname{div} \bar{\mathfrak{t}}^{(y)} + Y)\}\, d\omega + \int\int\int (\tau_{yx} - \tau_{xy})\, d\omega.$$

Nach (4) fällt das erste Integral fort. Soll also $M_z = 0$ sein, wie auch immer das Volumen aus dem Körper herausgeschnitten wird, so muß

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \tag{5}$$

sein, und ebenso für die anderen Achsenrichtungen

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Es wird also

$$\mathfrak{t}^{(x)} = \bar{\mathfrak{t}}^{(x)}, \quad \mathfrak{t}^{(y)} = \bar{\mathfrak{t}}^{(y)}, \quad \mathfrak{t}^{(z)} = \bar{\mathfrak{t}}^{(z)}. \tag{5a}$$

2. Der Spannungstensor. Wir wollen den Spannungszustand noch einer genaueren Betrachtung unterziehen, insbesondere wollen wir berechnen, in welcher Weise bei einer Drehung des Koordinatensystems die auf das gedrehte Koordinatensystem bezogenen Spannungskomponenten sich aus den Spannungskomponenten des ursprünglichen Systems berechnen. Wir gehen aus von der Gl. (1):

$$\mathfrak{t}^{(\nu)} = \mathfrak{t}^{(x)} \cos(\nu, x) + \mathfrak{t}^{(y)} \cos(\nu, y) + \mathfrak{t}^{(z)} \cos(\nu, z)$$

und der sogenannten Symmetriebedingung (5)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Gl. (1) ist formal identisch mit der Gl. (1) im 1. Bd., II, § 4, S. 77, woraus wir entnehmen, daß der Inbegriff der neun Spannungskomponenten einen sogenannten „Tensor“ (der Name stammt von unserem Spezialfall) darstellt, und zwar wegen der Symmetrieeigenschaft (5) einen „symmetrischen Tensor“. Wir werden also die dort gefundenen allgemeinen Ergebnisse hier in ihrer besonderen physikalischen Bedeutung wiederfinden.

Wir betrachten ein Koordinatensystem, dessen Achsen ξ, η, ζ mit den xyz-Achsen die Richtungskosinus $\cos(\xi, x)$, $\cos(\eta, x)$, $\cos(\zeta, x)$ usw. bilden. Die Spannungsvektoren für die Flächenelemente senkrecht zu den neuen Achsen seien:

$\mathfrak{t}^{(\xi)}$ mit den Komponenten σ_ξ, $\tau_{\xi\eta}$, $\tau_{\xi\zeta}$,
$\mathfrak{t}^{(\eta)}$ „ „ „ $\tau_{\eta\xi}$, σ_η, $\tau_{\eta\zeta}$,
$\mathfrak{t}^{(\zeta)}$ „ „ „ $\tau_{\zeta\xi}$, $\tau_{\zeta\eta}$, σ_ζ.

Wir erhalten sie, wenn wir in Gl. (1) der Reihe nach $\nu = \xi, \eta, \zeta$ setzen, zu

$$(6)\quad \begin{cases} t^{(\xi)} = t^{(x)}\cos(\xi, x) + t^{(y)}\cos(\xi, y) + t^{(z)}\cos(\xi, z), \\ t^{(\eta)} = t^{(x)}\cos(\eta, x) + t^{(y)}\cos(\eta, y) + t^{(z)}\cos(\eta, z), \\ t^{(\zeta)} = t^{(x)}\cos(\xi, x) + t^{(y)}\cos(\xi, y) + t^{(z)}\cos(\xi, z). \end{cases}$$

Die Umrechnung der Komponenten erhalten wir hieraus, wenn wir die drei Gleichungen je mit einem in die ξ-, η- oder ζ-Achse fallenden Einheitsvektor skalar multiplizieren. Nennen wir diese Einheitsvektoren $e^{(\xi)}$, $e^{(\eta)}$, $e^{(\zeta)}$, so ist z. B.

$$t^{(\xi)} \cdot e^{(\xi)} = \sigma_\xi, \quad t^{(x)} \cdot e^{(\xi)} = \sigma_x \cos(\xi, x) + \tau_{xy}\cos(\xi, y) + \tau_{xz}\cos(\xi, z).$$
$$t^{(\xi)} \cdot e^{(\eta)} = \tau_{\xi\eta}, \quad t^{(y)} \cdot e^{(\xi)} = \tau_{yx}\cos(\xi, x) + \sigma_y \cos(\xi, y) + \tau_{yz}\cos(\xi, z).$$
$$t^{(\xi)} \cdot e^{(\zeta)} = \tau_{\xi\zeta}, \quad t^{(z)} \cdot e^{(\xi)} = \tau_{zx}\cos(\xi, x) + \tau_{zy}\cos(\xi, y) + \sigma_z \cos(\xi, z).$$

Die Multiplikation von (6) mit $e^{(\eta)}$ ergibt dann z. B.:

$$(7)\quad t^{(\xi)} \cdot e^{(\eta)} = \tau_{\xi\eta} = \begin{cases} \sigma_x \cos(\xi, x)\cos(\eta, x) + \tau_{xy}\cos(\xi, x)\cos(\eta, y) \\ \qquad + \tau_{xz}\cos(\xi, x)\cos(\eta, z) \\ + \tau_{yx}\cos(\xi, y)\cos(\eta, x) + \sigma_y \cos(\xi, y)\cos(\eta, y) \\ \qquad + \tau_{yz}\cos(\xi, y)\cos(\eta, z) \\ + \tau_{zx}\cos(\xi, z)\cos(\eta, x) + \tau_{zy}\cos(\xi, z)\cos(\eta, y) \\ \qquad + \sigma_z \cos(\xi, z)\cos(\eta, z). \end{cases}$$

[Siehe Gl. (3) a. a. O].

Analoge Gleichungen ergeben sich für die anderen Spannungskomponenten. Am leichtesten merkt man sich diese Formeln nach der folgenden Regel: Die Spannungen für das gedrehte System ergeben sich, indem man die Spannungskomponenten des ursprünglichen Systems jede mit zwei Richtungskosinus multipliziert und dann addiert. Von den Indizes der Richtungskosinus stimmen die ersten immer mit den Indizes der Spannungen auf der linken Seite überein, während die beiden letzten gleich den Indizes der Spannung sind, welche multipliziert wird; τ_{xy} und τ_{yx} usw. sind dabei als verschieden zu behandeln.

Spannungshauptachsen. Wenn man die Spannungen an einem Punkte untersucht, so kann man fragen, ob es möglich ist, die Richtungen der Koordinaten so zu wählen, daß sich besonders einfache Werte ergeben. Das ist in der Tat möglich, und zwar in der Weise, daß sich immer Achsenrichtungen finden lassen, für welche die Schubspannungskomponenten verschwinden, so daß bloß die Normalspannungen übrig bleiben. (Es sei gleich bemerkt, daß in einem elastisch deformierten Körper, in welchem die Spannungen sich von Punkt zu Punkt ändern, durch eine solche Koordinatenwahl nicht für alle Punkte gleichzeitig, sondern nur für einzelne diese Vereinfachung erzielt werden kann.) Diejenigen Achsenrichtungen, für welche die Schubspannungen verschwinden,

nennt man „Spannungshauptrichtungen“ oder „Spannungshauptachsen“; man bestimmt sie folgendermaßen. Es sei in Gl. (1) ν eine Spannungshauptrichtung, σ sei der Wert der Normalspannung. Da keine Schubspannungen auftreten, hat der Spannungsvektor $t^{(\nu)}$ die Richtung von ν, also in der x-, y- und z-Richtung die Komponenten $\sigma\cos(\nu, x)$, $\sigma\cos(\nu, y)$, $\sigma\cos(\nu, z)$. Zerlegen wir also die Gl. (1) in drei Komponentengleichungen, indem wir die Komponenten der Vektoren in der x-, y- und z-Richtung nehmen, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sigma\cos(\nu, x) &= \sigma_x\cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y) + \tau_{xz}\cos(\nu, z),\\
\sigma\cos(\nu, y) &= \tau_{yx}\cos(\nu, x) + \sigma_y\cos(\nu, y) + \tau_{yz}\cos(\nu, z),\\
\sigma\cos(\nu, z) &= \tau_{zx}\cos(\nu, x) + \tau_{zy}\cos(\nu, y) + \sigma_z\cos(\nu, z)
\end{aligned}$$

oder

$$(8)\qquad \begin{cases}
(\sigma_x - \sigma)\cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y) + \tau_{xz}\cos(\nu, z) = 0,\\
\tau_{yx}\cos(\nu, x) + (\sigma_y - \sigma)\cos(\nu, y) + \tau_{yz}\cos(\nu, z) = 0,\\
\tau_{zx}\cos(\nu, x) + \tau_{zy}\cos(\nu, y) + (\sigma_z - \sigma)\cos(\nu, z) = 0.
\end{cases}$$

Diese Gleichungen sind homogene lineare Gleichungen zur Bestimmung von $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$, $\cos(\nu, z)$, d. h. zur Bestimmung der Richtung der Hauptachsen. Sie haben nur dann eine Lösung, wenn die Determinantengleichung

$$(9)\qquad \begin{vmatrix}
\sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\
\tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz}\\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma
\end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Da diese Determinante symmetrisch ist (wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$), hat die Gl. (9) sicher drei reelle Wurzeln, die wir mit σ_1, σ_2, σ_3 bezeichnen. Setzen wir z. B. σ_1 in Gl. (8) ein, so erhalten wir die Werte $\cos(1, x)$, $\cos(1, y)$, $\cos(1, z)$ bis auf einen gemeinsamen Faktor, der sich aus der Bedingung

$$(10)\qquad \cos^2(1, x) + \cos^2(1, y) + \cos^2(1, z) = 1$$

bestimmt. Damit haben wir eine der Hauptachsen gefunden, die beiden anderen ergeben sich, wenn man σ_1 durch σ_2 und σ_3 ersetzt. Nach 1. Bd., II, § 4 stehen die so gewonnenen drei Hauptachsenrichtungen aufeinander senkrecht. Numerieren wir die Hauptspannungen so, daß σ_1 die größte, σ_2 die mittlere und σ_3 die kleinste der Hauptspannungen ist, so sind σ_1 und σ_3 Maximum und Minimum aller Normalspannungen, die für irgend eine Achsenrichtung überhaupt vorkommen.

Hervorgehoben sei die Analogie unseres Ergebnisses mit bekannten Tatsachen der Vektorrechnung. Durch Angabe der Hauptspannungen und der zugehörigen Hauptachsenrichtungen ist ein Spannungszustand in analoger Weise gegeben, wie wenn wir einen Vektor durch seinen Betrag und seine Richtung geben, während die Angabe der Spannungs-

komponenten in bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem der Angabe der Vektorkomponenten entspricht. Wie der Betrag eines Vektors, so sind auch die Hauptspannungen eines Spannungszustandes von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Wir schließen daraus, daß auch die Koeffizienten der die Hauptspannungen bestimmenden Gl. (9) von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein müssen. Schreiben wir die Gl. (9) aus, so lautet sie (nach Multiplikation mit -1)

$$\begin{aligned}\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_z\sigma_x - \tau_{zx}^2)\\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0.\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems bezeichnet man die Koeffizienten als die „Invarianten“ des Spannungszustandes. Ihre Bedeutung ergibt sich in Übereinstimmung mit der elementaren Algebra, wenn wir das Koordinatensystem in die Hauptachsen legen zu:

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_z\sigma_x - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases}$$

Besonders einfach werden die Formeln, welche die Spannungskomponenten des xyz-Systems durch die Hauptspannungen ausdrücken. Sind $\cos(x, h)$, $\cos(y, h)$, $\cos(z, h)$ die Richtungskosinus der $h$ten Hauptachse gegen x-, y-, und z-Achse, so wird

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma_x = \sum \sigma_h \cos^2(x, h) \\ \tau_{xy} = \sum \sigma_h \cos(x, h)\cos(y, h) \end{cases} \qquad h = 1, 2, 3$$

usw. durch zyklische Vertauschung von x, y, z.

3. Der Verzerrungstensor. Wenn ein Körper elastisch deformiert wird, so ändern sich die Entfernungen seiner Punkte und die Winkel zwischen zwei Strecken. Als Maß für die Verlängerung einer Strecke nehmen wir die Verlängerung der Längeneinheit auf ihr, also den Quotienten aus der Verlängerung und der ursprünglichen Länge. Diesen Quotienten bezeichnen wir als die „Dehnung“. Die Winkeländerungen werden direkt durch die Differenz der Winkel vor und nach der Deformation gemessen.

Wir wollen nun zunächst ausrechnen, welche Dehnung Strecken erfahren, die ursprünglich in der Richtung der Koordinatenachsen lagen, und wie sich die ursprünglich rechten Winkel ändern, welche von achsenparallelen Strecken eingeschlossen waren. Dabei beschränken wir uns stets auf „kleine Verschiebungen“, d. h. Verschiebungen, welche mit ihren Ableitungen so klein sind, daß wir quadratische Ausdrücke (Pro-

dukte zweier Verschiebungen oder zweier Ableitungen usw.) gegenüber den linearen Größen (Verschiebungen oder Ableitungen) vernachlässigen können.

Wir betrachten also zwei Punkte A und B, welche, um die Strecke dx voneinander entfernt, auf einer Parallelen zur x-Achse liegen. Da wir nur kleine Verschiebungen betrachten, wird die Länge dieser Strecke durch eine Verschiebung ihrer Endpunkte in der y- oder

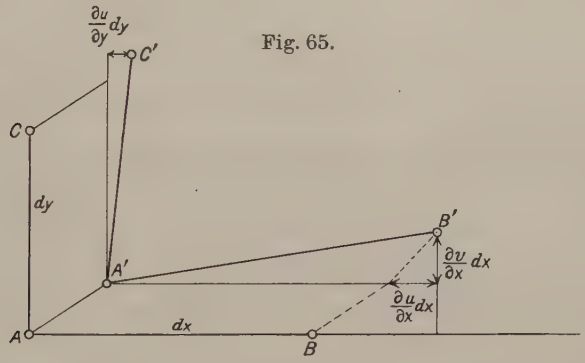


Fig. 65.

z-Richtung nicht geändert. Wir brauchen also nur die Verschiebung in der x-Richtung zu betrachten. Verschiebt sich der Punkt A um die Größe u in der x-Richtung, so verschiebt sich B um $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Es ist also die Entfernung von A und B nach der Deformation gleich $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, die Verlängerung somit $\frac{\partial u}{\partial x} dx$. Wir dividieren dieselbe durch die ursprüngliche Länge dx und erhalten dadurch die „Dehnung in der x-Richtung“

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ebenso ergeben sich die Dehnungen in den anderen Koordinatenrichtungen, also

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{13}$$

Wir betrachten nun die Drehung der gleichen Strecke zur y-Achse hin. Diese wird durch die Verschiebung in der x-Richtung nicht beeinflußt. Verschiebt sich der Punkt A um v in der y-Richtung, so verschiebt sich B um $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$. Da wir bei kleinen Winkeln den Winkel gleich seinem Tangens setzen können, so ergibt sich für die

Drehung der Strecke $A-B$ nach der y-Achse hin der Wert $\frac{\partial v}{\partial x}$. Wählen wir nun eine zweite Strecke, welche von A ausgehend in der y-Richtung liegt und die Länge dy hat — ihr Endpunkt sei C —, so verschiebt sich C um $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ in der x-Richtung, wenn u wieder die Verschiebung von A ist. Es dreht sich also die Strecke $A-C$ um den Winkel $\frac{\partial u}{\partial y}$ zur x-Achse hin. Der von $A-B$ und $A-C$ ursprünglich eingeschlossene rechte Winkel wird also durch die beiden Drehungen um insgesamt $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ verkleinert. Wir bezeichnen diese Winkeländerung mit γ_{xy} und erhalten also mit gleichartigen Überlegungen für die anderen Koordinatenebenen:

$$(14) \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}. \end{cases}$$

Die hier gewonnenen Größen ε und γ beschreiben uns den „Verzerrungszustand“ in dem elastisch deformierten Körper. Sie geben uns für drei von A ausgehende, in den Koordinatenrichtungen liegende Strecken die Dehnungen und Winkeländerungen an. Zu einer ausreichenden Beschreibung des Verzerrungszustandes durch diese Größen gehört dann, daß wir aus ihnen auch die Dehnungen und Winkeländerungen für drei beliebige, aufeinander senkrechte andere Strecken berechnen können. Das geschieht durch einfache Umrechnung, indem wir parallel zu diesen neuen Strecken ein neues Koordinatensystem legen. Sind die Richtungskosinus der $\xi\eta\zeta$-Achsen gegen die xyz-Achsen $\cos(\xi, x)$, $\cos(\xi, y)$ usw., so transformieren sich sowohl die Koordinaten als die Verschiebungen nach den gleichen Formeln; u', v', w' seien die auf die neuen Achsen bezogenen Verschiebungskomponenten. Dann ist:

$$\begin{aligned} u' &= u\cos(\xi, x) + v\cos(\xi, y) + w\cos(\xi, z), \\ x &= \xi\cos(\xi, x) + \eta\cos(\eta, x) + \zeta\cos(\zeta, x); \\ v' &= u\cos(\eta, x) + v\cos(\eta, y) + w\cos(\eta, z), \\ y &= \xi\cos(\xi, y) + \eta\cos(\eta, y) + \zeta\cos(\zeta, y); \\ w' &= u\cos(\zeta, x) + v\cos(\zeta, y) + w\cos(\zeta, z), \\ z &= \xi\cos(\xi, z) + \eta\cos(\eta, z) + \zeta\cos(\zeta, z). \end{aligned}$$

Die Umrechnung

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u'}{\partial \xi} = \frac{\partial u'}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial u'}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial u'}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) \text{ usw.}$$

ergibt dann, wenn wir

$$2\varepsilon_x = \gamma_{xx}, \quad 2\varepsilon_y = \gamma_{yy}, \quad 2\varepsilon_z = \gamma_{zz}$$

setzen:

(15)
$$\begin{cases} \gamma_{\xi\xi} = \gamma_{xx}\cos(\xi,x)\cos(\xi,x) + \gamma_{xy}\cos(\xi,x)\cos(\xi,y) + \gamma_{xz}\cos(\xi,x)\cos(\xi,z), \\ \qquad + \gamma_{yx}\cos(\xi,y)\cos(\xi,x) + \gamma_{yy}\cos(\xi,y)\cos(\xi,y) + \gamma_{yz}\cos(\xi,y)\cos(\xi,z), \\ \qquad + \gamma_{zx}\cos(\xi,z)\cos(\xi,x) + \gamma_{zy}\cos(\xi,z)\cos(\xi,y) + \gamma_{zz}\cos(\xi,z)\cos(\xi,z); \\ \gamma_{\xi\eta} = \gamma_{xx}\cos(\xi,x)\cos(\eta,x) + \gamma_{xy}\cos(\xi,x)\cos(\eta,y) + \gamma_{xz}\cos(\xi,x)\cos(\eta\ z), \\ \qquad \gamma_{yx}\cos(\xi,y)\cos(\eta,x) + \gamma_{yy}\cos(\xi,y)\cos(\eta,y) + \gamma_{yz}\cos(\xi,y)\cos(\eta,z), \\ \qquad \gamma_{zx}\cos(\xi,z)\cos(\eta,x) + \gamma_{zy}\cos(\xi,z)\cos(\eta,y) + \gamma_{zz}\cos(\xi,z)\cos(\eta,z). \end{cases}$$

Wir erkennen, daß die Umrechnungsformeln für die Verzerrungskomponenten genau die gleichen sind wie die Formeln, die wir oben für die Spannungstransformation gefunden hatten. Wir können deshalb die Ergebnisse ohne weiteres übertragen (s. auch 1. Bd., S. 86) und erhalten: Es gibt stets in einem Punkte drei zueinander senkrechte Richtungen, die „Hauptverzerrungsrichtungen", für welche die Verzerrungskomponenten mit gemischten Indizes verschwinden, die also auch nach der Deformation senkrecht bleiben. Die zugehörigen Dehnungen, die „Hauptdehnungen", seien, der Größe nach geordnet, mit ε_1, ε_2, ε_3 bezeichnet. Dann sind ε_1 und ε_3 Maximum und Minimum der überhaupt für irgend eine Richtung vorkommenden Dehnungen. Eine besonders einfache Gestalt nehmen die Formeln (15) wieder an, wenn wir die Verzerrungskomponenten für das ursprüngliche Koordinatensystem durch die Hauptdehnungen ε_1, ε_2, ε_3 ausdrücken. Sind $\cos(x,h)$, $\cos(y,h)$, $\cos(z,h)$ die Richtungskosinus der h-ten Hauptachse gegen die ursprünglichen Achsen, so wird:

(16)
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \sum \varepsilon_h \cos^2(x,h), \\ \gamma_{xy} = 2\sum \varepsilon_h \cos(x,h)\cos(y,h) \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Wie bei den Spannungen, so finden wir auch hier in den Koeffizienten der die Hauptdehnungen bestimmenden Determinantengleichung

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\varepsilon_y - \varepsilon) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & (\varepsilon_z - \varepsilon) \end{vmatrix} = 0,$$

die sogenannten „Invarianten des Verzerrungszustandes“:

$$(18)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \\ \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{cases}$$

§ 3. Das Hookesche Gesetz und die Grundgleichungen.

1. Das Hookesche Gesetz. Zur Aufstellung der Differentialgleichungen fehlt uns noch die Beziehung zwischen den Spannungen und den Verzerrungsgrößen. Diese kann natürlich nur aus der Erfahrung entnommen werden. Wir beschränken uns auf den Fall des homogenen, isotropen Körpers, d. h. auf ein Material, dessen elastische Eigenschaften an allen Punkten des Körpers die gleichen sind, und bei dem keine Richtung vor der anderen ausgezeichnet ist.

Für ein solches Material müssen offenbar die Hauptrichtungen der Spannungen mit den Hauptrichtungen der Verzerrung zusammenfallen, denn in den Hauptspannungsrichtungen wird das Material nur auf Zug oder Druck beansprucht, so daß offenbar Winkeländerungen zwischen diesen Achsen nicht auftreten können, wenn wir nicht eine Anisotropie annehmen.

Wir müssen also den Zusammenhang zwischen den Hauptdehnungen und den Hauptspannungen mathematisch formulieren. Für kleine Gestaltsänderungen, auf die wir uns immer beschränken, entnehmen wir den Experimenten den folgenden Tatbestand. Wird ein Körper durch eine Zugkraft belastet, so erfährt er in Richtung der Zugspannung eine Dehnung, welche der Zugspannung proportional ist. Gleichzeitig erfährt er eine seitliche Zusammenziehung, welche der Längsdehnung ebenfalls proportional ist. Wird ein Körper von mehreren Kräften beansprucht, so superponieren sich die Wirkungen der einzelnen Kräfte. Betrachten wir also die Richtung der ersten Hauptspannung, so erhalten wir zunächst eine Dehnung, welche σ_1 proportional ist, also vom Betrage σ_1/E, wenn wir den Proportionalitätsfaktor in der üblichen Weise mit $1/E$ bezeichnen. E ist eine Materialkonstante, die wir als „Elastizitätsmodul“ bezeichnen. Gleichzeitig rufen in der Richtung von σ_1 die

beiden anderen Hauptspannungen σ_2 und σ_3 eine Zusammenziehung (negative Dehnung) hervor, welche ein bestimmter Bruchteil der von diesen Spannungen hervorgerufenen Längsdehnungen $\frac{\sigma_2}{E}$ und $\frac{\sigma_3}{E}$ ist, also $\frac{\sigma_2}{mE}$ und $\frac{\sigma_3}{mE}$, wenn wir den Bruchteil durch $\frac{1}{m}$ bezeichnen, wobei m, die sogenannte „Querkontraktionszahl", ebenfalls eine der Erfahrung zu entnehmende Materialkonstante ist.

Insgesamt erhalten wir somit in der Richtung der Hauptspannung σ_1 eine Dehnung

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left\{\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right\} = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1}\right\},$$

und in den anderen Hauptspannungsrichtungen entsprechend

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon_2 = \dfrac{m+1}{Em}\left\{\sigma_2 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1}\right\}, \\ \varepsilon_3 = \dfrac{m+1}{Em}\left\{\sigma_3 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1}\right\}. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten auch für Druckbeanspruchung, wenn wir die Vorzeichen: negatives σ = Druckbeanspruchung, negative Dehnung = Zusammenziehung richtig deuten.

Mit Hilfe der Transformationsformeln [§ 2, (12) und (16)] für die Spannungs- und Verzerrungskomponenten können wir die Formeln (1) ohne weiteres von den Hauptspannungsrichtungen auf das xyz-System übertragen und erhalten so die allgemeine Form des Zusammenhangs zwischen Spannungs- und Verzerrungsgrößen. Sind die Richtungskosinus der h-ten Hauptachse gegen die Koordinatenachsen $\cos(x, h)$, $\cos(y, h)$, $\cos(z, h)$, so lassen sich die Transformationsformeln für die Spannungen und Dehnungen in folgender einfachen Weise schreiben:

$$\sigma_x = \sum \sigma_h \cos^2(x, h), \qquad \varepsilon_x = \sum \varepsilon_h \cos^2(x, h),$$
$$\tau_{xy} = \sum \sigma_h \cos(x, h)\cos(y, h), \qquad \gamma_{xy} = 2\sum \varepsilon_h \cos(x, h)\cos(y, h).$$

Schreiben wir nun die Gleichungen (1):

$$\varepsilon_1 = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_1 - \frac{s}{m+1}\right\},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_2 - \frac{s}{m+1}\right\},$$
$$\varepsilon_3 = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_3 - \frac{s}{m+1}\right\},$$

wobei wir beachten, daß $s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ist, so erhalten wir durch Multiplikation mit $\cos^2(x, 1)$, $\cos^2(x, 2)$, $\cos^2(x, 3)$ und Addition:

$$(2') \qquad \varepsilon_x = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_x - \frac{s}{m+1}\right\}.$$

[NB. $\cos^2(x, 1) + \cos^2(x, 2) + \cos^2(x, 3) = 1$.]

Multiplizieren wir rechts und links mit $\cos(x, 1)\cos(y, 1)$, $\cos(x, 2)\cos(y, 2)$, $\cos(x, 3)\cos(y, 3)$ und addieren, so ergibt sich

$$(2'') \qquad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{m+1}{Em}\tau_{xy}.$$

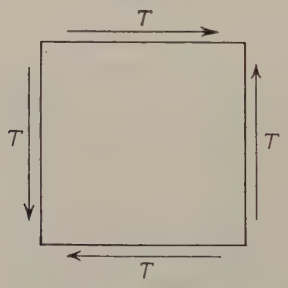
[NB. $\cos(x, 1)\cos(y, 1) + \cos(x, 2)\cos(y, 2) + \cos(x, 3)\cos(y, 3) = 0$.]

Entsprechende Formeln für die anderen Koordinaten ergeben, wenn wir noch zur Abkürzung $G = \dfrac{Em}{2(m+1)}$ setzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{2G}\left\{\sigma_x - \dfrac{s}{m+1}\right\}, & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{2G}\left\{\sigma_y - \dfrac{s}{m+1}\right\}, & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{2G}\left\{\sigma_z - \dfrac{s}{m+1}\right\}, & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx}. \end{cases}$$

Dies sind die sogenannten „Spannungs-Dehnungsgleichungen“ in der allgemeinen Form. Die physikalische Bedeutung von G erhalten wir, wenn

Fig. 66.



wir uns vorstellen, daß ein Würfel an der Ober- und Unterseite, sowie rechts und links durch reine Tangentialkräfte T, wie man sagt „auf Schub“ beansprucht wird. Er erfährt dabei eine Winkeländerung $\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$ $\left(F = \text{Würfelfläche},\ \tau_{xy} = \dfrac{T}{F}\right)$, G liefert also unmittelbar das Verhältnis von Schubspannung und Winkeländerung; man bezeichnet G als den „Schubmodul“.

2. Die Grundgleichungen. Die Spannungs-Dehnungsgleichungen (2), die wir auch nach den Spannungen auflösen können:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma_x = 2G\left\{\varepsilon_x + \dfrac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = 2G\left\{\varepsilon_y + \dfrac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = 2G\left\{\varepsilon_z + \dfrac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

gesetzt ist, und die Gleichgewichtsgleichungen § 2, (4)

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{t}^{(x)} + X = \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{t}^{(y)} + Y = \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{t}^{(z)} + Z = \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

bilden das vollständige System von partiellen Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen. Zu ihnen treten Randbedingungen hinzu, die in der mannigfachsten Weise gegeben sein können. Wir betrachten insbesondere die beiden wichtigsten Spezialfälle, daß entweder an der Oberfläche

$$(5)\qquad u,\ v,\ w = \text{gegeben}$$

sind, oder daß an der Oberfläche die Belastung durch äußere Kräfte (Ξ, H, Z pro Flächeneinheit in den drei Koordinatenrichtungen) gegeben ist, d. h. daß an der Oberfläche die Bedingungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{t}_\nu^{(x)} = \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y) + \tau_{xz}\cos(\nu, z) = \Xi, \\ \mathfrak{t}_\nu^{(y)} = \tau_{xy}\cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{yz}\cos(\nu, z) = H, \\ \mathfrak{t}_\nu^{(z)} = \tau_{xz}\cos(\nu, x) + \tau_{yz}\cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) = Z \end{cases}$$

erfüllt sein müssen.

Aus den Gl. (3) und (4) erhalten wir durch Elimination Differentialgleichungen für die Verschiebungen oder Spannungen allein. Je nachdem, ob an der Oberfläche die Verschiebungen oder die Spannungen gegeben sind, wird es zweckmäßig sein, das eine oder andere System zu benutzen.

Setzen wir die Ausdrücke für die Spannungen aus (3) in die Gleichgewichtsbedingungen (4) ein, so erhalten wir das Gleichungssystem für die Verschiebungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} G\left\{\Delta u + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right\} + X = 0, \\ G\left\{\Delta v + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right\} + Y = 0, \\ G\left\{\Delta w + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right\} + Z = 0, \end{cases}$$

wo $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ usw. gesetzt ist.

Differenzieren wir hier die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und addieren, so erhalten wir, wenn zur Abkürzung $k = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}$ gesetzt wird:

$$(8)\qquad 2G\frac{m-1}{m-2}\Delta\theta + k = 0.$$

An Massenkräften werden wir nur die Schwerkraft und Zentrifugalkräfte betrachten, für welche $\Delta X = \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial z^2} = 0$, $\Delta Y = 0$, $\Delta Z = 0$ ist. Wenden wir also die Operation Δ auf die Gl. (7) an, so ergibt sich für diese Fälle:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta\Delta u = 0, \\ \Delta\Delta v = 0, \\ \Delta\Delta w = 0. \end{cases}$$

Um die Gleichungen für die Spannungen zu gewinnen, eliminieren wir aus den Gl. (7) und (3) die Verschiebungsgrößen am einfachsten in der folgenden Weise. Wir gehen aus von den Gl. (7)

$$G\left\{\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\} + X = 0$$

und (3)

$$\sigma_x = 2G\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\theta}{m-2}\right\},$$

zu denen wir noch die aus (2) durch Addition hervorgehende Gleichung

$$(10)\qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2G}\frac{m-2}{m+1}s$$

hinzunehmen. Wenden wir auf (3) die Operation Δ an, so ergibt sich bei Berücksichtigung von (8)

$$\Delta\sigma_x = 2G\left\{\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\Delta\theta}{m-2}\right\} = 2G\frac{\partial \Delta u}{\partial x} - \frac{k}{m-1}. \tag{11}$$

Aus (7) folgt aber durch Differentiation

$$G\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{Gm}{m-2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{m}{2(m+1)}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

und somit aus (11)

$$\Delta\sigma_x = -2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{k}{m-1}.$$

oder

$$\Delta\sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{k}{m-1}. \tag{12}$$

In gleicher Weise erhalten wir für die Schubspannung

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right). \tag{13}$$

Die übrigen Gleichungen folgen aus (12) und (13) durch zyklische Vertauschung von x, y, z und X, Y, Z.

Treten als Massenkräfte nur Schwerkräfte auf, so sind X, Y, Z konstant, und die Gleichungen vereinfachen sich zu

$$\left\{\begin{array}{llll} \Delta\sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0, & \Delta\sigma_y + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0, & & \\ & \Delta\sigma_z + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0; & & \\ \Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = 0, & \Delta\tau_{yz} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z} = 0, & & \\ & \Delta\tau_{zx} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial x} = 0. & & \end{array}\right. \tag{14}$$

Es sei noch auf einen Punkt besonders hingewiesen: In der Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen sind x, y, z die Koordinaten des betrachteten Punktes im deformierten Körper. Im Verzerrungstensor bedeuten die Differentiationen aber solche nach den Koordinaten im undeformierten Zustand. Wenn wir beim Einsetzen der Spannungs-Dehnungsgleichungen in die Gleichgewichtsbedingungen diesen Unterschied nicht beachtet haben, so durften wir das nur deshalb tun, weil wir uns stets auf kleine Deformationen beschränken, für welche dieser Unterschied wegfällt. [Betrachten wir zur Erläuterung etwa eine Funktion $f(x)$ und sei $x = \xi + u$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

Setzen wir die beiden Differentialquotienten einander gleich, so bedeutet das, daß wir die kleine Größe $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ gegen 1 vernachlässigen.]

3. Berechnung der Verschiebungen aus den Spannungen. Je nach der besonderen Aufgabe wird man mit den Gleichungen für die Verschiebungen oder mit den Gleichungen für die Spannungen rechnen. Hat man die Verschiebungen ermittelt, so erhält man die Spannungen aus den Spannungs-Dehnungsgleichungen durch einfache Differentiation. Hat man aber die Spannungen ermittelt, so wird man nach den Verschiebungen fragen, zu deren Ermittlung es noch einer gewöhnlichen Integration bedarf. Sind nämlich die Spannungen und damit die Verzerrungskomponenten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ usw. bekannt, so gewinnt man die Verschiebungen, indem man zunächst aus den Verzerrungskomponenten durch Differentiation die sämtlichen zweiten Differentialquotienten der Verschiebungen berechnet. Es ist z. B.:

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right\}, & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Formeln für v und w erhält man hieraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z und u, v, w. Aus diesen zweiten Differentialquotienten gewinnt man die Verschiebungen durch zweimalige Integration. Damit sind dieselben bis auf lineare Funktionen bestimmt, welche wegen der Bestimmtheit der Verzerrungskomponenten die Form

$$(16)\quad \begin{cases} u = & \gamma y - \beta z + u_0, \\ v = -\gamma x & + \alpha z + v_0, \\ w = \beta x - \alpha z & + w_0 \end{cases}$$

haben müssen. Ist der Körper festgehalten, so bestimmen sich die sechs auftretenden Integrationsbeiwerte aus den Auflagerbedingungen. Ist der Körper nicht gelagert, sondern unter der Wirkung der gegebenen äußeren Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Lage des Körpers nur bis auf eine Verschiebung und Drehung bestimmt. Eine Verschiebung der Form (16) bedeutet nun in der Tat weiter nichts, wenn die Größen α, β, γ klein sind, als eine Parallelverschiebung in Richtung der drei Achsen um u_0, v_0, w_0 und eine deformationslose Drehung des Körpers um die Achsen vom Betrage α, β, γ. Jedenfalls sind die Größen α, β, γ so zu nehmen, daß die errechneten Verschiebungen klein sind.

§ 4. Die Minimalprinzipe. Eindeutigkeitssätze.

1. Die Formänderungsarbeit. Um ein Volumenelement eines Körpers elastisch zu deformieren, ist eine gewisse Arbeit (pro Volumeneinheit) erforderlich, welche während der Dauer der elastischen Deformation in demselben aufgespeichert bleibt und bei der Entlastung wieder frei wird. Es ist also die Deformationsarbeit gleich dem Energieinhalt e des Volumenteils im Zustand der Deformation. Wir berechnen sie folgendermaßen: Wir denken uns ein kleines Parallelepiped mit den Kanten a, b, c parallel zu den Hauptrichtungen der Spannungen und Dehnungen aus dem elastischen Körper herausgeschnitten. Ist dasselbe den Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 unterworfen, welche die Dehnungen ε_1, ε_2, ε_3 hervorbringen, so sind die Seitenlängen im Zustand der Deformation $a(1+\varepsilon_1)$, $b(1+\varepsilon_2)$, $c(1+\varepsilon_3)$. Vergrößern wir jetzt ε_1 um $\delta\varepsilon_1$, so wächst die Seite a um $a\delta\varepsilon_1$, und die Arbeit, welche die Spannung σ_1 leistet, wird Kraft $\times$ Weg $=$ Spannung $\times$ Fläche $\times$ Vergrößerung von a_1:

$$\sigma_1 \cdot (1+\varepsilon_2) b \cdot (1+\varepsilon_3) c \cdot a\delta\varepsilon_1.$$

Beschränken wir uns auf kleine Verschiebungen, so können ε_2 und ε_3 gegenüber 1 vernachlässigt werden, und wir erhalten für die Arbeit

$$abc\sigma_1\delta\varepsilon_1.$$

Dividieren wir durch das Volumen abc, so erhalten wir die Arbeit, welche auf die Volumeneinheit bei Vergrößerung von ε_1 um $\delta\varepsilon_1$ geleistet wird. Das ist aber die Zunahme der auf die Volumeneinheit bezogenen Deformationsenergie, welche wir mit e bezeichnen. Es ist also

$$\delta e = \sigma_1 \delta\varepsilon_1,$$

wobei ε_2 und ε_3 konstant gehalten waren. Mit gleichen Betrachtungen bei Änderung von ε_2 und ε_3 erhalten wir also

$$(1) \qquad \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_1} = \sigma_1, \quad \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_2} = \sigma_2, \quad \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_3} = \sigma_3.$$

Setzen wir hier die Werte für σ_1, σ_2, σ_3 aus den Spannungs-Dehnungsgleichungen (§ 2, 1) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_1} = 2G\left\{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{m-2}\right\},$$

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_2} = 2G\left\{\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{m-2}\right\},$$

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_3} = 2G\left\{\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{m-2}\right\},$$

und wir erhalten durch Integration

$$(2) \qquad e(\varepsilon) = G\left\{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2\right\}.$$

Von dieser Form können wir ohne weiteres zur Darstellung der Verzerrungsenergie durch die Komponenten des Verzerrungstensors in den gewöhnlichen Koordinaten übergehen, wenn wir beachten [s. § 2, Gl. (18)], daß die symmetrischen Funktionen der Hauptdehnungen die Invarianten des Verzerrungstensors darstellen. Es ist

$$(3)\quad \begin{cases} \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \theta, \\ \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2 = \theta^2-2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1), \\ \qquad\qquad = \theta^2-2\{\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x-\tfrac{1}{4}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\}. \end{cases}$$

Wir schreiben also die Deformationsenergie pro Volumeneinheit

$$(4)\quad e = G\left\{\frac{m-1}{m-2}\theta^2-2(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x)+\tfrac{1}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\right\}$$

und bemerken vor allen Dingen als Verallgemeinerung von (1), daß

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_x}=\sigma_x, & \dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_y}=\sigma_y, & \dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_z}=\sigma_z, \\ \dfrac{\partial e}{\partial \gamma_{xy}}=\tau_{xy}, & \dfrac{\partial e}{\partial \gamma_{yz}}=\tau_{yz}, & \dfrac{\partial e}{\partial \gamma_{zx}}=\tau_{zx} \end{cases}$$

ist.

Wir können die Deformationsenergie auch durch die Spannungen ausdrücken. Zur Umrechnung bemerken wir, daß für $e(\varepsilon,\gamma)$ als homogene quadratische Funktion in den Verzerrungskomponenten nach dem Eulerschen Satze

$$e = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_x}\varepsilon_x+\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_y}\varepsilon_y+\cdots+\frac{\partial e}{\partial \gamma_{zx}}\gamma_{zx}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\gamma_{xy}\tau_{xy}+\gamma_{yz}\tau_{yz}+\gamma_{zx}\tau_{zx}\}$$

ist. Drücken wir hier die Dehnungen durch die Spannungen aus, so erhalten wir als Ausdruck der Deformationsenergie, die wir mit $a(\sigma,\tau)$ bezeichnen wollen, wenn wir sie in den Spannungsgrößen ausdrücken:

$$(6)\quad a(\sigma,\tau) = \frac{1}{4G}\left\{\frac{m}{m+1}s^2-2(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\right\}.$$

Auch hier sei besonders die Umkehrung der Formeln (5) hervorgehoben:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial \sigma_x}=\varepsilon_x, & \dfrac{\partial a}{\partial \sigma_y}=\varepsilon_y, & \dfrac{\partial a}{\partial \sigma_z}=\varepsilon_z, \\ \dfrac{\partial a}{\partial \tau_{xy}}=\gamma_{xy}, & \dfrac{\partial a}{\partial \tau_{yz}}=\gamma_{yz}, & \dfrac{\partial a}{\partial \tau_{zx}}=\gamma_{zx}. \end{cases}$$

2. Das Minimalprinzip für die Verschiebungen, Prinzip der virtuellen Verrückungen. Wenn wir das allgemeine Prinzip der virtuellen Verrückungen, welches aussagt, daß bei einer unendlich kleinen Verrückung eines Systems aus einem Gleichgewichtszustand in Summa keine Arbeit ge-

leistet wird, für unser elastisches System aufstellen, so besagt es, daß bei jeder Verschiebung der Punkte unseres elastischen Körpers aus der Gleichgewichtslage, welche mit den Auflagerbedingungen verträglich ist, die Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Vermehrung der Deformationsenergie ist.

Wir betrachten also einen unter der Wirkung der Massenkräfte (X, Y, Z pro Volumeneinheit) und der Oberflächenkräfte (Ξ, H, Z pro Flächeneinheit) elastisch deformierten Körper. An denjenigen Punkten der Oberfläche, wo keine Kräfte gegeben sind, seien die Verschiebungen u, v, w gegeben (Auflagerbedingungen). Wir nehmen nun eine virtuelle Verschiebung vor, d. h. wir verändern u in $u + \delta u$, v in $v + \delta v$, w in $w + \delta w$. Die Auflagerbedingungen dürfen nicht verletzt sein, d. h. an denjenigen Punkten der Oberfläche, wo u, v, w gegeben sind, muß $\delta u = 0$, $\delta v = 0$, $\delta w = 0$ sein. Nun berechnen wir die Arbeit der Massenkräfte und Oberflächenkräfte bei der zusätzlichen Verschiebung. Dieselbe ist

$$(8) \qquad \iiint \{X\delta u + Y\delta v + Z\delta w\}\, d\omega + \iint \{\Xi\delta u + H\delta v + Z\delta w\}\, do,$$

wobei das erste Integral über das ganze Volumen des deformierten Körpers zu erstrecken ist, das zweite über diejenigen Teile, wo die Oberflächenkräfte gegeben sind. Diese Arbeit muß gleich der Änderung der Deformationsenergie sein. Die gesamte Deformationsenergie ist

$$E = \iiint e(\varepsilon, \gamma)\, d\omega,$$

also ist ihre Variation

$$\delta E = \iiint \left\{ \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_y \cdots + \frac{\partial e}{\partial \gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx} \right\} d\omega.$$

Nun ist aber $\dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$ usw., also

$$(9) \qquad \delta E = \iiint \{\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \cdots + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\}\, d\omega,$$

wobei σ_x, τ_{xy} usw. die im Gleichgewichtszustand auftretenden Spannungen sind, welche den Gleichgewichtsbedingungen [§ 2, (4)] genügen. In das Integral setzen wir nun die Werte für $\delta\varepsilon_x$ usw. ein:

$$(10) \qquad \begin{cases} \delta\varepsilon_x = \dfrac{\partial\delta u}{\partial x}, & \delta\gamma_{xy} = \dfrac{\partial\delta v}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta u}{\partial y}, \\ \delta\varepsilon_y = \dfrac{\partial\delta v}{\partial y}, & \delta\gamma_{yz} = \dfrac{\partial\delta w}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta v}{\partial z}, \\ \delta\varepsilon_z = \dfrac{\partial\delta w}{\partial z}, & \delta\gamma_{zx} = \dfrac{\partial\delta u}{\partial z} + \dfrac{\partial\delta w}{\partial x} \end{cases}$$

und vereinfachen das Integral durch vektorielle Schreibung. Die Spannungsvektoren

$$\begin{aligned} &t^{(x)} \text{ mit den Komponenten } \sigma_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz},\\ &t^{(y)} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \tau_{yx},\ \sigma_y,\ \tau_{yz},\\ &t^{(z)} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \tau_{zx},\ \tau_{zy},\ \sigma_z \end{aligned}$$

hatten wir schon früher eingeführt. Dazu nehmen wir noch die Vektoren:

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}\delta u \text{ mit den Komponenten } \frac{\partial\delta u}{\partial x},\ \frac{\partial\delta u}{\partial y},\ \frac{\partial\delta u}{\partial z},\\ &\operatorname{grad}\delta v \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial\delta v}{\partial x},\ \frac{\partial\delta v}{\partial y},\ \frac{\partial\delta v}{\partial z},\\ &\operatorname{grad}\delta w \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial\delta w}{\partial x},\ \frac{\partial\delta w}{\partial y},\ \frac{\partial\delta w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Damit schreibt sich die Variation der Deformationsenergie:

$$(11)\qquad \delta E = \iiint \{t^{(x)}\cdot\operatorname{grad}\delta u + t^{(y)}\cdot\operatorname{grad}\delta v + t^{(z)}\cdot\operatorname{grad}\delta w\}\, d\omega.$$

(NB. $t^{(x)}\cdot\operatorname{grad}\delta u$ ist das skalare Produkt von $\operatorname{grad}\delta u$ und $t^{(x)}$). Diese Integrale formen wir nach dem Gaußschen Satze um. Es ist:

$$\operatorname{div}\delta u t^{(x)} = \delta u \operatorname{div} t^{(x)} + t^{(x)}\cdot\operatorname{grad}\delta u.$$

Nun ist aber wegen der Gleichgewichtsbedingung für die wirklich eintretenden Spannungen

$$\operatorname{div} t^{(x)} = -X,$$

also

$$(12)\qquad \iiint t^{(x)}\cdot\operatorname{grad}\delta u\, d\omega = \iint t_\nu^{(x)}\,\delta u\, do + \iiint X\delta u\, d\omega.$$

In dem Oberflächenintegral ist gemäß der Randbedingung [§ 2, (3)]

$$t_\nu^{(x)} = \Xi,$$

so daß wir mit gleichen Betrachtungen für die anderen Integrale

$$(13)\qquad \delta E = \iiint \{X\delta u + Y\delta v + Z\delta w\}\, d\omega + \iint \{\Xi\delta u + H\delta v + Z\delta w\}\, do$$

erhalten. Da an den Stellen, wo die Verschiebungen gegeben sind, $\delta u = \delta v = \delta w = 0$ ist, erstrecken wir das Oberflächenintegral nur über die Punkte, wo die Oberflächenkräfte gegeben sind, und haben somit bewiesen, daß bei einer virtuellen Verrückung, welche die Auflagerbedingungen nicht verletzt, die Vermehrung der Deformationsenergie gerade gleich der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit ist.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen drückt man gewöhnlich in der folgenden Form aus: da die Massenkräfte und Oberflächenkräfte als fest gegebene Größen nicht variiert werden können, so können wir

$$\begin{aligned} &\iiint \{X\delta u + Y\delta v + Z\delta w\}\, d\omega + \iint \{\Xi\delta u + H\delta v + Z\delta w\}\, do\\ &= \delta\left\{\iiint (Xu + Yv + Zw)\, d\omega + \iint (\Xi u + Hv + Zw)\, do\right\} \end{aligned}$$

schreiben, und damit Gl. (13)

$$\left\{\begin{aligned}&\delta\Big\{\iiint e(\varepsilon,\gamma)\,d\omega-\iiint(Xu+Yv+Zw)\,d\omega\\&\qquad-\iint(\Xi u+Hv+Zw)\,do\Big\}=0.\end{aligned}\right.\tag{14}$$

Den Ausdruck innerhalb der Klammer bezeichnet man als die „potentielle Energie“ des gesamten Systems, und faßt das Ergebnis in den Satz zusammen:

„Unter allen möglichen Verschiebungen, welche den Auflagerbedingungen genügen, treten diejenigen wirklich ein, für die die potentielle Energie des Systems ein Minimum ist.“

Daß es sich wirklich um ein Minimum handelt — Gl. (14) sagt zunächst nur, daß ein stationärer Wert eintritt —, erkennt man, wenn man sich nicht auf die erste Variation der Deformationsenergie beschränkt, sondern die vollständige Änderung ausrechnet. Man vergleiche den Beweisgang im folgenden Abschnitt für das sogenannte Castiglianosche Prinzip.

3. Das Minimalprinzip für die Spannungen. Während in dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie eine charakteristische Eigenschaft der im Gleichgewichtsfalle eintretenden elastischen Deformationen formuliert ist, gibt uns das sogenannte Castiglianosche Prinzip, dem wir uns jetzt zuwenden wollen, eine Minimumseigenschaft der im Gleichgewichtsfalle eintretenden Spannungssysteme an.

Um dieses Prinzip abzuleiten, gehen wir wieder von dem Ausdruck für die Formänderungsarbeit aus, die wir aber jetzt als Funktion der Spannungsgrößen aufschreiben:

$$A=\iiint a(\sigma,\tau)\,d\omega.$$

Wir ändern jetzt die im Gleichgewichtsfalle wirklich eintretenden Spannungen ab und berechnen die Formänderungsarbeit für die geänderten Spannungen. Dabei wollen wir aber verlangen, daß auch die abgeänderten Spannungen den Gleichgewichtsbedingungen für das Innere und für die Oberfläche genügen sollen. Die Massenkräfte und die Oberflächenkräfte werden dabei als gegebene Größen natürlich unverändert gelassen. Sollen also die Ausgangsspannungen und die geänderten den Gleichgewichtsbedingungen genügen, so ist:

Im Innern:

$$\operatorname{div} t^{(x)}+X=0\quad\text{und}\quad\operatorname{div}(t^{(x)}+\delta t^{(x)})+X=0\quad\text{usw.}$$

An der Oberfläche:

$$t_\nu^{(x)}=\Xi\quad\text{und}\quad t_\nu^{(x)}+\delta t_\nu^{(x)}=\Xi\quad\text{usw.}$$

Es müssen somit die Spannungsänderungen $\delta t^{(x)}$, $\delta t^{(y)}$, $\delta t^{(z)}$ den Gleichungen genügen:

$$(15)\quad \begin{cases} \text{Im Innern:} \\ \quad \operatorname{div}\delta t^{(x)} = 0, \quad \operatorname{div}\delta t^{(y)} = 0, \quad \operatorname{div}\delta t^{(z)} = 0. \\ \text{An der Oberfläche:} \\ \quad \delta t_\nu^{(x)} = 0, \qquad \delta t_\nu^{(y)} = 0, \qquad \delta t_\nu^{(z)} = 0. \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen brauchen aber nur dort erfüllt zu sein, wo die Oberflächenkräfte gegeben sind. An den Punkten der Oberfläche, wo die Verschiebungen gegeben sind, dürfen die Spannungen variiert werden.

Die Formänderungsarbeit für das variierte System ist dann:

$$(16)\quad \begin{cases} A + \delta A = \iiint a(\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau)\, d\omega, \\ \quad = \iiint a(\sigma, \tau)\, d\omega + \iiint \left\{ \dfrac{\partial a}{\partial \sigma_x}\delta\sigma_x + \dfrac{\partial a}{\partial \sigma_y}\delta\sigma_y + \cdots \right. \\ \quad \left. \cdots + \dfrac{\partial a}{\partial \tau_{xz}}\delta\tau_{xz} \right\} d\omega + \iiint a(\delta\sigma, \delta\tau)\, d\omega, \\ \quad = J_1 + J_2 + J_3. \end{cases}$$

Das erste Integral ist die Formänderungsarbeit A des wirklich eintretenden Spannungssystems. Das letzte ist die Formänderungsarbeit, welche eintreten würde, wenn wir den Körper nur den variierten Spannungen unterwerfen würden. Es ist deshalb sicher positiv, wir kürzen es einfach durch Pos. ab. Das mittlere wird wieder umgeformt. Da nach (7)

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial a}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial a}{\partial \sigma_z} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial a}{\partial \tau_{zx}} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

ist, so ist es gleich

$$J_2 = \iiint \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta\sigma_y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta\sigma_z \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_{xy} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\tau_{zy} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta\tau_{zx} \right\} d\omega,$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$(17)\quad J_2 = \iiint \{ \operatorname{grad} u \cdot \delta t^{(x)} + \operatorname{grad} v \cdot \delta t^{(y)} + \operatorname{grad} w \cdot \delta t^{(z)} \}\, d\omega.$$

Nun ist, da $\operatorname{div}\delta t^{(x)} = 0$, $\operatorname{div}\delta t^{(y)} = 0$, $\operatorname{div}\delta t^{(z)} = 0$ und

$$\operatorname{div} u\,\delta t^{(x)} = u \operatorname{div}\delta t^{(x)} + \operatorname{grad} u \cdot \delta t^{(x)}$$

ist,

$$(18)\quad \iiint \operatorname{grad} u \cdot \delta t^{(x)}\, d\omega = \iint u\,\delta t_\nu^{(x)}\, do.$$

Nach (15) fallen hier diejenigen Oberflächenteile weg, wo die Oberflächenkräfte gegeben sind, es bleiben nur die übrig, wo die Verschiebungen u, v, w gegeben sind. Wir erhalten also für die Änderung der Formänderungsarbeit

$$\delta A = \iint \{u\delta t_\nu^{(x)} + v\delta t_\nu^{(y)} + w\delta t_\nu^{(z)}\}\, do + \text{Pos.}, \tag{19}$$

wo das Integral rechts nur über die Teile der Oberfläche zu erstrecken ist, wo die Verschiebungen gegeben sind. Da diese nicht mit variiert werden, schreiben wir:

$$\delta\{A - \iint (u t_\nu^{(x)} + v t_\nu^{(y)} + w t_\nu^{(z)})\, do\} = \text{Pos.}$$

und erhalten als Ergebnis das „Castiglianosche Prinzip".

Unter allen Spannungssystemen, die mit den gegebenen Massenkräften und Oberflächenkräften im Gleichgewicht sind, tritt dasjenige wirklich ein, für welches der Ausdruck

$$A - \iint (u t_\nu^{(x)} + v t_\nu^{(y)} + w t_\nu^{(z)})\, do \tag{20}$$

zum Minimum wird. Das Oberflächenintegral ist über die Teile der Oberfläche zu erstrecken, wo die Verschiebungen gegeben sind.

4. Eindeutigkeit der Lösungen. Die partiellen Integrationen, die zur Aufstellung der Minimalprinzipe geführt haben, wenden wir an, um die Eindeutigkeit der Lösungen unserer Differentialgleichungen mit ihren Randbedingungen zu beweisen. Wir nehmen an, ein Körper sei von gegebenen Massenkräften beansprucht, an seiner Oberfläche seien teilweise die Oberflächenkräfte, teilweise die Verschiebungen gegeben. Gäbe es nun zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichungen, welche beide den Randbedingungen genügen, so müßte, da die Gleichungen und die Randbedingungen linear sind, ihre Differenz eine Lösung der Differentialgleichungen sein, wenn wir die Massenkräfte darin weglassen. Denn wenn wir die beiden Lösungen durch u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2, ihre Spannungen mit $t_1^{(x)}$, $t_1^{(y)}$, $t_1^{(z)}$ und $t_2^{(x)}$, $t_2^{(y)}$, $t_2^{(z)}$ bezeichnen, und die Differenzen der beiden Lösungen durch entsprechende Buchstaben ohne Index, so ist

$$\operatorname{div} t_1^{(x)} + X = 0, \quad \operatorname{div} t_2^{(x)} + X = 0 \quad \text{usw.},$$

also für die Differenz $t^{(x)} = t_2^{(x)} - t_1^{(x)}$

$$\operatorname{div} t^{(x)} = 0, \quad \operatorname{div} t^{(y)} = 0, \quad \operatorname{div} t^{(z)} = 0. \tag{21}$$

An der Oberfläche haben wir da, wo die Verschiebungen gegeben sind:

$$u = u_2 - u_1 = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{22}$$

da, wo die Oberflächenkräfte gegeben sind:

$$t_\nu^{(x)} = t_{1\nu}^{(x)} - t_{2\nu}^{(x)} = 0, \quad t_\nu^{(y)} = 0, \quad t_\nu^{(z)} = 0. \tag{23}$$

Wir bilden nun den Ausdruck für die Formänderungsarbeit der Differenz

$$E = \iiint e(\varepsilon, \gamma)\, d\omega.$$

Hierfür können wir (nach § 4, **1**)

$$E = \frac{1}{2} \iiint \{\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \cdots + \gamma_{zx} \tau_{zx}\}\, d\omega$$

oder, in vektorieller Schreibweise,

$$E = \frac{1}{2} \iiint \{\operatorname{grad} u \cdot \mathfrak{t}^{(x)} + \operatorname{grad} v \cdot \mathfrak{t}^{(y)} + \operatorname{grad} w \cdot \mathfrak{t}^{(z)}\}\, d\omega \tag{24}$$

setzen. Wegen (21) ist

$$\operatorname{div} u\mathfrak{t}^{(x)} = u \operatorname{div} \mathfrak{t}^{(x)} + \operatorname{grad} u \cdot \mathfrak{t}^{(x)} = \operatorname{grad} u \cdot \mathfrak{t}^{(x)}, \tag{25}$$

also

$$E = \iint \{u\mathfrak{t}_\nu^{(x)} + v\mathfrak{t}_\nu^{(y)} + w\mathfrak{t}_\nu^{(z)}\}\, do. \tag{26}$$

Dieses Oberflächenintegral ist aber nach (22) und (23) Null, denn am Rande verschwinden entweder die Verschiebungen oder die Normalkomponenten der Spannungsvektoren. Es ist also

$$E = \iiint e\, d\omega = 0.$$

Nun ist e stets positiv, das Integral kann also nur verschwinden, wenn an jeder Stelle

$$e = 0 \tag{27}$$

ist, und das kann, da e eine positiv definite quadratische Form seiner Argumente ist, nur dann eintreten, wenn diese selbst sämtlich verschwinden. Es ist also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Das heißt aber, daß die Verschiebung u, v, w lediglich in einer deformationslosen Drehung des Körpers besteht. Sind Teile der Oberfläche festgehalten, so muß also $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ sein, und die beiden Lösungen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 sind identisch. Sind an der Oberfläche nur die Oberflächenkräfte gegeben, so sind immer noch die Spannungen für beide Lösungen die gleichen, und die Verschiebungen gehen durch eine starre Drehung auseinander hervor.

Ergänzend sei noch folgendes bemerkt. Sind an dem gleichen Punkte der Oberfläche teilweise die Spannungskomponenten, teilweise die Verschiebungskomponenten gegeben, so kann das nur so geschehen, daß die gegebene Kraft auf der gegebenen Verschiebung senkrecht steht. Auch in diesem Falle verschwindet das Oberflächenintegral (26), und die Eindeutigkeit der Lösung ist gewährleistet.

§ 5. Gleichungen der Bewegung. Eindeutigkeit der Lösungen.

1. Differentialgleichungen für die Bewegungen eines elastischen Körpers erhalten wir, wenn wir zu den Massenkräften die Trägheitswiderstände hinzufügen. Ist ϱ die Masse der Volumeneinheit, so erhalten wir die Trägheitswiderstände pro Volumeneinheit, indem wir die Komponenten der Beschleunigung mit $-\varrho$ multiplizieren, also

$$-\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Fügen wir diese zu den Massenkräften, X, Y, Z in die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichts [§ 3, (7)] ein, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$G\left\{\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\} + X - \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{usw.}$$

oder

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\} + X,\\ \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta v + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right\} + Y,\\ \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G\left\{\Delta w + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\} + Z. \end{aligned}\right.$$

Zu diesen Differentialgleichungen treten Rand- und Anfangsbedingungen. Für die Punkte der Oberfläche können entweder die Verschiebungen oder Oberflächenkräfte Ξ, H, Z als Funktion der Zeit gegeben sein. Im ersten Falle muß also an der Oberfläche

$$(2)\qquad u = U, \quad v = V, \quad w = W$$

sein, wo U, V, W gegebene Funktionen des Ortes und der Zeit sind, im zweiten Falle müssen die aus den Verschiebungen in gleicher Weise wie im statischen Falle zu berechnenden Spannungsgrößen mit den Oberflächenkräften im Gleichgewicht sein, also

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} t_\nu^{(x)} &= \Xi \quad \text{bzw.} \quad \sigma_x\cos(\nu,x) + \tau_{xy}\cos(\nu,y) + \tau_{xz}\cos(\nu,z) = \Xi,\\ t_\nu^{(y)} &= H \quad \text{„} \quad \tau_{xy}\cos(\nu,x) + \sigma_y\cos(\nu,y) + \tau_{yz}\cos(\nu,z) = H,\\ t_\nu^{(z)} &= Z \quad \text{„} \quad \tau_{xz}\cos(\nu,x) + \tau_{yz}\cos(\nu,y) + \sigma_z\cos(\nu,z) = Z, \end{aligned}\right.$$

wo Ξ, H, Z wieder gegebene Funktionen des Ortes und der Zeit sind. X, Y, Z können ebenfalls von der Zeit abhängen. Dazu kommen die Anfangsbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ müssen Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Punkte gegeben sein, d. h. es muß für $t = 0$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= u_0(x,y,z), \quad & v &= v_0(x,y,z), \quad & w &= w_0(x,y,z),\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= u_0'(x,y,z), \quad & \frac{\partial v}{\partial t} &= v_0'(x,y,z), \quad & \frac{\partial w}{\partial t} &= w_0'(x,y,z) \end{aligned}\right.$$

sein, wo u_0, v_0, w_0, u_0', v_0', w_0' gegebene Funktionen des Ortes sind.

Der Energiesatz. Bezeichnen wir mit K die gesamte kinetische Energie des elastischen Körpers

$$K = \frac{1}{2}\iiint \varrho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} d\omega, \tag{5}$$

und wie oben mit

$$E = \iiint e(\varepsilon, \gamma)\, d\omega \tag{6}$$

die elastische Deformationsenergie, so können wir die zeitliche Veränderung der Gesamtenergie $K + E$ berechnen. Die Änderung der kinetischen Energie ist

$$\frac{dK}{dt} = \iiint \varrho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} d\omega. \tag{7}$$

Die Änderung der Deformationsenergie ist:

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \left\{ \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_x}\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_y}\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial e}{\partial \gamma_{xz}}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} \right\} d\omega. \tag{8}$$

Nun ist

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial e}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}, \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \text{ usw.}$$

Es läßt sich demgemäß (8) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \left\{ \mathfrak{t}^{(x)} \cdot \operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{t}^{(y)} \cdot \operatorname{grad}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{t}^{(z)} \cdot \operatorname{grad}\frac{\partial w}{\partial t} \right\} d\omega. \tag{9}$$

Diesen Ausdruck formen wir genau wie früher um, indem wir die Identität

$$\operatorname{div}\frac{\partial u}{\partial t}\mathfrak{t}^{(x)} = \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(x)} + \mathfrak{t}^{(x)} \cdot \operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t}$$

über den vom elastischen Körper erfüllten Raum integrieren und das Integral der linken Seite nach dem Gaußschen Satze in ein Oberflächenintegral verwandeln.

$$\iiint \mathfrak{t}^{(x)} \cdot \operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t}\, d\omega = \iint \mathfrak{t}_\nu^{(x)}\frac{\partial u}{\partial t}\, do - \iiint \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(x)}\, d\omega. \tag{10}$$

Damit wird

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} = {} & -\iiint \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(x)} + \frac{\partial v}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(y)} + \frac{\partial w}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(z)} \right\} d\omega, \\ & + \iint \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}\mathfrak{t}_\nu^{(x)} + \frac{\partial v}{\partial t}\mathfrak{t}_\nu^{(y)} + \frac{\partial w}{\partial t}\mathfrak{t}_\nu^{(z)} \right\} do. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Nun erhalten wir aus den Gleichgewichtsbedingungen unter Beifügung der Trägheitswiderstände

$$\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(x)} + X = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{t}^{(y)} + Y = \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{t}^{(z)} + Z = \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{12}$$

also wird mit Berücksichtigung der Randbedingung $t_\nu^{(x)} = \Xi$ usw.

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d(E+K)}{dt} = \iiint \left\{ X\dfrac{\partial u}{dt} + Y\dfrac{\partial v}{\partial t} + Z\dfrac{\partial w}{\partial t}\right\} d\omega \\ \qquad\qquad + \iint \left\{ \Xi\dfrac{\partial u}{\partial t} + H\dfrac{\partial v}{\partial t} + Z\dfrac{\partial w}{\partial t}\right\} do. \end{cases}$$

Diese Gleichung drückt den Energiesatz aus. Die Integrale der rechten Seite sind nämlich einfach die pro Zeiteinheit geleisteten Arbeiten der Massenkräfte und Oberflächenkräfte, so daß der Inhalt der Gl. (13) der ist, daß die Vermehrung der Gesamtenergie pro Zeiteinheit gleich der von den äußeren Kräften pro Zeiteinheit geleisteten Arbeit ist.

2. Die Eindeutigkeit der Lösungen. Wir wollen jetzt zeigen, daß es nur ein System von Funktionen u, v, w geben kann, welches die Differentialgleichungen befriedigt und gleichzeitig die Randbedingungen und Anfangsbedingungen erfüllt. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall, daß an der Oberfläche entweder die Verschiebungen oder die Oberflächenkräfte gegeben sind. Nehmen wir an, es gäbe zwei Lösungen, u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2, so müßten die Differenzen

$$u = u_2 - u_1, \quad v = v_2 - v_1, \quad w = w_2 - w_1,$$

da Differentialgleichungen und Randbedingungen linear sind, den Differentialgleichungen

$$(14)\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G\left\{\Delta u + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right\}, \\ \varrho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = G\left\{\Delta v + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right\}, \\ \varrho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = G\left\{\Delta w + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right\} \end{cases}$$

genügen. An den Punkten der Oberfläche, wo die Verschiebungen gegeben waren, müßte

$$(15)\qquad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

sein, an den Punkten, wo die Oberflächenkräfte gegeben waren,

$$(16)\qquad t_\nu^{(x)} = 0, \quad t_\nu^{(y)} = 0, \quad t_\nu^{(z)} = 0.$$

Ferner müßte für $t = 0$

$$(17)\qquad u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad v = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

sein. Es wären also die Funktionen u, v, w Lösungen der Bewegungsgleichungen, wenn wir die Massenkräfte und die Oberflächenkräfte gleich Null setzen, zur Zeit $t = 0$ wäre der Körper undeformiert und im Zustand der Ruhe. Gäbe es eine derartige Lösung u, v, w, so müßte ein undeformierter, ruhender Körper sich ohne Einwirkung äußerer

Kräfte in Bewegung setzen können. Daß das nicht möglich ist, folgt aus dem Energiesatz. Wegen des Fehlens der äußeren Kräfte müßte die Gesamtenergie konstant sein, und zwar gleich Null, da sie zur Zeit $t = 0$ Null wäre. Da nun sowohl die kinetische als auch die Deformationsenergie nur positiver Werte fähig sind, könnte ihre Summe nur verschwinden, wenn jede für sich Null ist. Es wäre also die kinetische Energie

$$K = \frac{1}{2}\iiint \varrho \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} d\omega = 0, \tag{18}$$

und das ist nur möglich, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

ist; u, v, w wären also konstant und folglich, da sie zur Zeit $t = 0$ verschwinden, für alle Zeiten t

$$u = v = w = 0. \tag{20}$$

Die Lösungen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 müßten somit gleich sein. Es gibt also nur eine einzige Lösung.

Zusammenstellung der Formeln.

Für die folgenden Abschnitte wollen wir zunächst noch einmal die gewonnenen Formeln in neuer Numerierung zusammenstellen. Entsprechend den Anwendungen beschränken wir uns bezüglich der Massenkräfte auf die Wirkung der Schwerkraft (s. die Bezeichnungen a. f. S.).

Formeln.

Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit.

$$(1)\quad e(\varepsilon,\gamma) = G\left\{\frac{m-1}{m-2}\theta^2 - 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right\}.$$

$$(2)\quad a(\sigma,\tau) = \frac{1}{4G}\left\{\frac{m}{m+1}s^2 - 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\right\}.$$

Spannungs-Dehnungsgleichungen.

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \dfrac{\theta}{m-2}\right), & \dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \dfrac{\theta}{m-2}\right), \\ \dfrac{\partial e}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \dfrac{\theta}{m-2}\right), & \\ \dfrac{\partial e}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, & \dfrac{\partial e}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \dfrac{\partial e}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{cases}$$

Bezeichnungen:

$x,\ y,\ z$	Rechtwinklige Koordinaten eines Punktes.
$u,\ v,\ w$	Komponenten der elastischen Verschiebung.
$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$ $\tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}$	Komponenten des Spannungstensors.
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$	Komponenten des Verzerrungstensors.
$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$	Hauptspannungen.
$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$	Hauptdehnungen.
$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$	Summe der Hauptspannungen.
$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$	Summe der Hauptdehnungen.
$X,\ Y,\ Z$	Komponenten der Massenkräfte pro Volumeneinheit.
$\Xi,\ H,\ Z$	Komponenten der Oberflächenkräfte pro Flächeneinheit.
E	Elastizitätsmodul.
m	Querkontraktionszahl.
$G = \frac{Em}{2(m+1)}$	Schubmodul.
$e(\varepsilon, \gamma)$	Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit, ausgedrückt in den Verzerrungsgrößen.
$a(\sigma, \tau)$	Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit, ausgedrückt in den Spannungen.

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left(\sigma_x - \frac{s}{m+1}\right),\ \frac{\partial a}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left(\sigma_y - \frac{s}{m+1}\right), \\ \qquad\qquad \frac{\partial a}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left(\sigma_z - \frac{s}{m+1}\right), \\ \frac{\partial a}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},\ \frac{\partial a}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},\ \frac{\partial a}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{cases}$$

Gleichgewichtsbedingungen.

Im Innern:

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{div} t^{(x)} + X = \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, & \tau_{xy} = \tau_{yx}, \\ \operatorname{div} t^{(y)} + Y = \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, & \tau_{yz} = \tau_{zy}, \\ \operatorname{div} t^{(z)} + Z = \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, & \tau_{zx} = \tau_{xz}. \end{cases}$$

An der Oberfläche:

$$(6)\quad \begin{cases} t_\nu^{(x)} = \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) + \tau_{xz} \cos(\nu, z) = \Xi, \\ t_\nu^{(y)} = \tau_{yx} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{yz} \cos(\nu, z) = H, \\ t_\nu^{(z)} = \tau_{zx} \cos(\nu, x) + \tau_{zy} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) = Z. \end{cases}$$

Differentialgleichungen für die Verschiebungen.

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta u + \dfrac{m}{m-2} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + X/G = 0, \\ \Delta v + \dfrac{m}{m-2} \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + Y/G = 0, \\ \Delta w + \dfrac{m}{m-2} \dfrac{\partial \theta}{\partial z} + Z/G = 0. \end{cases}$$

Differentialgleichungen für die Spannungen:

Gleichungen (5) und die folgenden

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta \sigma_x + \dfrac{m}{m+1} \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0, & \Delta \tau_{xy} + \dfrac{m}{m+1} \dfrac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = 0, \\ \Delta \sigma_y + \dfrac{m}{m+1} \dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0, & \Delta \tau_{yz} + \dfrac{m}{m+1} \dfrac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} = 0, \\ \Delta \sigma_z + \dfrac{m}{m+1} \dfrac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0, & \Delta \tau_{zx} + \dfrac{m}{m+1} \dfrac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} = 0. \end{cases}$$

Abgeleitete Gleichungen:

$$(9)\quad \theta = \frac{1}{2G} \frac{m-2}{(m+1)} s.$$

$$(10)\quad \Delta \theta = 0, \quad \Delta s = 0.$$

$$(11)\quad \Delta\Delta u = 0, \quad \Delta\Delta v = 0, \quad \Delta\Delta w = 0.$$

$$(12)\quad \begin{cases} \Delta\Delta \sigma_x = 0, & \Delta\Delta \sigma_y = 0, & \Delta\Delta \sigma_z = 0, \\ \Delta\Delta \tau_{xy} = 0, & \Delta\Delta \tau_{yz} = 0, & \Delta\Delta \tau_{zx} = 0. \end{cases}$$

Achtzehntes Kapitel.

Probleme des elastischen Gleichgewichts.

§ 1. Elementare Lösungen mit linearer Spannungsverteilung.

Suchen wir solche Deformationen auf, für welche die Spannungen sich linear verteilen, so sind die Spannungsgleichungen [S. 630, (8)] ohne weiteres erfüllt, die Spannungen brauchen also nur noch die Gleichgewichtsbedingungen [S. 630, (5)] zu erfüllen. Als einfachstes Beispiel erhalten wir die

1. Beanspruchung durch einen allseitig gleichen Normaldruck. Wirkt auf die Oberfläche eines elastischen Körpers überall in der Richtung der Normalen ein gleichmäßiger Druck p pro Flächeneinheit, so sind an der Oberfläche die pro Flächeneinheit in den Koordinatenrichtungen angreifenden Kräfte

$$(1) \qquad \Xi = -p\cos(n,x), \quad H = -p\cos(n,y), \quad Z = -p\cos(n,z)$$

und wir erhalten als Lösung der Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \end{cases}$$

welche gleichzeitig auch den Randbedingungen [S. 630, (6)] genügen. Die Verzerrungsgrößen werden:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon = -\dfrac{1}{2G}\dfrac{m-2}{m+1}p = -\dfrac{m-2}{Em}p, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{cases}$$

Es werden also alle Längenelemente um den gleichen Betrag zusammengedrückt, Winkeländerungen finden nicht statt. Die Deformation ist einfach eine ähnliche Verkleinerung. Insbesondere interessiert uns die Volumenverminderung. Betrachten wir als Volumeneinheit einen Würfel von den Kantenlängen 1, so haben die Kanten nach der Deformation die Längen $(1-\varepsilon)$. Das Volumen nach der Deformation wird somit bei Vernachlässigung von ε^2 und ε^3

$$V' = 1 - 3\varepsilon,$$

woraus wir nach Abzug des ursprünglichen Volumens die Volumenverminderung der Volumeneinheit zu

$$(4) \qquad \frac{\Delta V}{V} = -3\varepsilon = \frac{3(m-2)}{Em}p$$

erhalten.

2. Konstante Zugkraft auf die Enden eines Zylinders. Wir legen die x-Achse parallel den Erzeugenden des Zylinders etwa durch die Schwerpunkte der zu den Erzeugenden senkrechten Querschnitte. Wirkt dann auf die Endflächen eine konstante Zugkraft c pro Flächeneinheit, so ist

$$(5) \qquad \begin{cases} \sigma_x = c, & \sigma_y = \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases}$$

die Lösung der Differentialgleichungen und Randbedingungen. Von den letzteren [S. 630, (6)] bleibt bloß die erste übrig, da sämtliche Größen der zweiten und dritten verschwinden. Für die Mantelfläche ist $\cos(n, x) = 0$, so daß die Bedingung erfüllt ist, daß am Mantel keine Kräfte angreifen. An den Endflächen ist rechts $\cos(n, x) = 1$ und $\Xi = c$, links $\cos(n, x) = -1$ und $\Xi = -c$, so daß auch hier die Oberflächenbedingung erfüllt ist. Die Verzerrungsgrößen werden nach [S. 629, (4)] mit $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = c$

$$(6) \qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{2G}\dfrac{m}{m+1}c = \dfrac{c}{E}, & \varepsilon_y = \varepsilon_z = \dfrac{-c}{2G(m+1)} = \dfrac{-c}{Em}, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \end{cases}$$

Winkeländerungen finden nicht statt. Die Fasern in Richtung der x-Achse werden gleichmäßig gedehnt, die Fasern in den Querschnitten gleichmäßig zusammengezogen, so daß die Querschnitte sich ähnlich verkleinern.

3. Biegung eines Stabes durch an den Enden angreifende Momente. Wir betrachten wieder einen zylindrischen Stab, legen die x-Achse parallel der Erzeugenden des Zylinders durch die Schwerpunkte der zur Erzeugenden senkrechten Querschnitte, die y- und z-Achse so, daß sie in die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts fallen, d. h. so, daß für die Querschnitte das Integral $\int\int yz\,dy\,dz = 0$ wird. Wir erhalten dann eine Lösung der Differentialgleichungen für die Spannungen von der Form

$$(7) \qquad \begin{cases} \sigma_x = cz, & \sigma_y = \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases}$$

und wollen nun sehen, welche Kräfte wir an der Oberfläche anbringen müssen, damit auch die Oberflächenbedingungen [S. 630, (6)] erfüllt sind. Der Mantel, wo $\cos(n, x) = 0$ ist, muß offenbar kräftefrei bleiben. Am rechten Ende des Zylinders mit $\cos(n, x) = 1$ muß $\Xi = cz$, am linken Ende mit $\cos(n, x) = -1$, $\Xi = -cz$ sein. Berechnen wir die Resultierenden dieser an den Enden angreifenden Kräfte, so erhalten wir für die drei Komponenten Null, denn in der y- und z-Richtung wirken keine Kräfte, und in der x-Richtung wird

$$\int \Xi\,dy\,dz = \int \sigma_z\,dy\,dz = c\int z\,dy\,dz = 0,$$

weil wir das Koordinatensystem durch den Schwerpunkt gelegt hatten. Es bleibt als nur ein Moment übrig. Seine Komponenten sind die folgenden (obere Vorzeichen rechts, untere links):

$$\text{um die } x\text{-Achse } M_x = 0,$$
$$\text{um die } y\text{-Achse } M_y = \mp \iint \sigma_z z \, dy \, dz = \mp c \iint z^2 \, dy \, dz,$$
$$\text{um die } z\text{-Achse } M_z = \pm \iint \sigma_z y \, dy \, dz = \pm c \iint yz \, dy \, dz.$$

Das letzte wird Null, weil wir die y- und z-Achse in die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts gelegt hatten. Es bleibt als nur ein um die y-Achse drehendes Moment vom Betrage

$$M_y = \pm c J_y \tag{8}$$

übrig, wobei wir zur Abkürzung

$$J_y = \iint z^2 \, dy \, dz$$

gesetzt haben. Die Beanspruchung durch die äußeren Kräfte besteht also darin, daß an den beiden Enden zwei entgegengesetzt gleiche Momente wirken. Strenggenommen ist es erforderlich, daß diese durch eine Kräfteverteilung nach (7) hervorgebracht werden, doch zeigt die Erfahrung, daß die Spannungsverteilung im Stabe, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Enden von der speziellen Weise, wie das Endmoment hervorgebracht wird, nicht beeinflußt wird, so daß wir unsere Formeln auch dann anwenden können, wenn (7) an den Enden nicht streng erfüllt ist (Saint-Venantsches Prinzip).

Ist uns also ein Stab gegeben, welcher durch ein an den Enden angreifendes Momentenpaar M_y gebogen wird, dieses positiv gerechnet, wenn es, am rechten Ende von der positiven y-Achse gesehen, rechts dreht, so können wir die Spannungsverteilung über die Querschnitte angeben. Nach (8) und (7) wird

$$c = -\frac{M_y}{J_y},$$

also

$$\sigma_x = -\frac{z M_y}{J_y}. \tag{9}$$

Greift ein Moment an, welches nicht um die y-Achse dreht, so zerlegen wir es in seine Komponenten nach der y- und z-Richtung. Die y-Komponente ergibt die eben berechneten Spannungen, die z-Komponente gleicherweise die Spannungen

$$\sigma_x = \frac{y \, . \, M_z}{J_z}, \qquad J_z = \iint y^2 \, dy \, dz,$$

welche sich den ersten überlagern.

Die Deformationen, welche bei Beanspruchung durch M_y entstehen, kann man entweder nach S. 616 systematisch berechnen, oder, was hier einfacher ist, dadurch gewinnen, daß man die Verschiebungen unmittelbar als quadratische Funktionen von x, y, z ansetzt, weil ihre Differentialquotienten, die Verzerrungskomponenten, linear sind, und die vorkommenden Konstanten durch Koeffizientenvergleichung bestimmt. Man erhält auf diese Weise, bis auf eine deformationslose Verschiebung und Drehung des ganzen Stabes:

$$(10) \qquad u = \frac{czx}{E}, \quad v = -\frac{czy}{Em}, \quad w = c\frac{-mx^2 + y^2 - z^2}{2Em}.$$

Ist der Stab schlank, d. h. sind die Abmessungen der Querschnitte (y und z) klein gegen die Stablänge, so ist die Deformation im wesentlichen durch die Verschiebung der Stabmittellinie ($y = 0$, $z = 0$) gegeben, die übrigen sind so klein, daß sie für die technischen Anwendungen unberücksichtigt bleiben. Aus (10) erhalten wir mit $y = z = 0$ die Deformation der Stabmittellinie

$$(11) \qquad w_0 = \frac{-cx^2}{2E},$$

der wir noch die geometrische Bedeutung der Größe c entnehmen. $-c/E$ ist gleich dem zweiten Differentialquotienten der Durchbiegung nach x, oder, wenn wir das Quadrat des ersten Differentialquotienten gegen 1 vernachlässigen, gleich der von dem biegenden Moment hervorgerufenen Krümmung der Stabmittellinie.

Die technische Balkenbiegungslehre, die wir hier nur kurz streifen können, überträgt die Formel für die Spannungsverteilung und für den Zusammenhang zwischen Krümmung der Mittellinie und Biegemoment auch auf solche Fälle, wo die Beanspruchung des Stabes nicht ausschließlich durch ein Moment erfolgt; auch werden Veränderungen des Querschnittes zugelassen. Die einfachste Darstellung erhalten wir im Anschluß an das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Die Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit ist

$$a = \frac{1}{4G}\frac{m}{m+1}\sigma_x^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E},$$

also auf die Längeneinheit des Stabes

$$\frac{1}{2E}\int \sigma_x^2\, dy\, dz = \frac{c^2}{2E}\iint z^2\, dy\, dz = \frac{c^2 J_y}{2E}$$

oder, ausgedrückt durch die Krümmung der Stabmittellinie,

$$(12) \qquad \frac{EJ_y}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2.$$

(Der Index 0 für die Durchbiegung der Mittellinie wird hinfort weggelassen.) Diese Formel nehmen wir als allgemein gültig an. Wir nehmen nun etwa an, der Balken sei am Anfang ($x = 0$) und am Ende ($x = l$) gestützt, dort sei also $w = 0$, und auf seine Länge mit der Last q pro Längeneinheit in Richtung der z-Achse belastet. Die dadurch hervorgerufenen Durchbiegungen seien $w(x)$. Ändern wir jetzt die Durchbiegungen in $w + \delta w$, so muß hierbei die Änderung der Formänderungsarbeit gleich der von der Belastung geleisteten Arbeit sein, d. h.

$$\delta \int_0^l \frac{EJw''^2}{2}\,dx = \int_0^l q(x)\,\delta w\,dx. \tag{13}$$

Die Änderung von w darf die Auflagerbedingungen nicht verletzen, d. h. für $x = 0$ und $x = l$, wo $w = 0$ gegeben ist, muß $\delta w = 0$ sein. Integrieren wir (13) zweimal partiell, so ergibt sich

$$\delta \int_0^l \frac{EJw''^2}{2}\,dx = \int_0^l EJw''\,\delta w''\,dx = \Big[EJw''\,\delta w'\Big]_0^l$$

$$- \Big[\frac{d}{dx}(EJw'')\,\delta w\Big]_0^l + \int_0^l \delta w \frac{d^2}{dx^2}(EJw'')\,dx$$

oder mit Berücksichtigung von $\delta w(0) = 0$, $\delta w(l) = 0$

$$\int_0^l \delta w \Big\{\frac{d^2}{dx^2}\Big(EJw''\Big) - q\Big\}\,dx + \Big[EJw''\,\delta w'\Big]_0^l = 0. \tag{14}$$

Soll diese Gleichung für alle möglichen δw erfüllt sein, so muß

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJw'') = q \tag{15}$$

und

$$EJw''(0) = 0, \quad EJw''(l) = 0 \tag{16}$$

sein. Spalten wir (15) in zwei Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x), \quad EJ\frac{d^2w}{dx^2} = -M, \tag{17}$$

so haben wir die Differentialgleichungen der Balkenbiegung in der gewöhnlichen Form. M ist an der Stelle x das Moment, mit welchem alle links des Querschnitts angreifenden Kräfte den linken gegen den

rechten Balkenteil zu verdrehen streben (Biegungsmoment). Dazu kommen in dem betrachteten Falle die Randbedingungen

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w''(l) = 0 \tag{18}$$

und die Spannungsgleichung

$$\sigma_x = -\frac{Mz}{J}. \tag{19}$$

§ 2. Torsion prismatischer Stäbe.

1. Differentialgleichung und Randbedingung. Wir betrachten einen zylindrischen Stab. Die untere Endfläche falle in die xy-Ebene, die z-Achse sei den Erzeugenden parallel und gehe etwa durch die Schwerpunkte der zu den Erzeugenden senkrechten Querschnitte. Beanspruchen wir diesen Stab an seinem oberen Ende durch ein um die z-Achse drehendes Moment M, so wird der Stab auf Torsion beansprucht. Den unteren Querschnitt denken wir uns festgehalten. Verdrehen sich bei der Torsion zwei Querschnitte, die den Abstand 1 haben, um den Winkel ω gegeneinander, so dreht sich ein Querschnitt in der Höhe z um den Winkel ωz. Wir suchen nun eine Lösung der Grundgleichungen, für welche die Horizontalverschiebungen

$$u = -\omega z y, \qquad v = \omega z x \tag{1}$$

(das ist bei kleinem ω eine Drehung ωz um die z-Achse) sind. Die Verschiebung in der z-Richtung setzen wir unabhängig von z in der Form

$$w = \omega \varphi(x, y) \tag{2}$$

an. Da bei diesem Ansatz

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$$

ist, sind die beiden ersten Gleichungen [S. 630, (7)] von selbst erfüllt. Aus der letzten erhalten wir für $w = \omega \varphi(x, y)$ die Gleichung des logarithmischen Potentials

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Hierzu kommt als Randbedingung, daß der Mantel des Zylinders spannungsfrei sein soll, also $\Xi = H = Z = 0$. Rechnen wir die Spannungen nach dem Ansatz (1) und (2) aus, so wird

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,$$

es bleiben nur

$$\tau_{zx} = G\omega\left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \quad \tau_{zy} = G\omega\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \tag{4}$$

übrig. Die Randbedingungen [S. 630, (6)] erfordern dann am Querschnittsumriß

$$\tau_{zx}\cos(n, x) + \tau_{zy}\cos(n, y) = 0. \tag{5}$$

Da die Normalen zur Mantelfläche in den Ebenen $z =$ konst liegen, so ist

$$\cos(n, x) = -\frac{dy}{dl}, \quad \cos(n, y) = \frac{dx}{dl}, \tag{6}$$

wenn wir mit dl ein Längenelement des Querschnittsumrisses und mit dx, dy seine Projektionen auf die Achsen bezeichnen. Die Randbedingung (5) wird damit:

$$-\tau_{zx}\frac{dy}{dl} + \tau_{zy}\frac{dx}{dl} = G\omega\left(y\frac{dy}{dl} + x\frac{dx}{dl} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dx}{dl} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dy}{dl}\right) = 0. \tag{7}$$

Ihre einfachste Gestalt nimmt diese an, wenn wir die zu φ konjugierte Potentialfunktion ψ einführen, die mit φ durch die Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

verknüpft ist und mit φ zusammen eine komplexe Funktion $\varphi + i\psi = f(x + iy)$ bildet. Ersetzen wir in (7) φ durch ψ, so erhalten wir

$$x\frac{dx}{dl} + y\frac{dy}{dl} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dl}\right) = 0$$

oder integriert:

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + C. \tag{8}$$

Da auch ψ der Differentialgleichung

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{9}$$

genügt, so ist unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, eine Funktion $\psi(x, y)$ zu finden, welche der Gleichung $\Delta\psi = 0$ genügt und am Rande des Querschnitts die Werte $\frac{x^2 + y^2}{2} + C$ annimmt. Haben wir diese Aufgabe gelöst, so sind die Spannungen bestimmt, welche bei einem gegebenen Verdrehungswinkel ω auftreten. Es bleibt dann noch übrig, den Zusammenhang zwischen ω und dem Torsionsmoment M zu finden. Legen wir einen Querschnitt senkrecht zur z-Achse, so muß offenbar das durch die Schubspannungen (4) vom oberen auf den unteren Teil übertragene Moment gleich M sein, d. h.

$$M = \iint(\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)\,dF. \tag{10}$$

Um dieses Moment auszurechnen, setzen wir

$$\chi = \frac{x^2 + y^2}{2} + C - \psi. \tag{11}$$

Dann ist

$$\Delta\chi = 2 \quad \text{und am Rande} \quad \chi = 0. \tag{12}$$

Ferner

$$\tau_{zx} = -G\omega\frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = G\omega\frac{\partial\chi}{\partial x}, \tag{13}$$

also

$$M = \iint G\omega\left(x\frac{\partial\chi}{\partial x} + y\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{14}$$

Der Integrand ist nun

$$x\frac{\partial\chi}{\partial x} + y\frac{\partial\chi}{\partial y} = \operatorname{grad}\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\operatorname{grad}\chi = \operatorname{div}\chi\operatorname{grad}\frac{x^2+y^2}{2} - 2\chi.$$

Also ergibt, wenn am Rande $\chi = 0$ ist, der Gaußsche Satz

$$M = G\omega\iint\operatorname{grad}\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\operatorname{grad}\chi\,dx\,dy = -2G\omega\iint\chi\,dx\,dy. \tag{15}$$

Daß die Schubspannungen insgesamt keine Resultierende, sondern nur das Moment ergeben, erhält man ebenfalls, wenn man die Spannungen durch χ ausdrückt. Es wird

$$\iint\tau_{zx}\,dx\,dy = -G\omega\iint\frac{\partial\chi}{\partial y}\,dx\,dy = 0,$$

$$\iint\tau_{zy}\,dx\,dy = \quad G\omega\iint\frac{\partial\chi}{\partial x}\,dx\,dy = 0,$$

weil am Rande $\chi = 0$ ist.

2. Elementare Fälle. Zur Integration schlagen wir zunächst im Anschluß an de Saint-Venant ein inverses Verfahren ein, indem wir Funktionen suchen, die der Differentialgleichung genügen, und dann als Querschnittsbegrenzungen diejenigen Kurven nehmen, auf welchen die Funktionswerte die in der Randbedingung (8) festgelegte Bedingung befriedigen.

Der Kreis. Als einfachsten Fall erhalten wir den Kreis, wenn wir ψ konstant annehmen. Die Integrationskonstante C ist unwesentlich und kann gleich Null gesetzt werden. Wir setzen also

$$\psi = R^2/2. \tag{16}$$

Dann ist die Randbedingung erfüllt, wenn wir als Querschnitt einen Kreis vom Radius R nehmen. Die Spannungen werden

$$\tau_{zx} = -G\omega y, \quad \tau_{zy} = G\omega x, \tag{17}$$

d. h. wir erhalten eine Spannung, welche auf dem Radius senkrecht steht, und deren Betrag

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\omega r \tag{17'}$$

dem Abstand r vom Mittelpunkt proportional ist.

Das Torsionsmoment bei der Drehung ω pro Längeneinheit wird

$$M = \iint (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dF = G\omega \iint r^2\, dF = G\omega J_p, \tag{18}$$

wo J_p das polare Trägheitsmoment des Kreises in bezug auf seinen Mittelpunkt

$$J_p = \iint r^2\, dF = \frac{\pi R^4}{2}$$

ist. Bei praktischen Anwendungen ist meist das Moment M gegeben und es wird nach der Gesamtverdrehung bei einer Höhe h des Zylinders

$$\vartheta = h\omega = \frac{M.h}{GJ_p} \tag{19}$$

und nach der größten Spannung

$$\tau_{\max} = G\omega \cdot R = \frac{M.R}{J_p} \tag{20}$$

gefragt.

Der elliptische Querschnitt. Die Torsionsbeanspruchung für einen elliptischen Querschnitt erhalten wir, wenn wir für ψ die quadratische Potentialfunktion

$$\psi = c(x^2 - y^2) + \varrho^2 \tag{21}$$

($c < 0{,}5 =$ konst, $\varrho =$ konst) setzen. Suchen wir die Punkte, für welche die Randbedingung $\psi = \frac{x^2 + y^2}{2}$ erfüllt ist, so erhalten wir die Ellipse

$$c(x^2 - y^2) + \varrho^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wenn

$$a = \frac{\varrho}{\sqrt{0{,}5 - c}}, \qquad b = \frac{\varrho}{\sqrt{0{,}5 + c}}$$

gesetzt wird. Drücken wir c und ϱ durch a und b aus, so erhalten wir als Lösung unserer Randwertaufgabe für die Ellipse mit den Halbachsen a und b

$$\psi = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(x^2 - y^2) + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \tag{22}$$

Daraus ergeben sich die Spannungskomponenten

$$(23)\qquad \begin{cases} \tau_{zx} = G\omega\left(-y + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -\dfrac{2G\omega a^2 y}{a^2+b^2}, \\ \tau_{zy} = G\omega\left(\quad x - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \quad \dfrac{2G\omega b^2 x}{a^2+b^2} \end{cases}$$

und das Torsionsmoment

$$M = \iint (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dx\, dy = \frac{2G\omega}{a^2+b^2}\left\{a^2 \iint y^2\, dx\, dy + b^2 \iint x^2\, dx\, dy\right\}.$$

Für die Ellipse ist

$$\iint x^2\, dx\, dy = \frac{\pi b a^3}{4}, \qquad \iint y^2\, dx\, dy = \frac{\pi a b^3}{4},$$

so daß das Moment

$$(24)\qquad M = \frac{\pi G\omega a^3 b^3}{a^2+b^2}$$

wird.

Wir bestimmen noch die größte auftretende Spannung. Ziehen wir vom Mittelpunkt der Ellipse einen Halbmesser zu einem Randpunkt P, so bemerken wir zunächst, daß längs dieses Halbmessers die Spannungen proportional mit dem Abstand vom Mittelpunkt wachsen. Es kann deshalb die größte Spannung nur auf dem Rande vorkommen. Für die Randpunkte lassen unsere Spannungsformeln eine einfache Deutung zu. Hat der Randpunkt P die Koordinaten x, y, so hat der Endpunkt P' des konjugierten Halbmessers ϱ' die Koordinaten

$$x' = -\frac{a y}{b}, \qquad y' = \frac{b x}{a}.$$

Setzen wir diese in die Spannungsformeln ein, so wird

$$(25)\qquad \tau_{zx} = \frac{2G\omega ab}{a^2+b^2}\, x', \qquad \tau_{zy} = \frac{2G\omega ab}{a^2+b^2}\, y',$$

d. h. die Spannung im Punkte P hat die Richtung des konjugierten Halbmessers und ist seiner Länge ϱ' proportional. Denn der Betrag des Spannungsvektors wird

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2G\omega ab\varrho'}{a^2+b^2}.$$

Daraus ersehen wir, daß die größte Spannung

$$(26)\qquad \tau_{\max} = \frac{2G\omega a^2 b}{a^2+b^2}$$

am Endpunkt der kleinen Achse auftritt, nicht, wie man vielleicht erwarten würde, am Endpunkt der großen Achse.

3. Das Rechteck. Methode der Reihenentwicklungen. An dem Beispiel des rechteckigen Querschnitts wollen wir die Methode der Reihenentwicklung für unsere potentialtheoretische Aufgabe erläutern.

Es sei in der xy-Ebene der rechteckige Querschnitt so gegeben, daß der Koordinatenanfang in den Mittelpunkt fällt, die größere Seite b der y-Achse, die kleinere a der x-Achse parallel sei. Gesucht wird eine Potentialfunktion ψ, die am Rande die Werte $\psi = \frac{x^2 + y^2}{2}$ annimmt, d. h.

$$(27)\quad \begin{cases} \text{auf der größeren Seite } x = \dfrac{a}{2} \text{ die Werte } \psi = \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{y^2}{2}, \\ \text{auf der kleineren Seite } y = \dfrac{b}{2} \text{ die Werte } \psi = \dfrac{b^2}{8} + \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Die Randwertaufgabe können wir dadurch vereinfachen, daß wir an Stelle von ψ seine zweite Ableitung

$$(28)\qquad t = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

betrachten. Die beiden Ableitungen nach x und y sind entgegengesetzt gleich, weil ψ der Differentialgleichung $\Delta \psi = 0$ genügt. Wir erhalten dann für t die Randbedingungen

$$(29)\quad \begin{cases} \text{auf der größeren Seite } \left(x = \dfrac{a}{2}\right) & t = -1 \text{ bzw. } t^* = 0, \\ \text{auf der kleineren Seite } \left(y = \dfrac{b}{2}\right) & t = +1 \text{ bzw. } t^* = 2, \end{cases}$$

wenn $t^* = 1 + t$ gesetzt wird. t^* ist ebenfalls eine Potentialfunktion.

Die Lösung stellen wir in Form einer Reihe

$$t^* = \sum_0^\infty c_\nu p_\nu(x) q_\nu(y)$$

dar. Soll jedes Glied der Reihe der Differentialgleichung genügen, so muß

$$q_\nu(y) \frac{d^2 p_\nu(x)}{dx^2} + p_\nu(x) \frac{d^2 q_\nu(y)}{dy^2} = 0$$

oder

$$\frac{1}{p_\nu(x)} \frac{d^2 p_\nu}{dx^2} = -\frac{1}{q_\nu(y)} \frac{d^2 q_\nu}{dy^2} = \pm \lambda_\nu^2$$

sein. Der gemeinsame Wert der beiden Quotienten kann nur eine Konstante sein, da $\frac{p_\nu''}{p_\nu}$ nicht von y und $\frac{q_\nu''}{q_\nu}$ nicht von x abhängt. Nehmen wir $+\lambda^2$, erhalten wir

$$p_\nu = \mathfrak{Cof}\, \lambda_\nu x \text{ oder } \mathfrak{Sin}\, \lambda_\nu x, \qquad q_\nu = \cos \lambda_\nu y \text{ oder } \sin \lambda_\nu y,$$

für $-\lambda_\nu^2$ wird

$$p_\nu = \cos \lambda_\nu x \quad \text{oder} \quad \sin \lambda_\nu x, \qquad q_\nu = \mathfrak{Cof}\, \lambda_\nu y \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Sin}\, \lambda_\nu y.$$

Wir erhalten also eine Lösung der Potentialgleichung, wenn wir einen hyperbolischen Sinus oder Kosinus von x (bzw. y) mit einem gewöhnlichen Sinus oder Kosinus gleichen Argumentes von y (bzw. x) multiplizieren. Da wir an den Randbedingungen sehen, daß t^* eine gerade Funktion von x und y sein muß, kommen bloß die Kosinus in Frage. Verlangen wir noch, daß die Partikularlösungen auch noch die Bedingung $t^* = 0$ für $x = \pm \frac{a}{2}$ erfüllen sollen, so bleiben nur die Glieder von der Form $\mathfrak{Cof}\, \lambda_\nu y \cos \lambda_\nu x$ übrig, und für diese muß $\lambda_\nu = \frac{(2\nu+1)\pi}{a}$ sein. Wir setzen also an

$$t^* = \sum_0^\infty c_\nu \mathfrak{Cof}\, \lambda_\nu y \cos \lambda_\nu x, \quad \lambda_\nu = \frac{(2\nu+1)\pi}{a}. \tag{30}$$

Jetzt bleibt bloß noch die Bedingung $t^* = 2$ für $y = \pm \frac{b}{2}$ übrig, welche wir benutzen, um die Koeffizienten c_ν zu bestimmen. Mit $y = \pm \frac{b}{2}$ wird

$$t^* = 2 = \sum_0^\infty c_\nu \mathfrak{Cof} \frac{(2\nu+1)\pi b}{2a} \cos \frac{(2\nu+1)\pi x}{a}. \tag{31}$$

Die Bestimmung der c_ν ist aus der Theorie der Fourier-Reihen bekannt. Multipliziert man (31) rechts und links mit $\cos \frac{(2h+1)\pi x}{a}$ und integriert von $-\frac{a}{2}$ bis $+\frac{a}{2}$, so bleibt auf der rechten Seite allein das Glied übrig, für welches $\nu = h$ ist, und man erhält

$$2 \int_{-a/2}^{+a/2} \cos \frac{(2h+1)\pi x}{a}\, dx = c_h \mathfrak{Cof} \frac{(2h+1)\pi b}{2a} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos^2 \frac{(2h+1)\pi x}{a}\, dx$$

oder, ausgerechnet,

$$c_h = \frac{8(-1)^h}{\pi(2h+1)} \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{(2h+1)\pi b}{2a}}. \tag{32}$$

Durch Integration nach x und y erhalten wir aus

$$t^* = \frac{8}{\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)} \frac{\mathfrak{Cof} \frac{(2\nu+1)\pi y}{a}}{\mathfrak{Cof} \frac{(2\nu+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2\nu+1)\pi x}{a} \tag{33}$$

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = t^* - 1, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -x + \dfrac{8a}{\pi^2}\sum_0^\infty \dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\,\dfrac{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi y}{a}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}\sin\dfrac{(2\nu+1)\pi x}{a}; \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 1 - t^*, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = y - \dfrac{8a}{\pi^2}\sum_0^\infty \dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\,\dfrac{\mathfrak{Sin}\dfrac{(2\nu+1)\pi y}{b}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}\cos\dfrac{(2\nu+1)\pi x}{a}. \end{cases}$$

Die Integrationskonstanten verschwinden, weil die Spannungen

$$\tau_{zx} = G\omega\Big(-y + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big), \qquad \tau_{zy} = G\omega\Big(x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)$$

im Mittelpunkt ($x = 0$, $y = 0$) aus Symmetriegründen Null werden. Die Spannungen ergeben sich zu

$$(35)\quad \begin{cases} \tau_{zx} = -\dfrac{8G\omega a}{\pi^2}\sum_0^\infty \dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\,\dfrac{\mathfrak{Sin}\dfrac{(2\nu+1)\pi y}{a}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}\cos\dfrac{(2\nu+1)\pi x}{a}, \\ \tau_{zy} = G\omega\left\{2x - \dfrac{8a}{\pi^2}\sum_0^\infty \dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}\,\dfrac{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi y}{a}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}\sin\dfrac{(2\nu+1)\pi x}{a}\right\}. \end{cases}$$

Die größte Spannung tritt in der Mitte der großen Seite, also für $x = \dfrac{a}{2}$, $y = 0$ auf, da das Glied $2G\omega x$ die Reihen überwiegt. Sie wird also

$$(36)\qquad \tau_{\max} = G\omega a\left\{1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^2}\,\frac{1}{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}\right\}.$$

Da $b > a$ vorausgesetzt war, konvergiert diese Reihe außerordentlich rasch. Es genügt, für alle praktischen Zwecke von der Summe nur das erste Glied $\dfrac{1}{\mathfrak{Cof}\dfrac{\pi b}{2a}}$ zu nehmen, denn im ungünstigsten Falle $b = a$

ist der Wert dieses ersten Gliedes $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2}} \sim 0{,}4$. Der Wert der übrigen Glieder ist

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^2} \frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{(2\nu+1)\pi}{2}} < \frac{2}{9} \sum_1^\infty e^{-\frac{(2\nu+1)\pi}{2}} = \frac{2}{9} \frac{e^{-\frac{3\pi}{2}}}{1-e^{-\pi}} = 0{,}002.$$

Die Reihe wird also durch das erste Glied bereits mit einer Genauigkeit von 0,5 Proz. gegeben.

Es wird somit genau genug

$$\tau_{\max} = G\omega a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2 \mathfrak{Cof}\frac{\pi b}{2a}} \right\}. \tag{36'}$$

Das Torsionsmoment

$$M = \iint (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\, dx\, dy$$

errechnet man durch elementare Integration zu

$$M = \frac{G\omega b a^3}{6} + \frac{16 G\omega a^3 b}{\pi^4} \sum_0^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^4} - \frac{64 G\omega a^4}{\pi^5} \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{Tg}\frac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}{(2\nu+1)^5}.$$

Hier ist

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

also

$$M = \frac{G\omega a^3 b}{3} - \frac{64 G\omega a^4}{\pi^5} \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{Tg}\frac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}{(2\nu+1)^5}. \tag{37}$$

Auch hier kann man sich auf das erste Glied der unendlichen Summe beschränken, denn das erste Glied wird im ungünstigsten Falle $b = a$

$$\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{2} = 0{,}927.$$

Der ganze Rest ist

$$R = \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{Tg}\frac{(2\nu+1)\pi b}{2a}}{(2\nu+1)^5} < \sum_1^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^5} < 0{,}0046.$$

Die Summe wird also durch das erste Glied mit 0,5 Proz. Genauigkeit dargestellt. Somit wird mit praktisch ausreichender Genauigkeit

$$M = \frac{G\omega a^3 b}{3} - \frac{64 G\omega a^4}{\pi^5} \mathfrak{Tg}\frac{\pi b}{2a}. \tag{37'}$$

Schließlich sei noch die Verschiebung w hingeschrieben:

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} w &= \omega\varphi(x, y) \\ &= \omega\left\{ xy - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} \frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{(2\nu+1)\pi y}{a}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{(2\nu+1)\pi b}{2a}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi x}{a} \right\}. \end{aligned} \right.$$

4. Polygonal begrenzte Querschnitte. Funktionentheoretische Methode. Die Lösung der Randwertaufgabe des Torsionsproblems gelingt für geradlinige Polygone durch Heranziehung der Methode der konformen Abbildung.

Zunächst läßt sich die Randbedingung $\psi = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ wieder besonders einfach formulieren, wenn wir neben der Funktion $\varphi + i\psi$ ihre zweite Ableitung nach $x + iy$ einführen.

Setzen wir zunächst

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} p + iq &= \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)}, \\ \text{so ist} \qquad p &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

und setzen wir ferner

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} s + it &= \frac{d(p + iq)}{d(x + iy)} = \frac{d^2(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)^2}, \\ \text{so wird} \qquad s &= \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\ t &= \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Schubspannungen werden dann

$$(41)\qquad \tau_{xz} = G\omega(-y + p), \qquad \tau_{yz} = G\omega(x - q).$$

Wir betrachten nun die ν-te Polygonseite. Bezeichnet χ_ν den Winkel, den diese Seite mit der x-Achse bildet, und dl das Längenelement auf ihr, so liefert eine zweimalige Differentiation der Randbedingung nach l

$$\frac{d^2\psi}{dl^2} = 1.$$

Nun ist aber

$$\frac{d^2\psi}{dl^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2x}{dl^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d^2y}{dl^2}.$$

Hier ist

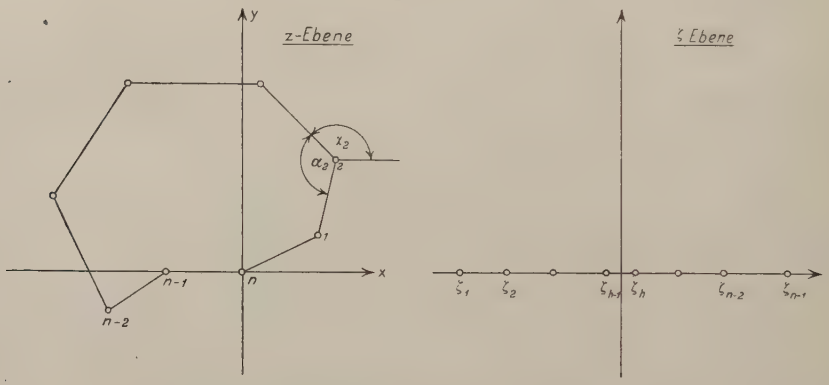
$$\frac{dx}{dl} = \cos\chi_\nu, \quad \frac{dy}{dl} = \sin\chi_\nu, \quad \frac{d^2x}{dl^2} = \frac{d^2y}{dl^2} = 0.$$

Wir erhalten daraus

$$s\sin 2\chi_\nu + t\cos 2\chi_\nu = 1. \tag{42}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die vom Nullpunkt den Abstand 1 hat und mit der s-Achse (in einer st-Ebene) den Winkel $-2\chi_\nu$ bildet. Betrachten wir also die konforme Abbildung, die durch die Funktion $s + it$ dadurch vermittelt wird, daß diese Funktion jedem

Fig. 67.



Punkte der xy-Ebene einen Punkt der st-Ebene zuordnet, so folgt aus Gleichung (42), daß bei dieser Abbildung die ν-te Polygonseite des Querschnitts in der xy-Ebene in die Gerade $s\sin 2\chi_\nu + t\cos 2\chi_\nu = 1$ der st-Ebene übergeht. Es wird also der gegebene Querschnitt wieder auf ein Polygon abgebildet. Die Seiten des gegebenen Querschnitts bilden mit der x-Achse die Winkel χ_1, χ_2, χ_3 usw., die Seiten seines Bildes in der st-Ebene die Winkel $-2\chi_1, -2\chi_2, -2\chi_3$ usw. Sind also die Eckwinkel des Querschnitts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ usw., so sind die Eckwinkel des Bildes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ usw. durch

$$\beta_\nu = (2m_\nu + 1)\pi - 2\alpha_\nu \tag{43}$$

bestimmt, wo die m_ν ganze Zahlen sind.

Wir haben somit unser Problem auf die Aufgabe zurückgeführt, das gegebene Polygon in der xy-Ebene mit den Winkeln α_ν auf ein dem Einheitskreis umschriebenes Polygon der st-Ebene mit den Winkeln β_ν derart abzubilden, daß die Ecken den Ecken entsprechen. Nun können natürlich zwei gegebene Polygone im allgemeinen nicht so aufeinander abgebildet werden, daß die Ecken den Ecken entsprechen. Das ist im vorliegenden Falle nur möglich, weil es uns noch freisteht, in der

st-Ebene Verzweigungspunkte in solcher Zahl und Verteilung anzubringen, daß die genannte Bedingung erfüllt ist.

Die Abbildungsaufgabe wird in der Weise gelöst, daß xy- und st-Ebene auf die Ebene einer komplexen Hilfsvariablen $\zeta = \xi + i\eta$ so abgebildet werden, daß beide Polygone in die obere ζ-Halbebene übergehen. Wir legen unsere Koordinaten so, daß in der xy-Ebene die n-te Ecke des Querschnitts in den Nullpunkt und die n-te Seite (von der Ecke $n-1$ zur Ecke n) in die x-Richtung fällt. Der Winkel der n-ten Seite gegen die x-Richtung ist dann

$$\chi_n = 2\pi. \tag{44}$$

Der dem Nullpunkt der xy-Ebene entsprechende Punkt in der ζ-Ebene sei der Punkt $\zeta = \infty$. Die Ecken des Querschnitts mögen in der ζ-Ebene den Punkten $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ entsprechen. Dann wird die Abbildung der xy-Ebene auf die ζ-Ebene nach den Formeln von Schwarz und Christoffel (1. Bd., XVI, § 3, S. 553) durch das Integral

$$x + iy = \int_{\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\Pi(\zeta - \xi_\nu)^{1-\varkappa_\nu}} \tag{45}$$

vermittelt, wobei die $\varkappa_\nu$ sich aus den inneren Eckwinkeln des Querschnitts zu

$$\varkappa_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\pi} \tag{46}$$

bestimmen.

Betrachten wir zweitens das Polygon in der st-Ebene, so wissen wir, daß bei der Abbildung die Ecken desselben den Ecken des Querschnitts entsprechen müssen, also in der ζ-Ebene den Punkten ξ_1 bis ξ_{n-1}. Die Beziehung zwischen der ζ- und der st-Ebene wird nun ebenfalls durch ein Integral der Form (46) vermittelt, nur erhält dasselbe eine etwas allgemeinere Form. An Stelle der Exponenten $1 - \varkappa_\nu$ treten im Nenner die Exponenten

$$1 - \frac{\beta_\nu}{\pi} = \frac{2\alpha_\nu}{\pi} - 2m_\nu = 2\varkappa_\nu - 2m_\nu. \tag{47}$$

Außerdem kann die st-Ebene verzweigt sein. Wir tragen dem Rechnung, indem wir dem Integranden noch eine ganze rationale Funktion $R(\zeta)$ mit reellen Koeffizienten hinzufügen, deren Nullstellen eben den Verzweigungspunkten entsprechen. Wir setzen also

$$s + it = \int \frac{\Pi(\zeta - \xi_\nu)^{2m_\nu} R(\zeta)\, d\zeta}{\Pi(\zeta - \xi_\nu)^{2\varkappa_\nu}}. \tag{48}$$

Daß $R(\zeta)$ reelle Koeffizienten haben muß, erkennt man folgendermaßen: Ein Punkt ζ^*, für den $R(\zeta^*) = 0$ ist, entspricht einem Verzweigungspunkt der st-Ebene. Spiegelt man nun das Polygon der st-Ebene an

der ν-ten Seite und entsprechend die obere ξ-Halbebene an der Strecke $\xi_{\nu-1} \to \xi_\nu$, so muß dem Spiegelbild $\bar{\xi}^*$ des Punktes ξ^* wieder ein Verzweigungspunkt der st-Ebene entsprechen. Es ist also auch $R(\bar{\xi}^*) = 0$, also hat R reelle Koeffizienten.

Wir bestätigen nun, daß der Ansatz (48) tatsächlich die Lösung des Problems liefert. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Strecke $\xi_{h-1} \to \xi_h$ auf der ξ-Achse, die der h-ten Polygonseite entspricht. Nach (42) ist hier

$$s \sin 2\chi_h + t \cos 2\chi_h = 1.$$

Hierfür schreiben wir

$$J\{e^{i2\chi_h}(s+it)\} = 1 \qquad (J = \text{Imaginärteil}) \tag{49}$$

und erhalten durch Differentiation

$$J\left\{e^{i2\chi_h}\frac{d(s+it)}{d\xi}\right\} = 0. \tag{50}$$

Bilden wir nun aus (48)

$$\frac{d(s+it)}{d\xi} = \frac{\Pi(\xi-\xi_\nu)^{2m_\nu} R(\xi)}{\Pi(\xi-\xi_\nu)^{2\varkappa\nu}}, \tag{51}$$

so ist der Zähler reell, da die m_ν ganze Zahlen sind und R reell ist. Aus dem Produkt im Nenner sind die Faktoren reell, für die $\xi_\nu < \xi_{h-1}$ ist, also von $\nu = 1$ bis $\nu = h-1$. Für die Faktoren $(\xi-\xi_h)^{2\varkappa_h}$ bis $(\xi-\xi_{n-1})^{2\varkappa_{n-1}}$ wird $(\xi-\xi_\nu)^{2\varkappa_\nu} = |\xi-\xi_\nu| e^{2\pi i \varkappa_\nu}$. Es wird also, wenn wir alle reellen Größen zusammen durch Z bezeichnen:

$$\frac{d(s+it)}{d\xi} = Z \prod_h^{n-1} e^{-2i\pi\varkappa_\nu}. \tag{52}$$

Es bleibt zu zeigen, daß der Faktor $\prod_h^{n-1} e^{-2i\varkappa_\nu\pi}$ gleich $\pm e^{-i2\chi_h}$ ist.

Ist χ_ν der Winkel der ν-ten Polygonseite gegen die x-Achse, so ist

$$\chi_{\nu+1} - \chi_\nu = \pi - \alpha_\nu,$$

also, durch Summation von h bis $n-1$,

$$\chi_n - \chi_h = (n-h)\pi - \sum_h^{n-1} \alpha_\nu.$$

Es folgt, da $\chi_n = 2\pi$ ist,

$$e^{-2i\chi_h} = \pm e^{-\sum_h^{n-1} 2i\alpha_\nu},$$

also, wie verlangt war,

$$\prod_h^{n-1} e^{-2i\varkappa_\nu\pi} = \pm e^{-2i\chi_h}. \tag{53}$$

In dem Ansatz (48) sind noch die Exponenten m_ν und die ganze rationale Funktion $R(\zeta)$ unbestimmt. Wir zeigen zunächst, daß die Exponenten m nicht negativ sein können. Das folgt aus der physikalischen Forderung, daß die Verzerrungsenergie endlich bleiben muß. Auf die Längeneinheit des Stabes ist diese pro Flächeneinheit des Querschnittes

$$e = \tfrac{1}{2} G \omega^2 \{(y-p)^2 + (x-q)^2\}. \tag{54}$$

Soll die gesamte Energie $\int\int e\,dx\,dy$ endlich bleiben, so muß das Integral $\int\int (p^2+q^2)\,dx\,dy$ konvergieren, also $p+iq$ schwächer werden als $\{(x+iy)-(x_\nu+iy_\nu)\}^{-1/2}$, wenn wir uns der ν-ten Ecke nähern.

Schreiben wir $z = x+iy$ (z ist also jetzt nicht mehr die dritte Raumkoordinate), so ist für die Umgebung des h-ten Eckpunktes:

$$\begin{cases} z - z_h = C\,(\zeta-\zeta_h)^{\varkappa_h} + \cdots \\ s+it = C'(\zeta-\zeta_h)^{2m_h - 2\varkappa_h + 1} + \cdots \end{cases} \tag{55}$$

C, C' sind Konstante, welche wir nicht näher bestimmen, also:

$$s+it = C''(z-z_h)^{\frac{2m_h+1}{\varkappa_h} - 2} + \cdots$$

und nach Integration

$$p+iq = C'''(z-z_h)^{\frac{2m_h+1}{\varkappa_h} - 1}.$$

Soll der Exponent größer als $-\frac{1}{2}$ sein, so ist

$$4m_h + 2 - 2\varkappa_h > -\varkappa_h$$

oder

$$m_h > -\frac{1}{2} + \frac{\varkappa_h}{4}.$$

Nun liegt $\varkappa_h = \frac{\alpha_h}{\pi}$ stets zwischen 0 und 2, so daß m als ganze Zahl

$$m_h \geqq 0 \tag{56}$$

sein muß. Vereinigen wir positive Potenzen von $(\zeta-\zeta_h)$ mit $R(\zeta)$, so erhalten wir

$$s+it = \int \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_\nu)^{2\varkappa_\nu}}.$$

Die gleiche Betrachtung gestattet uns, den Grad von $R(\zeta)$ abzuschätzen. Wir betrachten hierzu den Punkt $z=0$, $\zeta=\infty$. Die Durchführung der Rechnung ist vollkommen die gleiche, und wir erhalten, wenn wir den Grad von R mit N bezeichnen:

$$N \leqq 2n-6. \tag{57}$$

Damit wird die vollständige Lösung in Parameterform:

$$(58)\quad \begin{cases} z = \int_{\infty}^{\zeta} \dfrac{d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_\nu)^{1-\varkappa_\nu}}, \\ s+it = \int \dfrac{R(\zeta)\,d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_\nu)^{2\varkappa_\nu}}, \\ R(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{2n-6}\zeta^{2n-6} \quad a_\nu = \text{reell}. \end{cases}$$

Hier sind in jedem einzelnen Falle noch die Koeffizienten a_0 bis a_{2n-6} zu bestimmen. Wir haben zunächst nur gezeigt, daß auf den Polygonseiten $\sin 2\chi_\nu\, ds + \cos 2\chi_\nu\, dt = 0$ ist, also $s\sin 2\chi_\nu + t\cos 2\chi_\nu = \text{const}$. Die Koeffizienten müssen so bestimmt werden, daß diese Konstante auf allen Polygonseiten gleich 1 wird.

Wir wollen uns davon überzeugen, daß die Zahl der Koeffizienten und der Integrationskonstanten (eine komplexe gleich zwei reellen gerechnet) gerade ausreicht, um die Randbedingung zu befriedigen. Ist auf jeder Polygonseite $s\sin 2\chi_\nu + t\cos 2\chi_\nu = 1$, so ist damit $\dfrac{d^2\psi}{dl^2} = 1$; ist außerdem in allen Ecken $\psi = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, so ist die Randbedingung überall befriedigt. Diese n Bedingungen für die Seiten und n Bedingungen für die Ecken ergeben zusammen $2n$ Bedingungen, zu deren Erfüllung uns gerade $2n$ Konstanten zur Verfügung stehen, nämlich:

$2n-5$ Koeffizienten a_0 bis a_{2n-6},
2 Integrationskonstanten für $s+it$,
2 Integrationskonstanten für $p+iq$,
1 Integrationskonstante für ψ.

Das einfachste Beispiel, das sich übrigens auch aus der inversen Methode ergibt, ist das gleichseitige Dreieck. n ist gleich 3, $R(\zeta)$ reduziert sich also auf eine Konstante, die Winkel sind $\alpha_\nu = \dfrac{\pi}{3}$, also ist

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = {}^1/_3,$$
$$2\varkappa_\nu = {}^2/_3, \quad 1-\varkappa_\nu = {}^2/_3,$$

und die Integrale werden:

$$(59)\quad \begin{cases} z = \int_{\infty}^{\zeta} \dfrac{d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_\nu)^{2/3}}, \\ s+it = \int \dfrac{a_0\,d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_\nu)^{2/3}}. \end{cases}$$

Es ist also

$$s+it = a_0 z + \text{Integrationskonstante}.$$

Die beiden Konstanten bestimmen sich aus der Bedingung, daß auf den Seiten $s \sin 2\chi_\nu + t \cos 2\chi_\nu = 1$ sein soll. Von der speziellen Festsetzung über die Lage des Koordinatensystems können wir uns freimachen; wir legen das Dreieck so, daß es einem Kreise vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegt, derart eingeschrieben ist, daß die dritte Seite der x-Achse parallel liegt, es sei dies die Gerade $y = -\frac{\varrho}{2}$. Für diese Wahl des Koordinatensystems verschwindet die Integrationskonstante, und es wird $a = -\frac{2}{\varrho}$, wie man leicht bestätigt. Es wird also

$$s + it = -\frac{2z}{\varrho}.$$

Durch Integration ergibt sich

$$p + iq = -\frac{z^2}{\varrho}.$$

Die Integrationskonstante fällt weg, weil im Schwerpunkt des Dreiecks die Spannungen aus Symmetriegründen verschwinden. Eine nochmalige Integration liefert

$$\varphi + i\psi = -\frac{z^3}{3\varrho} + C_1 + iC_2,$$

also für den Imaginärteil

$$\psi = \frac{y^3 - 3x^2 y}{3\varrho} + C_2.$$

Die noch zu bestimmende Konstante C_2 erhalten wir, indem wir verlangen, daß im Mittelpunkt der dritten Seite, d. h. für $x = 0$, $y = -\frac{\varrho}{2}$, $\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{\varrho^2}{8}$ sein soll. Es ergibt sich

$$C_2 = \frac{\varrho^2}{6},$$

also

$$\psi = \frac{y^3 - 3x^2 y}{3\varrho} + \frac{\varrho^2}{6}. \tag{60}$$

Damit werden die Spannungen:

$$\tau_{zx} = -G\omega\left(y - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = -G\omega\left(y + \frac{x^2 - y^2}{\varrho}\right),$$

$$\tau_{zy} = G\omega\left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = G\omega\left(x + \frac{2xy}{\varrho}\right).$$

Die größte Spannung tritt in der Seitenmitte auf, wird also

$$\tau_{\max} = \frac{3G\omega\varrho}{4} = \frac{G\omega l\sqrt{3}}{4}. \tag{61}$$

Das Torsionsmoment berechnet sich zu

$$M = \frac{G\omega l^4 \cdot \sqrt{3}}{80}, \tag{62}$$

wo l die Länge der Dreiecksseite ist.

§ 3. Beanspruchung ebener Platten durch Kräfte, die in der Plattenebene wirken.

1. Die Spannungsfunktion. Wir betrachten eine ebene Platte, d. h. einen zylindrischen Körper, bei dem der Abstand der parallelen oberen und unteren Begrenzungsebene klein ist gegen die Abmessungen der Grundfläche. Beansprucht werde diese Platte durch Kräfte, welche an dem Umriß angreifen und in der Ebene der Platte wirken.

Das Koordinatensystem legen wir so, daß die x- und y-Achse in die Mittelebene der Platte fallen, die z-Achse ist dann senkrecht zur Platte.

Wir wollen nun Gleichungen für die Mittelwerte der Spannungen, genommen über die Plattendicke, also $\bar{\sigma} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma\, dz$ usw., aufstellen. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, daß an den Oberflächen $z = +h/2$ und $z = -h/2$, wo keine Kräfte angreifen, die Spannungen σ_z, τ_{zx}, τ_{zy} verschwinden müssen. Daraus folgt nach der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

daß hier auch $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ Null werden muß. Wir nehmen deshalb an, daß σ_z überhaupt oder wenigstens der Mittelwert Null wird. Diese Annahme ist um so besser erfüllt, je dünner die Platte ist. Für die Mittelwerte der Spannungen

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma\, dz, \qquad \bar{\tau} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} \tau\, dz,$$

die wir durch Überstreichen bezeichnen, erhalten wir dann aus den Gleichgewichtsbedingungen durch Integration der Gleichgewichtsgleichungen:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ihren Zusammenhang mit den Mittelwerten der Verzerrungsgrößen

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_x\, dz, \qquad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} \gamma_{xy}\, dz, \qquad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_y\, dz$$

erhalten wir durch Integration der Spannungs-Dehnungsgleichungen nach z zu

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{\varepsilon}_x = \dfrac{1}{2G}\left\{\bar{\sigma}_x - \dfrac{\bar{s}}{m+1}\right\}, \quad \bar{s} = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y, \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \bar{\varepsilon}_y = \dfrac{1}{2G}\left\{\bar{\sigma}_y - \dfrac{\bar{s}}{m+1}\right\}, \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \bar{\gamma}_{xy} = \dfrac{1}{G}\bar{\tau}_{xy}. \end{cases}$$

Das allgemeine Integral der Gl. (1) ist

$$(3)\qquad \bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Die Größe F wird als Spannungsfunktion bezeichnet.

Die Differentialgleichung für F erhalten wir, wenn wir beachten, daß zwischen den Größen

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$

die aus der Vertauschbarkeit der Differentiationen folgende sogenannte Kompatibilitätsgleichung (Verträglichkeitsbedingung)

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x\, \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y\, \partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_y}{\partial x^2}$$

besteht. Setzen wir dies in (2) ein, wobei wir wieder als Abkürzung $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ schreiben, so erhalten wir

$$(5)\qquad -\frac{1}{G}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\, \partial y^2} = \frac{1}{2G}\left\{\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2}\right)\right\}$$

oder

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{1}{m+1}\Delta\Delta F = 0.$$

Nun ist aber

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},$$

also ergibt (5), wenn wir den Faktor $\frac{m}{m+1}$ kürzen:

$$\Delta\Delta F = 0. \tag{6}$$

Zu der Differentialgleichung (6) treten die Randbedingungen, welche ausdrücken, daß am Rande die Spannungen mit den dort angreifenden äußeren Kräften im Gleichgewicht sein müssen. Bezeichnen wir durch Ξ und H die Mittelwerte der pro Längeneinheit am Rande angreifenden äußeren Kräfte, und mit $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ die Richtungskosinus der Randnormalen gegen die x- und y-Achse, so erfordert das Gleichgewicht

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x \cos(n, x) + \bar{\tau}_{xy} \cos(n, y) = \Xi, \\ \bar{\tau}_{xy} \cos(n, x) + \bar{\sigma}_y \cos(n, y) = H. \end{cases} \tag{7}$$

Drücken wir die Spannungen durch die Spannungsfunktion aus und setzen

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{dl}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{dl}, \tag{8}$$

wo dl das Längenelement längs der Randkurve, dx und dy seine Projektionen auf die Achsen sind, so erhalten wir

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dl} = \Xi, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{dl} = H. \end{cases} \tag{9}$$

Hier können wir nach x und y integrieren:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = \int \Xi dl = P(l), \\ \frac{\partial F}{\partial x} = -\int H dl = -Q(l). \end{cases} \tag{10}$$

Da eine Integrationskonstante die Spannungen nicht beeinflußt, können wir die Integrale der rechten Seite von einem beliebigen Punkte aus nehmen. P und Q sind die Komponenten der Resultierenden aller Kräfte, welche zwischen dem Anfangspunkt der Integration und einem beliebigen Punkte angreifen.

Durch nochmalige Integration ergibt sich

$$F = \int (P dy - Q dx). \tag{11}$$

Eine partielle Integration liefert die physikalische Bedeutung von F, F ist das Moment aller zwischen Anfangspunkt und Endpunkt der Integration angreifenden äußeren Kräfte, bezogen auf den letzteren.

Die Randbedingung (10) können wir noch in einer vereinfachten Form schreiben. Bezeichnen wir das längs der äußeren Normalen genommene Längenelement mit dn, so ist

$$\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{dl}, \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{dl},$$

und wir erhalten aus (10)

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = -\left(Q\frac{dy}{dl} + P\frac{dx}{dl}\right). \tag{12}$$

Die Integrationsaufgabe, auf welche wir das Spannungsproblem zurückgeführt haben, können wir also folgendermaßen formulieren: es ist eine Funktion F zu bestimmen, welche der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta F = 0$$

genügt und am Rande mit ihrer Normalableitung die vorgegebenen Werte

$$F = \int (P\,dy - Q\,dx), \quad \frac{\partial F}{\partial n} = -\left(P\frac{dx}{dl} + Q\frac{dy}{dl}\right) \tag{11 u. 12}$$

annimmt.

Berechnung der Verschiebungen aus der Spannungsfunktion. Die Berechnung der Verschiebungen bei gegebenen Spannungen erfolgt systematisch so, daß aus den Spannungs-Dehnungsgleichungen zunächst die Verzerrungskomponenten berechnet werden; aus ihnen gewinnt man durch Differentiation die sämtlichen zweiten Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z, aus denen man durch zweimalige Integration die Verschiebungen selbst ermittelt, welche dadurch bis auf eine deformationslose Parallelverschiebung und Drehung des ganzen Körpers bestimmt sind. Die Rechnung selbst bietet kein besonderes Interesse, das Resultat für unseren Fall ist das folgende: Aus $s = \Delta F$ folgt $\Delta s = 0$, s ist also eine ebene Potentialfunktion. Bezeichnen wir die konjugierte Potentialfunktion mit t, so ist $s + it$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x + iy$. Bezeichnen wir ferner durch $S + iT$ das komplexe Integral dieser Funktion

$$\begin{cases} S + iT = \int (s + it)(dx + i\,dy), & \dfrac{\partial S}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial y} = s, \\ & -\dfrac{\partial S}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial x} = t, \end{cases} \tag{13}$$

so werden die Verschiebungen:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2G}\left\{\dfrac{m}{m+1}S - \dfrac{\partial F}{\partial x}\right\} - \gamma y + u_0, \\ v = \dfrac{1}{2G}\left\{\dfrac{m}{m+1}T - \dfrac{\partial F}{\partial y}\right\} + \gamma x + v_0. \end{cases} \tag{14}$$

Wir bestätigen sofort, daß diese Verschiebungen die richtigen Spannungswerte ergeben. Es wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2G}\left\{\frac{m}{m+1}s - \sigma_y\right\},\\
&= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_x - \frac{s}{m+1}\right\},\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2G}\left\{\frac{m}{m+1}s - \sigma_x\right\},\\
&= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_y - \frac{s}{m+1}\right\},\\
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2G}\left\{\frac{m}{m+1}(t-t) - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right\},\\
&= \frac{\tau_{xy}}{G},
\end{aligned}$$

wie die Spannungs-Dehnungsgleichungen es verlangen. Die Integrationskonstanten u_0 und v_0 ergeben eine Parallelverschiebung der Platte, γ, das klein sein muß, eine deformationslose Drehung um den Winkel γ. Bilden wir den Wirbel des Verschiebungsvektors, so erhalten wir die geometrische Bedeutung der Funktion t. Es ist von den unwesentlichen Integrationskonstanten abgesehen.

$$(15)\qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2G}\,\frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y}\right) = \frac{-mt}{G(m+1)}.$$

t ist somit bis auf den Faktor $-\dfrac{G(m+1)}{m}$ der Wirbel des Verschiebungsvektors, d. h. gleich der mittleren Verdrehung der von einem Punkte ausgehenden Linienelemente.

Mehrfach zusammenhängende Bereiche. Die Formeln für die Verschiebungen sind von Wichtigkeit, wenn die betrachteten Bereiche nicht mehr einfach zusammenhängen, d. h. wenn wir eine Platte mit Löchern haben. In den Randwerten für F und $\dfrac{\partial F}{\partial n}$ stecken drei willkürliche Integrationskonstanten. Bei einem einfach zusammenhängenden Bereich ist diese Unbestimmtheit unwesentlich. Die verschiedenen Lösungen, bei verschiedener Wahl dieser Konstanten, unterscheiden sich bloß durch lineare Funktionen in x und y, welche bei den zur Spannungsbestimmung erforderlichen Differentiationen fortfallen. Haben wir aber einen mehrfach zusammenhängenden Bereich, so haben wir an jedem Rande drei unbestimmte Konstanten, von welchen allen nur drei willkürlich sein können; die anderen bestimmen sich aus der Forderung, daß nicht nur die Spannungen, sondern auch die Verschiebungen ein-

deutige Funktionen von x und y sein müssen. Dazu ist zunächst erforderlich, daß die mittlere Verdrehung der Linienelemente, d. h. die Funktion t, eindeutig ist. Nun ist

$$t = \int \left(\frac{\partial s}{\partial x} dy - \frac{\partial s}{\partial y} dx \right). \tag{16}$$

Wenn also nach einem Umlauf um ein Loch in der Platte t zu seinem Anfangswert zurückkehren soll, so muß das um das Loch herum zu nehmende Integral

$$\int \left(\frac{\partial s}{\partial y} dx - \frac{\partial s}{\partial x} dy \right) = \int \frac{\partial s}{\partial n} dl = 0 \tag{17}$$

sein.

Sollen auch noch u und v eindeutig sein, so müssen die Ausdrücke

$$\frac{m}{m+1} S - \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{m}{m+1} T - \frac{\partial F}{\partial y}$$

nach einem Umlauf um ein Loch zu ihrem Anfangswert zurückkehren. Nun ist

$$S = \int (s dx - t dy), \quad T = \int (s dy + t dx). \tag{18}$$

Umlaufen wir das Loch so, daß die äußere Normale zur Rechten der Fortschreitungsrichtung liegt, so ist, wie wir oben sahen, der Unterschied der Werte von $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $-\frac{\partial F}{\partial x}$ zwischen zwei Punkten gleich der Summe der zwischen beiden Punkten in der x- bzw. y-Richtung angreifenden Kräfte. Gehen wir also um das ganze Loch herum, so sind $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $-\frac{\partial F}{\partial x}$ um P^* und Q^* gewachsen, mit welchen Größen wir die Summe der x- und y-Komponenten aller am Lochrand angreifenden Kräfte bezeichnen. Sollen nun $\frac{m}{m+1} S - \frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{m}{m+1} T - \frac{\partial F}{\partial y}$ zu ihren Anfangswerten zurückkehren, so müssen $\frac{m}{m+1} S$ und $\frac{m}{m+1} T$ um die gleichen Beträge wachsen wie $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$, also müssen die in der angegebenen Richtung um das Loch erstreckten Integrale

$$\begin{cases} \frac{m}{m+1} \int (t dx + s dy) = P^*, \\ \frac{m}{m+1} \int (t dy - s dx) = Q^* \end{cases} \tag{19}$$

sein.

Lassen wir am Außenrand der Platte die Integrationskonstanten willkürlich, so sind dieselben für jedes Loch im Innern durch die Be-

dingungen (17) und (19) bestimmt. Die Integration ist natürlich erheblich dadurch erschwert, daß die Funktion F und ihre ersten Ableitungen nicht mehr im ganzen Bereich eindeutig sind.

2. Einzelkraft am Rande einer Halbebene. Wir betrachten die Halbebene $y \geqq 0$, auf welche im Nullpunkt eine Einzelkraft K in Richtung der y-Achse wirke. Wir bestimmen zunächst die Randwerte von $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ längs der x-Achse, indem wir die Integrationen bei $x = -\infty$ beginnen. Es war (10)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = P,$$

wo P und Q die Summe der horizontalen und vertikalen Kräfte zwischen dem Ausgangspunkt ($x = -\infty$) und dem betrachteten Punkte sind. Folglich ist

$$(20) \quad \begin{cases} \text{für } x < 0 & \frac{\partial F}{\partial x} = 0, & \frac{\partial F}{\partial y} = 0, & F = 0, \\ \text{für } x > 0 & \frac{\partial F}{\partial x} = -K, & \frac{\partial F}{\partial y} = 0, & F = -Kx. \end{cases}$$

Um die Lösung zu finden, bemerken wir, daß, wenn φ_1 und φ_2 ebene Potentialfunktionen sind, die Funktion

$$(21) \qquad F = \varphi_1 + y\varphi_2$$

der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügt. Für $y = 0$ ist $F = \varphi_1$. Die Randwerte von φ_1 sind also einfach die Randwerte von F. Eine Potentialfunktion, welche die für die Randwerte von F charakteristische Eigenschaft hat, auf der positiven und negativen Seite linear zu verlaufen und im Nullpunkt einen Sprung in der Ableitung aufzuweisen, finden wir in dem Imaginärteil der komplexen Funktion

$$\begin{aligned} (x + iy)\ln(x + iy) &= (x + iy)(\ln r + i\vartheta) \\ &= x\ln r - y\vartheta + i(x\vartheta + y\ln r), \end{aligned}$$

wo r und ϑ gewöhnliche Polarkoordinaten sind. Setzen wir

$$(22) \qquad \varphi_1 = \frac{K}{\pi}(x\vartheta + y\ln r) - Kx,$$

so sind die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. Soll ferner längs der ganzen x-Achse $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ sein, so muß

$$\varphi_2 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

sein. Wir erhalten also

$$F = \varphi_1 - y\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

oder, ausgerechnet,

$$F = \frac{K}{\pi}(x\vartheta - y) - Kx. \tag{23}$$

Lassen wir die für die Spannungen unwesentlichen Glieder $-\frac{Ky}{\pi}$ und $-Kx$ weg, so erhalten wir einfach

$$F = \frac{K\vartheta x}{\pi}. \tag{24}$$

Durch Differentiation erhalten wir die Spannungen

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2K}{\pi}\frac{x^2 y}{r^4}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{2K}{\pi}\frac{y^3}{r^4}, \quad s = \sigma_x + \sigma_y = -\frac{2K}{\pi}\frac{y}{r^2}. \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2K}{\pi}\frac{xy^2}{r^4}, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Aus der Lösung erhalten wir die Spannungsfunktion für den allgemeinen Fall, daß Normalkräfte längs der x-Achse verteilt sind, in folgender Weise: Wirkt an der Stelle ξ eine Kraft 1, so ist die zugehörige Spannungsfunktion

$$f(x, y, \xi) = \frac{1}{\pi}(x - \xi)\operatorname{arctg}\frac{y}{x - \xi}. \tag{26}$$

Wirkt daselbst längs des Elements $d\xi$ die Kraft $p(\xi)\,d\xi$, so gehört zu ihr die Spannungsfunktion

$$p(\xi) f(x, y, \xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}(x - \xi)\operatorname{arctg}\frac{y}{x - \xi}p(\xi)\,d\xi.$$

Wirken nun an beliebigen Stellen pro Längeneinheit die Kräfte $p(\xi)$, so summieren sich die Spannungsfunktionen, und wir erhalten durch Integration über die Einzeleinflüsse die Spannungsfunktion

$$F^*(x, y) = \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} f(x, y, \xi)p(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - \xi)\operatorname{arctg}\frac{y}{x - \xi}p(\xi)\,d\xi. \tag{27}$$

3. Die von Normalkräften am Rande beanspruchte Kreisscheibe. Eine Kreisscheibe, deren Dicke wir der Einfachheit halber gleich 1 annehmen, sei von Druckkräften am Rande beansprucht, welche normal wirken und pro Längeneinheit des Umfangs die Größe p kg haben sollen. Zur Berechnung führen wir zweckmäßigerweise Polarkoordinaten r, ϑ ein. Schneiden wir dann aus der Scheibe ein von zwei be-

nachbarten Kreisen und zwei benachbarten Radien begrenztes Viereck aus, so wirken auf dasselbe die folgenden Spannungen:

Normal zu den Radien . . . . . σ_ϑ
Normal zu den Kreisen . . . . . σ_r
Schubspannungen . . . . . τ

Da die Darstellung der Spannungen durch eine Spannungsfunktion unabhängig vom Koordinatensystem ist, können wir diese Spannungen aus einer Spannungsfunktion folgendermaßen ableiten. Aus den Formeln für die Spannungen in rechtwinkligen Koordinaten

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

lesen wir die folgenden Regeln ab: Wir erhalten die Spannung, welche senkrecht zu einem geradlinigen Schnitte wirkt, indem wir die Spannungsfunktion zweimal längs dieser Geraden differenzieren, also für die Schnitte in Richtung der Radien

$$\sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}. \tag{28}$$

Die Schubspannungen längs dieses geradlinigen Schnittes erhalten wir, wenn wir die Gefällkomponente von F in der zum Schnitt senkrechten Richtung einmal längs des Schnittes ableiten. Die Gefällkomponente von F senkrecht zu einem Radius ist $\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}$, also wird

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right). \tag{29}$$

Um σ_r zu erhalten, bemerken wir, daß die Summe der Normalspannungen unabhängig vom Koordinatensystem ist, also

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = \sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Delta F. \tag{30}$$

Nun ist, in Polarkoordinaten ausgedrückt [s. 1. Bd., S. 76, (43)]:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Ziehen wir σ_ϑ ab, so bleibt

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}. \tag{31}$$

Nun bemerken wir, daß sich jede Funktion F, die der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügt, in der Form

$$F = \varphi_1 + r^2 \varphi_2 \tag{32}$$

darstellen läßt [s. 1. Bd., S. 634, (13)], wo φ_1 und φ_2 ebene Potentialfunktionen sind. Diese lassen sich im Kreise durch Reihen der Form

$$\varphi = \sum r^n (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta)$$

darstellen. Wir setzen also

$$(33)\quad F = \sum_0^\infty r^n(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta) + \sum_0^\infty r^{n+2}(\alpha'_n \cos n\vartheta + \beta'_n \sin n\vartheta)$$

und suchen die Koeffizienten α, β, α', β' so zu bestimmen, daß am Rande des Kreises, d. h. für $r = R$, die Bedingungen

$$\tau = 0, \qquad \sigma_r = -p(\vartheta)$$

erfüllt sind. Soll zunächst

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right) = -\sum_0^\infty n(n-1)r^{n-2}(-\alpha_n \sin n\vartheta + \beta_n \cos n\vartheta)$$
$$-\sum_0^\infty n(n+1)r^n(-\alpha'_n \sin n\vartheta + \beta'_n \cos n\vartheta)$$

für $r = R$ bei allen Werten von ϑ verschwinden, so muß

$$(n-1)\alpha_n R^{n-2} + (n+1)\alpha'_n R^n = 0,$$
$$(n-1)\beta_n R^{n-2} + (n+1)\beta'_n R^n = 0$$

sein. Um diese Gleichungen zu erfüllen, setzen wir

$$(34)\quad \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{a_n}{(n-1)R^{n-2}}, & \alpha'_n = \dfrac{-a_n}{(n+1)R^n}, \\ \beta_n = \dfrac{b_n}{(n-1)R^{n-2}}, & \beta'_n = \dfrac{-b_n}{(n+1)R^n}, \end{cases}$$

womit F die Form

$$(35)\quad F = \sum_0^\infty \left\{\frac{1}{n-1}\frac{r^n}{R^{n-2}} - \frac{1}{n+1}\frac{r^{n+2}}{R^n}\right\}(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

erhält. Wir sehen, daß wir das Glied $n = 1$ fortlassen müssen, d. h. es muß $a_1 = b_1 = 0$ sein.

Aus dem Ansatz (35) ergeben sich die Spannungen

$$(36)\quad \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} \\ = \displaystyle\sum_0^\infty \left\{\frac{-nr^{n-2}}{R^{n-2}} + \frac{(n-2)r^n}{R^n}\right\}(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\ \sigma_\vartheta = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ = \displaystyle\sum_0^\infty \left\{\frac{nr^{n-2}}{R^{n-2}} - \frac{(n+2)r^n}{R^n}\right\}(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\ \tau = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta}\right) \\ = -\displaystyle\sum_0^\infty \left\{\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} - \frac{r^n}{R^n}\right\}(-a_n \sin n\vartheta + b_n \cos n\vartheta). \end{cases}$$

Insbesondere wird für $r = R$

$$(37)\qquad \begin{cases} \sigma_r = -2\sum_0^\infty (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\ \sigma_\vartheta = -2\sum_0^\infty (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\ \tau = 0. \end{cases}$$

Da für $r = R$ $\sigma_r = -p(\vartheta)$ gegeben ist, muß

$$\sum_0^\infty (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = \tfrac{1}{2} p(\vartheta)$$

sein, und die Koeffizienten a_n, b_n bestimmen sich als Fourierkoeffizienten [1. Bd., S. 157, (1), (2), (3)] zu

$$(38)\qquad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p(\vartheta)\, d\vartheta, \\ a_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta, \\ b_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

Oben war verlangt, daß $a_1 = b_1 = 0$ sein solle. Das ist in der Tat der Fall, denn da die Druckkräfte im Gleichgewicht sein müssen, verschwinden die Komponenten ihrer Resultierenden in der x- und y-Richtung:

$$\int p\,dy = \int Rp\cos\vartheta\, d\vartheta = 2\pi a_1 R, \int p\,dx = -\int Rp\sin\vartheta\, d\vartheta = -2\pi b_1 R.$$

Von praktischer Wichtigkeit ist die folgende Bemerkung: Die gefährdeten Stellen der Platte liegen — was hier nicht näher belegt werden möge — am Rande der Platte. Zur Beurteilung der Festigkeit genügt es also, wenn wir die Spannungen am Rande kennen. Da $\tau_{\text{Rand}} = 0$ vorausgesetzt war und σ_r gegeben ist, brauchen wir nur noch σ_ϑ. Dies ist aber nach (37) gleich σ_r, so daß wir ohne Rechnung auskommen, wenn es nur auf die Festigkeit ankommt. Dies gilt natürlich nur für reine Normalbeanspruchung am Rande und nur für Kreisscheiben. Näherungsweise kann es aber auch auf normal belastete sogenannte „unrunde Scheiben“ übertragen werden.

4. Der gelochte Zugstab. Wenn durch einen Streifen, der auf Zug beansprucht ist, ein Loch gebohrt wird, so kann man für einen Lochdurchmesser, der klein gegen die Streifenbreite ist, die in der Um-

gebung des Loches hervorgerufene Spannungserhöhung dadurch näherungsweise berechnen, daß man den Streifen als unendlich breit ansieht und die Aufgabe folgendermaßen idealisiert. Gegeben sei eine Ebene, die im Unendlichen rein auf Zug beansprucht ist. Gesucht werden die Spannungen am Rande eines Kreises, der mit dem Radius R um den Nullpunkt geschlagen ist. Führen wir eine Spannungsfunktion F ein, so ist im Unendlichen

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = c, \quad \tau_{xy} = 0, \tag{39}$$

also ist im Unendlichen, bis auf Funktionen, welche im Unendlichen keine Spannungen ergeben:

$$F = \frac{c\,x^2}{2} = \frac{c r^2 \cos^2 \vartheta}{2} = \frac{c r^2}{4}(1 + \cos 2\vartheta). \tag{40}$$

Am Rande des Loches greifen keine Kräfte an, d. h. es ist

$$F = \frac{\partial F}{\partial r} = 0. \tag{41}$$

Wir setzen die Lösungen zusammen aus Funktionen, welche nur von r abhängen und solchen, welche den Winkel ϑ nur in dem Faktor $\cos 2\vartheta$ enthalten. Das sind

$$1, \quad r^2, \quad \ln r, \quad r^2 \ln r$$

und

$$\frac{\cos 2\vartheta}{r^2}, \quad \cos 2\vartheta, \quad r^2 \cos 2\vartheta, \quad r^4 \cos 2\vartheta,$$

welche sämtlich der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügen, weil sie teils reine Potentialfunktionen sind, teils Potentialfunktionen mit dem Faktor r^2. Die beiden letzten, $r^2 \ln r$ und $r^4 \cos 2\vartheta$, scheiden aus, weil sie im Unendlichen zu stark anwachsen. Es bleibt

$$F = \frac{c r^2}{4}(1 + \cos 2\vartheta) + a + b \ln \frac{r}{R} + a' \cos 2\vartheta + \frac{b' \cos 2\vartheta}{r^2}. \tag{42}$$

Soll für $r = R$

$$F = \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

sein, so muß

$$\frac{c R^2}{4} + a = 0, \quad \frac{c R^2}{2} + b = 0, \quad \frac{c R^2}{4} + a' + \frac{b'}{R^2} = 0, \quad \frac{c R}{2} - \frac{2 b'}{R^3} = 0$$

sein, also

$$a = -\frac{c R^2}{4}, \quad b = -\frac{c R^2}{2}, \quad a' = -\frac{c R^2}{2}, \quad b' = \frac{c R^4}{4},$$

und wir erhalten

$$F = \frac{c}{4}\left(r^2 - R^2 - 2 R^2 \ln \frac{r}{R}\right) + \frac{c}{4}\left(r^2 - 2 R^2 + \frac{R^4}{r^2}\right)\cos 2\vartheta. \tag{43}$$

Am Rande des Loches wird

$$\sigma_r = 0, \qquad \tau = 0.$$

Die Tangentialspannung σ_ϑ wird

$$\sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{c}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta, \tag{44}$$

also bei $r = R$

$$\sigma_\vartheta = c(1 + 2\cos 2\vartheta). \tag{45}$$

Der größte Wert tritt bei $\vartheta = 0$ auf:

$$\sigma_{\vartheta\,\max} = 3c. \tag{46}$$

Wir sehen also, daß die höchste auftretende Spannung genau dreimal so groß wird wie die Spannung c im Unendlichen, welche ohne das Loch in der ganzen Platte herrschen würde.

§ 4. Räumliche Probleme.

1. Gleichgewicht eines von einer unendlichen Ebene begrenzten Körpers. Wir denken uns einen elastischen Körper, der von einer Ebene, die wir zur xy-Ebene nehmen, einseitig begrenzt ist, sonst aber keine Begrenzung hat. Gegen diese Fläche sollen äußere Kräfte wirken, und zwar pro Flächeneinheit in den drei Achsenrichtungen die Kräfte Ξ, H, Z. Von Volumenkräften werde abgesehen. Der Körper bilde den Halbraum $z > 0$. Im Unendlichen soll der Körper in seinem natürlichen Zustand verharren, d. h. die Verschiebungskomponenten u, v, w sollen im Unendlichen so verschwinden, daß die Werte Ru, Rv, Rw endlich bleiben, wo R die Entfernung eines Punktes vom Nullpunkt bezeichne.

Der Gleichgewichtszustand des Körpers ist eindeutig bestimmt, wenn an der Oberfläche $z = 0$ entweder die äußeren Kräfte Ξ, H, Z gegeben sind oder die Verschiebungen u, v, w, oder noch allgemeiner, wenn von jedem der drei Paare Ξ, u; H, v; Z, w eine Größe für $z = 0$ bekannt ist (s. S. 624).

Das Problem ist allgemein gelöst von Boussinesq durch Anwendung potentialtheoretischer Methoden, auf anderem Wege von Ceruti nach einer Methode von Betti, die der Greenschen Methode der Potentialtheorie verwandt ist (s. 1. Bd., XVII, § 1). Wir wollen die Methode von Fourier benutzen, welche die allgemeine Lösung derartiger Probleme durch Summation von partikularen Lösungen herstellt. Die von uns zu benutzende Hauptformel wird das Fouriersche Integraltheorem sein (s. 1 Bd., IV, § 3, S. 155), welches wir in komplexer Form, auf zwei Variable erweitert,

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int d\alpha\, d\beta \int_{-\infty}^{+\infty}\int f(\xi, \eta)\, e^{i\alpha(x-\xi)+i\beta(y-\eta)}\, d\xi\, d\eta \tag{1}$$

schreiben können. Die Funktion $f(x, y)$ kann hier auch komplex sein:

$$f(x, y) = f_1(x, y) + i f_2(x, y).$$

Die pro Flächeneinheit der Ebene $z = 0$ angreifenden äußeren Kräfte hatten wir mit Ξ, H, Z bezeichnet. Das Gleichgewicht an dieser Ebene erfordert also, daß für $z = 0$

$$\tau_{zx} = -\Xi, \quad \tau_{zy} = -H, \quad \sigma_z = -Z \tag{2}$$

ist. Damit lautet unser Integrationsproblem: Es sollen die Komponenten der Verschiebung u, v, w so bestimmt werden, daß sie den Differentialgleichungen [S. 630, (7)]

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ &\Delta v + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\ &\Delta w + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \\ &\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

genügen, und daß an der Ebene $z = 0$ entweder

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W \tag{4}$$

oder

$$\tau_{zx} = -\Xi, \quad \tau_{zy} = -H, \quad \sigma_z = -Z \tag{5}$$

ist, wo U, V, W und Ξ, H, Z gegebene Funktionen von x und y sind. Noch allgemeiner können wir verlangen, daß von den Paaren Ξ, u; H, v; Z, w je eine Funktion gegeben ist.

Außerdem sollen im Unendlichen die Verschiebungskomponenten und die Dilatation verschwinden, d. h.

$$\lim_{R=\infty} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0. \tag{6}$$

Da die Differentialgleichungen linear sind, so kann man aus mehreren Partikularlösungen u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 usw. allgemeinere Lösungen:

$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, $v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, $w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$

zusammensetzen, und wenn man unendlich viele Partikularlösungen hat, so kann man auf diesem Wege je nach den Umständen Lösungen in Gestalt von unendlichen Reihen oder bestimmten Integralen ableiten. Es kommt also zunächst darauf an, geeignete Partikularlösungen zu bekommen, die noch hinlänglich viele Parameter enthalten, um die allgemeine Lösung den Grenzbedingungen (4), (5) anzupassen. Ein solches partikulares Integral finden wir in der Form

$$\left\{\begin{aligned} u &= (a + ih\alpha z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ v &= (b + ih\beta z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ w &= (c + ih\gamma z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

wo a, b, c, α, β, γ, h Konstante sind, über welche noch in geeigneter Weise verfügt werden wird. Wir setzen zunächst fest, daß

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = + i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{8}$$

sein soll, und erhalten damit

$$\theta = i\{a\alpha + b\beta + c\gamma + h\gamma\}\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \tag{9}$$

und ferner

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u &= -2h\alpha\gamma\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}, \\ \Delta v &= -2h\beta\gamma\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}, \\ \Delta w &= -2h\gamma\gamma\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen (3) ein, so findet man, daß dieselben befriedigt sind, wenn

$$(3m-4)h\gamma = -m(a\alpha + b\beta + c\gamma) \tag{11}$$

ist. Damit ist h als Funktion der übrigen Konstanten bestimmt, α und β seien reell, γ ist also rein imaginär. Für $z = +\infty$ sind u, v, w dann Null.

Wir setzen jetzt

$$\left\{\begin{aligned} a &= A(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \\ b &= B(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \\ c &= C(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

wo A, B, C willkürliche Funktionen der Parameter α und β sind. Ferner

$$h = H(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{13}$$

wo nach (11)

$$H = -\frac{m}{3m-4}\left(\frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\gamma}\right) \tag{14}$$

zu setzen ist.

Durch Summation über die Partikularlösungen gewinnen wir dann für u, v, w die allgemeinen Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} u &= \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int (A + i\alpha Hz)\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \\ v &= \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int (B + i\beta Hz)\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \\ w &= \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int (C + i\gamma Hz)\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Die Funktionen A, B, C werden im allgemeinen komplex sein. Sollen u, v, w reell werden, so müssen

$$A(-\alpha, -\beta), \quad B(-\alpha, -\beta), \quad C(-\alpha, -\beta)$$

konjugiert komplex sein zu

$$A(\alpha, \beta), \quad B(\alpha, \beta), \quad C(\alpha, \beta),$$

d. h. die reellen Teile müssen gerade, die imaginären Teile ungerade Funktionen von α und β sein. Aus (14) ergibt sich dann, daß die gleiche Eigenschaft auch den Funktionen

$$A + i\alpha Hz, \quad B + i\beta Hz, \quad C + i\gamma Hz$$

zukommt. Daraus ergibt sich aber, daß die Ausdrücke in (15) ungeändert bleiben, wenn man i durch $-i$ ersetzt, weil man gleichzeitig unter dem Integralzeichen die Integrationsvariablen α und β durch $-\alpha$ und $-\beta$ ersetzen kann. Also sind u, v, w tatsächlich reell.

Bestimmung der willkürlichen Funktionen aus den Randbedingungen. Die Verschiebungen an der Oberfläche seien gegeben:

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W.$$

Sollen u, v, w für $z = 0$ die Werte $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$ annehmen, so muß

$$(16) \qquad \begin{cases} U = \int_{-\infty}^{+\infty}\int A\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int B\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ W = \int_{-\infty}^{+\infty}\int C\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta \end{cases}$$

sein, woraus nach der Fourierschen Integralformel (1)

$$(17) \qquad \begin{cases} A(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int U(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ B(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int V(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ C(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int W(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi\, d\eta \end{cases}$$

folgt. Da hiermit auch die Bedingungen erfüllt sind, denen A, B, C genügen müssen, wenn u, v, w reell sein sollen, ist das Problem gelöst.

Sind die Oberflächenkräfte gegeben, so muß für $z = 0$

$$\tau_{xz} = -\Xi, \quad \tau_{yz} = -H, \quad \sigma_z = -Z$$

werden. Drücken wir die Spannungen τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z durch die Verzerrungsgrößen aus:

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\theta}{m-2}\right),$$

so folgt aus (15)

$$(18)\quad \begin{cases} \tau_{xz} = G\int_{-\infty}^{+\infty}\int \{i(A\gamma + C\alpha + H\alpha) - 2\alpha\gamma Hz\}\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \\ \tau_{yz} = G\int_{-\infty}^{+\infty}\int \{i(B\gamma + C\beta + H\beta) - 2\beta\gamma Hz\}\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \\ \sigma_z = 2G\int_{-\infty}^{+\infty}\int \Big\{i(C+H)\gamma - \gamma^2 Kz \\ \qquad + \frac{i}{m-2}(A\alpha + B\beta + C\gamma + H\gamma)\Big\}\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \end{cases}$$

oder mit Benutzung von (14)

$$\sigma_z = 2G\int_{-\infty}^{+\infty}\int \Big\{i\Big(C + \frac{m-2}{m}H\Big)\gamma - \gamma^2 Hz\Big\}\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta,$$

also für $z = 0$:

$$(19)\quad \begin{cases} \Xi = -\tau_{zx} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int A'(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ H = -\tau_{zy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int B'(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ Z = -\sigma_z = \int\int C'(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(20)\quad \begin{cases} A'(\alpha,\beta) = -Gi[A\gamma + (C+H)\alpha], \\ B'(\alpha,\beta) = -Gi[B\gamma + (C+H)\beta], \\ C'(\alpha,\beta) = -2Gi\Big[C\gamma + \frac{m-2}{m}H\gamma\Big] \end{cases}$$

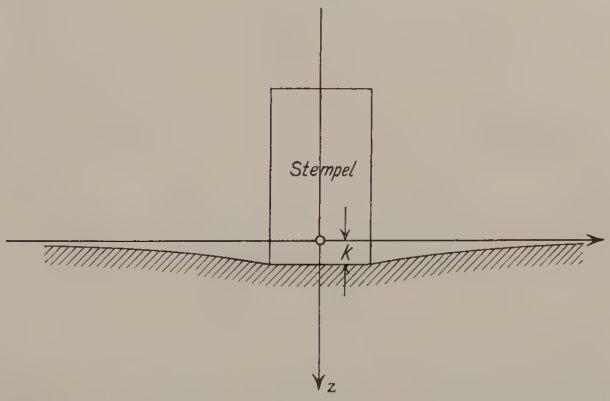
gesetzt ist. $A'(\alpha,\beta)$, $B'(\alpha,\beta)$, $C'(\alpha,\beta)$ können dann wieder aus dem Fourierschen Integraltheorem bestimmt werden:

$$(21)\quad \begin{cases} A'(\alpha,\beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \Xi(\xi,\eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ B'(\alpha,\beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int H(\xi,\eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ C'(\alpha,\beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int Z(\xi,\eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta. \end{cases}$$

Sind A', B', C' auf diese Weise bestimmt, so berechnet man aus (14) und (20) die Funktionen A, B, C und H, womit die Verschiebungen u, v, w ermittelt sind.

2. Eindruck eines Stempels in eine Unterlage. Wir denken uns einen Stempel — d. h. einen zylindrischen Körper von kreisförmigem Querschnitt und ebener Grundfläche — auf eine ebene horizontale Unterlage aufgesetzt. Das Material des Stempels sei gegenüber dem Material der Unterlage so hart, daß die Formänderung vernachlässigt werden kann, die der Stempel erleidet, wenn er durch eine Kraft P in die Unterlage eingedrückt wird. Zur Berechnung der Spannungen und Formänderungen

Fig. 68.



nehmen wir die Unterlage als unendlich ausgedehnt an, d. h. als einen Halbraum $z > 0$, dessen Begrenzung die Ebene $z = 0$ sei. Die x- und y-Achse legen wir so, daß der Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Mittelpunkt der Grundfläche des Stempels zusammenfällt. Um die Aufgabe eindeutig zu machen, wollen wir ferner annehmen, daß die Berührungsfläche zwischen Stempel und Unterlage geschmiert sei, so daß keine Schubspannungen von dem Stempel auf die Unterlage ausgeübt werden können. Mit diesen Voraussetzungen lautet das elastische Problem dann folgendermaßen: Die elastischen Verschiebungen u, v, w sind in dem Halbraum $z \geqq 0$ so zu bestimmen, daß sie den Differentialgleichungen

$$(22) \qquad \begin{cases} \Delta u + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ \Delta v + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\ \Delta w + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

genügen und folgende Randbedingungen erfüllen:

Längs der Ebene $z = 0$ sollen außerhalb des Stempels, also für $x^2 + y^2 > a^2$, die Spannungen

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = 0 \tag{23}$$

sein. Innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$, d. h. unter dem Stempel, sollen die Spannungen

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0 \tag{24}$$

sein. Außerdem ist die Verschiebung in die z-Richtung

$$w = k \tag{25}$$

konstant gleich der Tiefe, um welche der Stempel eingedrückt worden ist.

Die Aufgabe läßt sich in folgender Weise auf eine gemischte Randwertaufgabe der gewöhnlichen Potentialtheorie zurückführen. Sind φ_1, φ_2, φ_3, ψ Potentialfunktionen, welche also den Gleichungen

$$\Delta\varphi = 0$$

genügen, so setzen wir u, v, w in der Form

$$\left\{\begin{aligned} u &= \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

an. Die Differentialgleichungen (22) sind dann erfüllt, wenn wir

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{m}{3m-4}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) \tag{27}$$

nehmen. Dadurch ist ψ bestimmt, denn für $z = +\infty$ soll ψ verschwinden. Jetzt sind noch die Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 so zu bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Zunächst müssen an der Oberfläche $z = 0$ die Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} verschwinden. Diese sind:

$$\left\{\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = G\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right\}, \\ \tau_{zy} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = G\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Sollen sie für $z = 0$ verschwinden, so muß daselbst

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi_3+\psi)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi_3+\psi)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{29}$$

sein. Diese Gleichungen gelten zunächst nur für $z = 0$, da aber die linken Seiten Potentialfunktionen sind, so müssen sie überall verschwinden, wenn sie an der Oberfläche Null sind. Die Gleichungen gelten also im ganzen Halbraum. Differenzieren wir sie nach x und y und addieren, so ergibt sich

$$(30) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2(\varphi_3 + \psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi_3 + \psi)}{\partial y^2} = 0$$

oder wegen $\Delta \varphi_3 = 0$ und $\Delta \psi = 0$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi_3 + \psi)}{\partial z}\right\} = 0,$$

und durch Integration

$$(31) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi_3 + \psi)}{\partial z}.$$

Integrationskonstanten fallen dort, da im Unendlichen die Verschiebungen mit ihren Ableitungen verschwinden müssen. Setzen wir (31) in Gleichung (27) ein, so ergibt sich

$$(3m - 4)\frac{\partial \psi}{\partial z} = -m\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right) = -m\left(2\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right),$$

oder nach Integration und einfacher Umrechnung

$$(32) \qquad \psi = \frac{-m\varphi_3}{2(m-1)},$$

und somit

$$(33) \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{m-2}{m-1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}.$$

Damit ist die Bedingung erfüllt, daß an der Oberfläche die Schubspannungen verschwinden sollen. An denjenigen Punkten außerhalb des Stempels muß dazu noch $\sigma_z = 0$ sein. Es ist aber

$$(34) \qquad \sigma_z = 2G\left\{\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\theta}{m-2}\right\} = G\left\{\frac{m}{m-1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right\}.$$

Soll für $z = 0$ $\sigma_z = 0$ sein, so muß also

$$(35) \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0$$

werden. Unter dem Stempel ist

$$(36) \qquad w = \varphi_3 = k,$$

so daß unsere Aufgabe darauf zurückgeführt ist, eine Potentialfunktion φ_3 zu finden, für welche an der Oberfläche

$$(37) \qquad \begin{cases} \text{innerhalb des Stempelkreises, d. h. für } x^2 + y^2 \leqq a^2, & \varphi_3 = k, \\ \text{außerhalb des Stempelkreises, d. h. für } x^2 + y^2 > a^2, & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

ist.

Diese Randwertaufgabe der Potentialtheorie, die man als eine „gemischte" bezeichnet, weil sich die Randbedingungen teilweise auf die Werte ihrer Normalableitung beziehen, ist mit einer bekannten Aufgabe der Elektrostatik identisch. Denkt man sich eine unendlich dünne Kreisplatte vom Radius a in der Ebene $z = 0$, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegt, elektrisch auf ein konstantes Potential k aufgeladen, so ist das elektrostatische Potential φ längs der Platte ($z = 0$, $x^2 + y^2 \leqq a^2$) $\varphi = k$, außerhalb derselben ist in der Plattenebene $z = 0$ aus Symmetriegründen $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Das elektrostatische Potential erfüllt also gerade die in unserem elastischen Problem geforderten Randbedingungen, wir benutzen deshalb die aus der Elektrostatik bekannte Lösung. Da das Potential offenbar nur von z und dem Abstand r von der z-Achse abhängt, führen wir z und r als Zylinderkoordinaten ein und setzen

$$\varphi_3 = \int_0^\infty f(\alpha) J(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha, \tag{38}$$

wo $f(\alpha)$ eine Funktion des Parameters α ist, die so zu bestimmen ist, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Der Ansatz erfüllt die Differentialgleichung des Potentials

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0,$$

wenn $J(\alpha r)$ der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial r} + \alpha^2 J = 0$$

genügt. $J(\alpha r)$ muß also die Besselsche Funktion nullter Ordnung des Arguments αr sein.

Die Randbedingungen für $z = 0$:

$$\varphi_3 = k \quad \text{für} \quad r \leqq a,$$
$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad r > a$$

erfordern dann:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty f(\alpha) J(\alpha r) d\alpha = k & \text{für} \quad r \leqq a, \\ \displaystyle\int_0^\infty \alpha f(\alpha) J(\alpha r) d\alpha = 0 & \text{für} \quad r > a. \end{cases} \tag{39}$$

Diese sind erfüllt, wenn wir

$$f(\alpha) = \frac{2k}{\pi} \frac{\sin(a\alpha)}{\alpha} \tag{40}$$

setzen. Die Bestätigung erhalten wir aus den Integralformeln für die Besselschen Funktionen (1. Bd., VIII, § 3, S. 337). Danach ist:

$$(41)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J(\alpha r)\, d\alpha = \frac{\pi}{2} & \text{für } r \leqq a, \\ = \arcsin\frac{a}{r} & \text{für } r \geqq a, \end{cases}$$

$$(42)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty \sin a\alpha\, J(\alpha r)\, d\alpha = 0 & \text{für } r > a, \\ = \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & \text{für } r < a. \end{cases}$$

Die gesuchte Potentialfunktion ist also

$$(43)\qquad -\varphi_3 = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J(\alpha r) e^{-\alpha z}\, d\alpha.$$

Die Bestimmung der Funktionen φ_1 und φ_2 wird durch die Gl. (29) und (32) geliefert. Danach ist:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial(\varphi_3 + \psi)}{\partial x} = -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{\partial(\varphi_3 + \psi)}{\partial y} = -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{k}{\pi} \frac{m-2}{m-1} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J'(\alpha r) \frac{\alpha x}{r} e^{-\alpha z}\, d\alpha,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{k}{\pi} \frac{m-2}{m-1} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J'(\alpha r) \frac{\alpha y}{r} e^{-\alpha z}\, d\alpha.$$

Nun ist die Ableitung der Besselschen Funktion nullter Ordnung, gleich der negativen Besselschen Funktion erster Ordnung [1. Bd. S. 324, (7)]. Also wird (mit Integration nach z):

$$(44)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{k}{\pi} \frac{m-2}{m-1} \frac{x}{r} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_1(\alpha r) e^{-\alpha z}\, d\alpha, \\ \varphi_2 = -\frac{k}{\pi} \frac{m-2}{m-1} \frac{y}{r} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_1(\alpha r) e^{-\alpha z}\, d\alpha. \end{cases}$$

Die Funktionen φ_1 und φ_2 geben für $z = 0$ unmittelbar die Verschiebungskomponenten. Bezeichnen wir also durch den Index 0, daß es sich um die Werte für $z = 0$ handelt, so wird

$$(45)\qquad \begin{cases} u_0 = -\dfrac{k}{\pi}\dfrac{m-2}{m-1}\dfrac{x}{r}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_1(\alpha r)\, d\alpha, \\ v_0 = -\dfrac{k}{\pi}\dfrac{m-2}{m-1}\dfrac{y}{r}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_1(\alpha r)\, d\alpha. \end{cases}$$

Die Verschiebung erfolgt offenbar in Richtung des Radius. Die Größe ϱ der Radialverschiebung ist

$$(46)\qquad \varrho = -\frac{k}{\pi}\frac{m-2}{m-1}\int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_1(\alpha r)\, d\alpha.$$

Die Verschiebung ist nach außen positiv gerechnet. Es ist bemerkenswert, daß die Formel negative Werte ergibt, daß also das Material unter dem Stempel nach innen zusammengedrückt wird, nicht, wie man vielleicht erwarten würde, auseinandergepreßt.

Die Gesamtkraft P, welche erforderlich ist, um den Stempel niederzudrücken, erhalten wir zu

$$P = -2\pi\int_0^a \sigma_{z0}\, r\, dr.$$

Setzen wir hier den Wert für σ_{z0} aus Gl. (34) ein:

$$\sigma_{z0} = \frac{Gm}{m-1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -\frac{Gm}{m-1}\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \sin a\alpha\, J(\alpha r)\, d\alpha,$$

so ergibt sich bei Berücksichtigung von (42):

$$(47)\qquad P = \frac{4Gmk}{m-1}\int_0^a \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{4Gm}{m-1} ka,$$

oder, wenn wir k durch P ausdrücken:

$$(48)\qquad k = \frac{P(m-1)}{4Gma}.$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Aus den ermittelten Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 lassen sich die Verschiebungen und dann die Spannungen berechnen. Auf eine ausführliche Diskussion des Resultats wollen wir verzichten.

Neunzehntes Kapitel.

Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie.

§ 1. Die schwingende Saite[1]).

1. Differentialgleichung der schwingenden Saite. Das einfachste Beispiel von Schwingungsproblemen elastischer Körper liefert uns die schwingende Saite. Die Differentialgleichung der Bewegung leiten wir am einfachsten direkt ab, und zwar in der folgenden Weise: Wir betrachten eine Saite, welche durch eine Kraft S so stark gespannt ist, daß die Wirkung der Schwerkraft gegenüber der Kraft S vernachlässigt werden kann. Wir können dann erwarten, und die Erfahrung bestätigt das, daß die unter Vernachlässigung der Schwerkraft errechnete Bewegung mit der wirklichen im Einklang steht. Des weiteren vereinfachen wir, ebenso wie in der Elastostatik unsere Betrachtungen dadurch, daß wir nur kleine Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage betrachten, derart, daß wir Größen, in welchen die Verschiebungen oder ihre Differentialquotienten mehrfach als Faktoren auftreten, gegenüber den linearen Ausdrücken in diesen vernachlässigen.

Im Gleichgewichtszustand ist die gespannte Saite offenbar geradlinig; als Koordinaten für die Punkte der Saite führen wir ihren auf dieser Geraden gemessenen Abstand x von einem Anfangspunkt $x = 0$ ein. Diesen Anfangspunkt ($x = 0$) und den Endpunkt ($x = l$) denken wir uns zunächst festgehalten, behalten uns aber vor, uns von dieser Einschränkung zu befreien, insbesondere werden wir die unendlich lange Saite betrachten. Jedenfalls soll die Saite von einer Kraft S gespannt sein. Denken wir uns dieselbe an einer beliebigen Stelle durchschnitten, so muß zur Herstellung des Gleichgewichts an den beiden freien Enden eine Kraft von der Größe S in der Richtung der Saite angebracht werden.

Zur Beschreibung der Saitenbewegung nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, dessen x-Achse in die Gleichgewichtslage fällt, und dessen y- und z-Richtung zu ihr und zueinander senkrecht gelegt werden. Die Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage seien durch ihre Projektionen u, v, w auf die Achsen gegeben.

Wir betrachten nun ein Element $P - P'$ von der Länge dx. Erfahren seine Endpunkte die Verschiebungen u, v, w und $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$,

[1]) Siehe 1. Bd., XVIII, § 4.

$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, $w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$, so ist die Länge des Elementes nach der Verschiebung

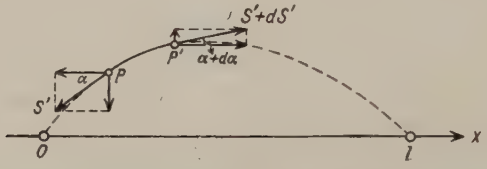
$$ds^2 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx^2,$$

wofür wir unter Vernachlässigung der quadratischen Größen

$$ds = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

schreiben können. Mit der Verlängerung des Elementes ist eine Spannungserhöhung an dieser Stelle verbunden, welche der Dehnung

Fig. 69.



(= Verlängerung durch ursprüngliche Länge) des Elementes proportional ist, und zwar ist dieselbe pro Flächeneinheit des Querschnitts gleich $E\varepsilon$, wo E der Elastizitätsmodul und

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

die Dehnung der Saite an der betrachteten Stelle ist; also ist die gesamte Erhöhung von S, wenn F der Saitenquerschnitt ist:

$$S = EF \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Die gesamte Spannung $S' = S + EF \frac{\partial u}{\partial x}$ wirkt in Richtung der Tangente an die deformierte Saite. Sind die Winkel der Tangentenrichtung gegen die Achsen α, β, γ, so erhalten wir für die Richtungskosinus unter Berücksichtigung der Kleinheit der Verschiebungen und ihrer Ableitungen

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \cos\gamma = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Demnach wirken am linken Endpunkt P des betrachteten Elementes die Kraftkomponenten:

$$-\left(S + EF \frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\alpha \sim -\left(S + EF \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$-\left(S + EF \frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\beta \sim -S \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$-\left(S + EF \frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\gamma \sim -S \frac{\partial w}{\partial x},$$

am rechten Ende P':

$$\left\{S+EF\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right\}\cos\alpha \sim S+EF\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx,$$

$$\left\{S+EF\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right\}\cos(\beta+d\beta) \sim S\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\right),$$

$$\left\{S+EF\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right\}\cos(\gamma+d\gamma) \sim S\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\right),$$

also insgesamt auf das Element dx:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx, \quad S\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx, \quad S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx.$$

Nach der Grundgleichung der Dynamik sind diese Kraftkomponenten gleich dem Produkt aus der Masse des Elementes in die Beschleunigungskomponenten. μ sei die Masse der Saite pro Längeneinheit, also μdx die Masse des Elementes von der Länge dx. Die Beschleunigungskomponenten sind dann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

so daß wir aus der Newtonschen Grundgleichung nach Division durch dx als Differentialgleichungen der Bewegung

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EF\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \\ \mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=S\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=S\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases}$$

erhalten. In diesen Gleichungen sind die drei Komponenten der Verschiebungen vollständig voneinander getrennt. Die Form der Gleichungen ist (wenigstens bei konstantem Querschnitt F und überall gleichem Elastizitätsmodul E) für alle drei Komponenten die gleiche. Ebenso sind in allen drei Fällen die Rand- und Anfangsbedingungen dieselben, nämlich folgende:

An den Enden der Saite, also für $x=0$ und $x=l$ ist für alle Werte von t $u=v=w=0$. Zur Zeit $t=0$ ist längs der Saite, d. h. für $0 \leqq x \leqq l$ Lage und Geschwindigkeit der Saite bekannt, es sind also für $t=0$, u, v, w, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ als Funktionen von x für $0 \leqq x \leqq l$ gegeben.

Die Funktion u bestimmt die longitudinalen Schwingungen der Saite. Diese allein hängen von der Elastizität des Saitenmaterials, d. h. von E ab. v und w sind die Komponenten der transversalen Schwingungen. Nach dem oben Gesagten genügt es, wenn wir uns mit einer der drei Komponenten beschäftigen, etwa mit v. Wir betrachten zunächst den Fall konstanten $\mu's$. Wir setzen

$$c^2 = \frac{S}{\mu} \tag{2}$$

und haben also die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{3}$$

zu integrieren, mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \text{für } x = 0 \text{ ist } v = 0, & \text{für alle Werte } t \geqq 0, \\ \text{„ } x = l \text{ „ } v = 0, & \text{„ „ „ } t \geqq 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \text{„ } t = 0 \text{ „ } v = f(x), & \text{„ „ „ } 0 \leqq x \leqq l, \\ \text{„ } t = 0 \text{ „ } \dfrac{\partial v}{\partial t} = g(x), & \text{„ „ „ } 0 \leqq x \leqq l. \end{cases} \tag{5}$$

2. Die Methode der Reihenentwicklung. Da die Differentialgleichung und die Randbedingungen für die Saitenbewegung homogen und linear in der abhängigen Variablen v sind, so stellen wir zunächst fest, daß ein aus irgendwelchen Partikularlösungen v_1, v_2 usw. mit konstanten c gebildetes Aggregat $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots$ wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wir bestimmen deshalb zunächst partikulare Lösungen der Differentialgleichung, indem wir für v den Ansatz machen:

$$v = p(x) \cdot q(t), \tag{6}$$

wo p nur von x, q nur von t abhängt.

Durch Division mit pq erhalten wir dann aus der Differentialgleichung (3)

$$\frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} = c^2 \frac{1}{p} \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

Da in dieser Gleichung die linke Seite nicht von x, die rechte nicht von t abhängt, so können beide Seiten nur einer Konstanten gleich sein, die wir mit $-\nu^2$ bezeichnen. Es wird also:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \nu^2 q = 0, \quad \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{\nu^2}{c^2} p = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$q = \cos \nu t \quad \text{oder} \quad \sin \nu t,$$

$$p = \cos \frac{\nu x}{c} \quad \text{oder} \quad \sin \frac{\nu x}{c}.$$

Wenn das Produkt pq der Randbedingung genügen soll, nach welcher zu allen Zeiten t Anfangspunkt und Endpunkt der Saite festgehalten sein sollen, so kommen für p nur solche Sinusfunktionen in Frage, für welche

$$vl = cn\pi \tag{7}$$

ist, wo n irgend eine ganze Zahl ist, die wir positiv annehmen können.

Wir erhalten auf diese Weise also als Partikularlösungen, die die Differentialgleichung (3) und die Randbedingung (4) befriedigen:

$$p = \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{und} \quad q = A_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{l}t, \tag{8}$$

aus denen wir nach dem eingangs dieses Abschnittes Gesagten eine allgemeinere Lösung mit den willkürlichen Konstanten A_n und B_n in Form einer endlichen oder unendlichen Reihe:

$$v(x,t) = \sum \sin\frac{n\pi x}{l}\left\{A_n \cos\nu_n t + B_n \sin\nu_n t\right\} \quad \nu_n = \frac{n\pi c}{l} \tag{9}$$

herstellen können. Wir werden gleich sehen, wie die zunächst willkürlichen Konstanten A_n und B_n zu bestimmen sind, wenn zur Zeit $t = 0$ die Saite eine bestimmte Lage und eine bestimmte Geschwindigkeit haben soll. Zunächst wollen wir aber die durch die einzelnen Glieder der Reihe dargestellten Schwingungen etwas näher betrachten.

Eine Schwingung der Form

$$v_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\{A_n \cos\nu_n t + B_n \sin\nu_n t\}, \tag{10}$$

wofür wir mit $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ und $\operatorname{tg}\gamma = B_n/A_n$ auch

$$v_n(x,t) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos(\nu_n t - \gamma_n) \tag{11}$$

schreiben können, ist eine harmonische Schwingung, d. h. jeder Punkt führt eine harmonische Bewegung aus, und zwar derart, daß alle Punkte gleichzeitig ihren Höchstausschlag erreichen und alle Punkte gleichzeitig durch die Nullage hindurchgehen, nämlich dann, wenn der $\cos(\nu_n t - \gamma_n)$ gleich 1 bzw. gleich 0 ist. Die Schwingungsdauer dieser periodischen Bewegung ist

$$T_n = \frac{2\pi}{\nu_n} = \frac{2l}{nc}. \tag{12}$$

Ihr reziproker Wert

$$\frac{\nu_n}{2\pi} = \frac{nc}{2l} \tag{13}$$

ist die Schwingungszahl, d. h. die Zahl der in der Zeiteinheit (der Sekunde) ausgeführten Schwingungen. Von dieser Zahl hängt die „Ton-

höhe“ ab. Wir sehen, daß eine gegebene Saite nicht mit jeder Schwingungszahl solche harmonische Schwingungen ausführen kann, sondern nur mit denjenigen, die wir aus (7) erhalten, indem wir der Reihe nach für n die ganzen Zahlen einsetzen. Für $n = 1$ erhält man den tiefsten Ton, den die Saite geben kann, den sogenannten „Grundton.“ Die übrigen heißen die „harmonischen Obertöne“. Für $n = 2$ erhält man die Oktave des Grundtones, für $n = 3$ die Quinte der Oktave, für $n = 4$ die zweite Oktave, für $n = 5$ die große Terz der zweiten Oktave.

Aus (11) ersehen wir noch, daß, wenn x ein Vielfaches von l/n ist, v fortdauernd gleich Null bleibt. Die Seite teilt sich also bei der n-ten harmonischen Schwingung in n gleiche Teile, deren jeder für sich so schwingt, wie wenn eine Saite von der Länge l/n mit ihrem Grundton schwingen würde. Die Teilpunkte

$$\left(x = \frac{hl}{n}, \quad h = 1, 2 \ldots n - 1\right)$$

heißen die Knotenpunkte.

Unsere Formeln zeigen die Abhängigkeit der Höhe des Grundtones von der Länge, der Spannung und der Masse der Saite. Die Konstante C_n (11) heißt die Amplitude der Schwingung. Ihr Quadrat bestimmt die Stärke oder Intensität des Tones.

Wenn wir mehrere Partikularlösungen zu einer Summe vereinen, so erhalten wir kompliziertere Schwingungsformen der Saite, bei denen der Grundton und mehrere der harmonischen Obertöne zusammenklingen. Von der relativen Stärke der Obertöne hängt nach Helmholtz die Klangfarbe ab.

3. Einführung des Anfangszustandes. Wir setzen jetzt die Lösung des Problems der schwingenden Saite wieder in der Form (9)

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \{A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t\} \qquad \nu_n = \frac{n\pi c}{l}$$

an, und verlangen, daß die Konstanten A_n und B_n so bestimmt werden, daß für $t = 0$ die vorgegebene Anfangslage (5)

$$v(x,0) = f(x)$$

und Anfangsgeschwindigkeit (5)

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

angenommen wird. Es muß dann

$$(14) \qquad f(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

und

$$g(x) = \frac{\pi c}{l} \sum_{1}^{\infty} n B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

werden. Die Aufgabe, die Koeffizienten A_n und B_n zu bestimmen, ist also darauf zurückgeführt, die gegebenen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ in trigonometrische Reihen zu entwickeln, d. h. in spezielle Fourierreihen (vgl. 1. Bd., Kap. IV, § 4, S. 157). Danach wird

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \tag{16}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{17}$$

Mit der Bestimmung dieser Koeffizienten ist die Aufgabe der Bestimmung der Saitenschwingung vollständig gelöst.

4. Die d'Alembertsche Form der Lösung. Die eben gegebene Lösung geht auf Daniel Bernouilli zurück[1]; schon früher hatte d'Alembert[2]) eine Lösung angegeben, die man direkt gewinnen kann, die wir aber aus der Bernouillischen Form herleiten wollen.

Zunächst erweitern wir den Definitionsbereich $0 \leqq x \leqq l$ der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ dadurch, daß wir f und g für alle Werte von x durch ihre Fourierreihen definieren. $f(x)$ und $g(x)$ sind danach ungerade periodische Funktionen von der Periode $2l$, d. h. es ist

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x), & g(-x) = -g(x); \\ f(x+2l) = f(x), & g(x+2l) = g(x). \end{cases} \tag{18}$$

Mit Hilfe bekannter trigonometrischer Umformungen schreiben wir jetzt die Lösung:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum A_n \left\{ \sin \frac{n\pi (x-ct)}{l} + \sin \frac{n\pi (x+ct)}{l} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum B_n \left\{ \cos \frac{n\pi (x-ct)}{l} - \cos \frac{n\pi (x+ct)}{l} \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$f(x) = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

[1]) Mémoires de l'académie de Berlin 1753, p. 147.
[2]) Ebenda 1747, S. 214.

also

$$f(x-ct) = \sum A_n \sin \frac{n\pi(x-ct)}{l}$$

und

$$f(x+ct) = \sum A_n \sin \frac{n\pi(x+ct)}{l}.$$

Ferner ist

$$g(\xi) = \sum B_n \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l},$$

also

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi = -c \sum B_n \left\{ \cos \frac{n\pi(x+ct)}{l} - \cos \frac{n\pi(x-ct)}{l} \right\}.$$

Wir erhalten damit als neue Form der Lösung:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x-ct) + f(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi. \tag{19}$$

Durch direktes Ausrechnen bestätigt man, daß diese Lösung wirklich die Differentialgleichung befriedigt, wenn f zweimal und g einmal differenzierbar ist; im übrigen können f und g willkürliche Funktionen sein. Die Randbedingung $v = 0$ ist für $x = 0$ erfüllt, weil f und g ungerade Funktionen sind, für $x = l$ aus dem gleichen Grunde und wegen der Periodizität. Die Rechnung sei angedeutet; es ist:

$$f(l+ct) = f(2l-l+ct) = f(-l+ct) = -f(l-ct),$$

ebenso

$$g(l+ct) = -g(l-ct),$$

also

$$\int_{l-ct}^{l+ct} g(\xi)\, d\xi = 0,$$

somit

$$v(l) = 0.$$

Die Benutzung dieser Beziehungen gestattet uns noch einen allgemeinen Schluß. Wir bemerken zunächst noch, daß für die ungerade periodische Funktion g

$$\int_0^{2l} g(\xi)\, d\xi = 0, \quad \text{also} \quad \int_x^{x+2l} g(\xi)\, d\xi = 0$$

ist. Wir können also in den Integrationsgrenzen $2l$ beliebig hinzufügen oder abziehen. Vergrößern wir jetzt t um $\frac{T}{2} = l/c$ und schreiben

$$x' = l - x, \quad t' = t + l/c,$$

so wird:

$$(20)\quad \begin{cases} v(x',t') = \dfrac{1}{2}\{f(l-x-ct-l)+f(l-x+ct+l)\} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{l-x-ct-l}^{l-x+ct+l} g(\xi)\,d\xi, \\ \quad = \dfrac{1}{2}\{f(-x-ct)+f(-x+ct)\} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x+ct}^{x-ct} g(\xi')\,d\xi',\ \xi'=-\xi, \\ \quad = -\dfrac{1}{2}\{f(x+ct)+f(x-ct) - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi')\,d\xi', \\ \quad = -v(x,t). \end{cases}$$

Es wird also

$$(21)\qquad v(l-x,\ t+l/c) = -v(x,t).$$

Wir erkennen, daß nach der Zeit l/c an der Stelle $l-x$ die entgegengesetzt gleiche Verschiebung herrscht, wie zur Zeit $t=0$ bei x. Es erscheint also nach der Zeit $\dfrac{T}{2} = l/c$ der Ausschlag in doppelter Weise gespiegelt, einmal von rechts nach links, dann von oben nach unten. Ein gleiches gilt für die Geschwindigkeit, wie man durch Differentiation sofort erkennt.

5. Die endlose Saite. Wenn wir die Befestigungspunkte der Saite ins Unendliche rücken lassen, also die endlose Saite betrachten, so fallen in der d'Alembertschen Lösung (19) die Bedingungen, periodisch und ungerade zu sein, für die Funktionen g und f fort, es bleiben nur die Bedingungen der Differenzierbarkeit übrig, sonst sind f und g ganz willkürlich, müssen nur jetzt von vornherein für alle Werte des Arguments gegeben sein. Von der allgemeinen Lösung betrachten wir zunächst den einfachsten Spezialfall:

$$(22)\qquad v = f(x+ct).$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung stellt uns eine „Welle" dar, welche mit der Geschwindigkeit c nach rückwärts über die Saite läuft. Legen wir nämlich zur Zeit t das Koordinatensystem um das Stück ct nach rückwärts: $x' = x+ct$, so ist in bezug auf das neue Koordinatensystem die Gestalt der Saite

$$(23)\qquad v(t) = f(x')$$

die gleiche wie zur Zeit $t=0$ in bezug auf das ursprüngliche System

$$v(0) = f(x).$$

Für einen mit der Geschwindigkeit c nach rückwärts sich bewegenden Beobachter wird also die Gestalt der Saite stets die gleiche sein. Wechseln wir das Vorzeichen von c:

$$v = f(x - ct), \tag{24}$$

so erhalten wir das gleiche Ergebnis, nur läuft die Welle jetzt vorwärts. Setzen wir

$$G(\xi) = \frac{1}{c}\int g(\xi)\, d\xi, \tag{25}$$

so können wir die allgemeine Lösung in der Form

$$v(x,t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+ct) + G(x+ct) + f(x-ct) - G(x-ct)\} \tag{26}$$

schreiben und erkennen, daß sie sich aus einer rückwärtslaufenden Welle

$$v_1(x,t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+ct) + G(x+ct)\} \tag{26'}$$

und einer vorwärtslaufenden

$$v_2(x,t) = \tfrac{1}{2}\{f(x-ct) - G(x-ct)\} \tag{26''}$$

zusammensetzt.

Wir wollen zwei Spezialfälle noch etwas genauer betrachten, daß einmal die Saite aus einer Anfangslage ohne Geschwindigkeit losgelassen wird, dann, daß sie mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit ihre Bewegung aus der Geraden beginnt. Im besonderen wollen wir dabei voraussetzen, daß sich die Störung zu Beginn auf ein endliches Gebiet $-a \leqq x \leqq +a$ zu beiden Seiten des Koordinatenanfangs beschränkt.

Ist $f(x)$ die Anfangslage, aus welcher die Bewegung ohne Geschwindigkeit beginnt, so ist

$$v(x,t) = \tfrac{1}{2}f(x+ct) + \tfrac{1}{2}f(x-ct). \tag{27}$$

Das bedeutet, daß die Hälfte der Störung als Welle nach rechts, die andere Hälfte als Welle nach links fortläuft. Fig. 70 zeigt einmal die Anfangsstörung, dann die Lage nach einer gewissen Zeit t, wo die Störungen — auf die Hälfte verkleinert — nach rechts und links fortgerückt sind.

Ist zweitens $g(x)$ die Anfangsgeschwindigkeit einer Bewegung, welche aus der Gleichgewichtslage beginnt, so ist

$$v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi. \tag{28}$$

Da die Störung sich zu Beginn ($t = 0$) auf die Strecke von $x = -a$ bis $x = +a$ beschränkt, so werden sich zu irgend einer Zeit t alle diejenigen Punkte in Ruhe befinden, für welche links $x + ct < -a$,

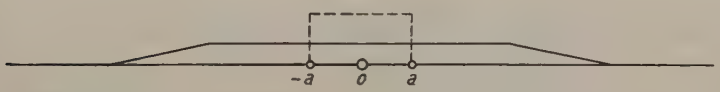
rechts $x - ct > +a$ ist. Erst wenn links $x + ct = -a$, rechts $x - ct = +a$ wird, reicht das Integrationsintervall in den Bereich von $-a$ bis $+a$ hinein, für welches $g(\xi) \neq 0$ ist. Die Störung pflanzt sich also von den anfänglichen Grenzpunkten $x = \pm a$ mit der Wellengeschwindigkeit c nach rechts und links fort. Ist t so groß, daß links $x + ct \geqq +a$, rechts $x - ct \leqq -a$ ist, d. h. für $ct \geqq |x| + a$, so schließen die Integrationsgrenzen das Gebiet von $-a$ bis $+a$ vollständig ein und es wird

$$(29) \qquad v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2c}\int_{-a}^{+a} g(\xi)\,d\xi = \text{konst.}$$

Die Bewegung geht also so vor sich, daß von der Mitte aus eine Verschiebung nach rechts und links läuft, derart, daß ein Punkt bis zur

Fig. 70.

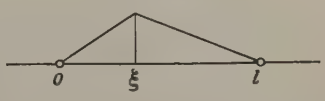
Fig. 71.



Zeit $t = \frac{|x| - a}{c}$ in Ruhe bleibt. Von $t = \frac{|x| - a}{c}$ bis $t = \frac{|x| + a}{c}$ wächst die Verschiebung an bis zum Betrage $\frac{1}{2c}\int_{-a}^{+a} g(\xi)\,d\xi$ und bleibt von da an konstant.

6. Unstetigkeiten. Wir haben bisher ausdrücklich die Forderung gestellt, daß die Funktionen $f'(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen von x sein sollten. Es kommen aber in den Anwendungen Fälle vor, welche zweckmäßigerweise durch Unstetigkeiten in diesen Funktionen dargestellt werden. Wir erinnern an das Beispiel der gezupften Saite: Denken wir uns eine gespannte Saite durch eine Einzelkraft an einer bestimmten Stelle aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, so erhält sie eine Anfangslage, wie sie etwa Fig. 72 darstellt. Am Angriffspunkt der Einzelkraft ist $f'(x)$, d. h. die Tangente an die Anfangslage unstetig. (NB. Eine Unstetigkeit des

Fig. 72.



Anfangsausschlages $f(x)$ selbst ist natürlich ausgeschlossen, wenn der Zusammenhang der Saite gewahrt bleiben soll.) Man wird von vornherein vermuten, daß unsere Lösungen auch für diesen Fall gültig bleiben, denn die Konvergenz der Reihenentwicklung bleibt bestehen, und die d'Alembertsche Lösung bleibt formal sicher anwendbar. Ehe wir uns von der Berechtigung dieser Anwendung überzeugen, wollen wir die Lösung betrachten. Wir erhalten die Bewegung der Saite, indem wir eine Welle, wie sie Fig. 73 zeigt, von links nach rechts über die Saite laufen lassen und ihr eine gleiche Welle überlagern, welche von rechts nach links läuft. In irgend einer Stellung

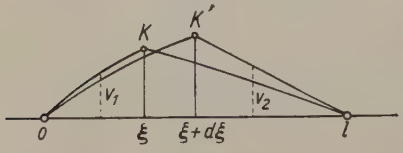
Fig. 73.

Fig. 74.

der beiden Wellen gibt das Mittel der Ordinaten für irgend einen Wert von x den Ausschlag der Saite an. Man erhält als Ausschlag für irgend einen Zeitpunkt t einen Streckenzug, der sich aus zwei oder drei Stücken gerader Linien zusammensetzt. Der Knickpunkt der Anfangslage teilt sich bei Beginn der Bewegung in zwei solche, die sich nach vorwärts und rückwärts mit der Geschwindigkeit c fortbewegen.

Den Beweis für die Anwendbarkeit unserer Gleichungen auch in diesem Falle verdankt man Christoffel[1]). Er beruht auf dem direkten Ansatz der Newtonschen Grundgleichung (bzw. des Impulssatzes) für ein Massenteilchen, über welches ein Knick hinwegläuft. ξ sei die Abszisse des Knickpunktes K. Bewegt sich der Punkt K mit der Geschwindigkeit a nach vorwärts, so läuft er in der Zeit dt über ein Stück $d\xi = a\,dt$ hinweg. Zunächst formulieren wir die Bedingung, daß der Knickpunkt K sowohl auf dem aufsteigenden als auch auf dem absteigenden Aste der v-Kurve

Fig. 75.



[1]) Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten. Annali di Matematica VIII, 1876. Ges. Abh. **2**, 551.

liegen muß. Wir bezeichnen die Ausschläge links von K mit v_1, rechts mit v_2 und erhalten

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} d\xi + \frac{\partial v_1}{\partial t} dt = \frac{\partial v_2}{\partial x} d\xi + \frac{\partial v_2}{\partial t} dt$$

oder

$$a \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = a \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial t}, \tag{30}$$

d. h. der Ausdruck $a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}$ muß stetig bleiben. Während des Überganges über die Unstetigkeitsstelle hat das Längenelement $d\xi$ folgende Kraftwirkung erfahren: Von links her wirkte die Spannung S mit der Neigung $-\frac{\partial v_1}{\partial x}$ gegen die Horizontale, also senkrecht zur Saite die Kraftkomponente $-S \frac{\partial v_1}{\partial x}$. Ebenso wirkt infolge des Zuges S von rechts her eine Normalkraft $S \frac{\partial v_2}{\partial x}$ insgesamt

$$S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right).$$

Auf das Element $d\xi$ wirkt diese Kraft in der Zeit dt, so daß die gesamte Stoßwirkung

$$S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) dt$$

ist. Diese haben wir dem Impulsgewinn des Elementes gleichzusetzen. Da das Element von dem rechten auf den linken Ast wandert, ist dieser Impulsgewinn

$$\mu d\xi \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) = \mu a dt \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} \right)$$

(μ = Masse pro Längeneinheit). Wir erhalten daraus als zweite Bedingung, indem wir wie früher $S = \mu c^2$ setzen, die Gleichung

$$c^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = a \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} \right)$$

oder

$$c^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + a \frac{\partial v_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + a \frac{\partial v_2}{\partial t}. \tag{31}$$

Der Vergleich mit Formel (30) ergibt dann unmittelbar

$$c^2 = a^2 \quad \text{oder} \quad a = \pm c,$$

d. h. ein Knickpunkt kann nur mit der Wellengeschwindigkeit c nach vorwärts oder rückwärts fortschreiten.

Bezeichnen wir den Sprung in der Neigung mit

$$\sigma(n) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x}, \tag{32}$$

und den Sprung der Geschwindigkeit mit

$$\sigma(g) = \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t}, \tag{33}$$

so liefern unsere Gleichungen:

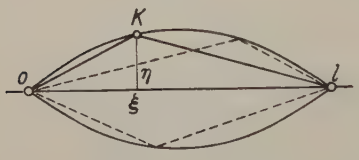
$$\begin{aligned} a\sigma(n) + \sigma(g) &= 0, \\ c^2\sigma(n) + a\sigma(g) &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma(g)}{\sigma(n)} = \pm c. \tag{34}$$

es muß also der Geschwindigkeitssprung zu dem Neigungssprung in einem ganz bestimmten Verhältnis stehen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, z. B. wenn wir eine Saite durch eine Einzelkraft ablenken und ohne Geschwindigkeit loslassen, so daß zwar ein Neigungssprung, aber kein Geschwindigkeitssprung an der Unstetigkeitsstelle eintritt, so müssen wir die Unstetigkeit als Summe zweier Knicke auffassen, von denen der eine von links nach rechts und der andere von rechts nach links läuft. Sind $\sigma(n)$ und $\sigma(g)$ die vorgegebenen Unstetigkeiten der Neigung und der Geschwindigkeit, $\sigma_1(n)$, $\sigma_1(g)$ und $\sigma_2(n)$, $\sigma_2(g)$ die Sprünge für die vorwärts- ($a = -c$) und rückwärts- ($a = +c$) laufenden Unstetigkeiten, so haben wir zur Bestimmung von $\sigma_1(n)$, $\sigma_1(g)$, $\sigma_2(n)$, $\sigma_2(g)$ die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} c\sigma_1(n) - \sigma_1(g) &= 0, \quad & \sigma_1(n) + \sigma_2(n) &= \sigma(n), \\ c\sigma_2(n) + \sigma_2(g) &= 0, \quad & \sigma_1(g) + \sigma_2(g) &= \sigma(g). \end{aligned} \tag{35}$$

Prüft man die d'Alembertsche Lösung, so sieht man (ebenso wie bei den Reihenentwicklungen), daß sie die Unstetigkeitsbedingungen erfüllt, also ohne weiteres auf diesen früher ausgeschlossenen Fall ausgedehnt werden kann.

Fig. 76.



Beispiel. Wir können in manchen Fällen die Bewegung einer Saite ohne die allgemeine Theorie mit Benutzung der Bedingungen für die Bewegung der Unstetigkeiten gewinnen. Dies soll das folgende Beispiel zeigen. Wir bemerken zunächst, daß die Differentialgleichung der Saitenbewegung identisch befriedigt ist, wenn $v(x,t)$ sowohl in bezug auf x als auf t eine lineare Funktion ist. Es besteht dann die Gestalt der Saite in jedem Augenblick aus geradlinigen Strecken. Wir betrachten den Fall, daß sich die Saite nur in zwei solche Strecken teilt und also die beistehende Gestalt hat (s. Fig. 76). Da v in x und t linear ist, so muß $\frac{\partial v}{\partial t}$ eine lineare Funktion von x sein, also

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \omega_1 x + a_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \omega_2(l - x) + a_2. \tag{36}$$

Die Integrationskonstanten a_1 und a_2 verschwinden, da für den linken Ast bei $x = 0$ und für den rechten bei $x = l$ $\frac{\partial v}{\partial t}$ verschwinden muß. Die Bewegung der beiden geradlinigen Strecken besteht also in einer Drehung mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um die beiden Endpunkte, als ob die Strecken starre Stäbe wären. Durch Integration erhalten wir die Verschiebung

$$v_1 = \omega_1 x(t - t_0), \qquad v_2 = \omega_2 (l - x) t \tag{37}$$

(t_0 = Integrationskonstante). Die Abszisse ξ des Knickpunktes K liegt da, wo $v_1 = v_2$ ist, es ist also

$$\xi = \frac{\omega_2 l t}{(\omega_1 + \omega_2) t - \omega_1 t_0}. \tag{38}$$

Der Knickpunkt soll sich mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{dt} = +c$ bewegen. Das ist nur möglich, wenn im Nenner die Glieder mit t fortfallen. Es wird also

$$\omega_1 = -\omega_2 = \omega \tag{39}$$

sein, und

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{l}{t_0} = \pm c, \qquad \xi = \pm ct. \tag{40}$$

Mit dem positiven Vorzeichen erhalten wir

$$\begin{cases} t_0 = l/c, \\ v_1 = \omega x(t - l/c), \\ v_2 = -\omega (l - x) t. \end{cases} \tag{41}$$

Aus der Abszisse $\xi = ct$ des Knickpunktes erhalten wir die Ordinate

$$\eta = v_2(\xi) = -\frac{\omega (l - \xi)\xi}{c}, \tag{42}$$

d. h. der Knickpunkt läuft mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit vom linken zum rechten Endpunkt auf einem Parabelbogen. Die geradlinigen Verbindungen des Knickpunktes mit den Endpunkten liefern die Ausschlagsfigur der Saite.

Ist der Knickpunkt am rechten Ende angelangt, so springt seine Geschwindigkeit von c auf $-c$; er wandert auf dem Parabelbogen

$$\eta = \frac{\omega (l - \xi)\xi}{c}, \tag{43}$$

der zu dem vorher durchlaufenen symmetrisch liegt, zum Anfangspunkt zurück. Bei dieser Umkehr bleibt die Geschwindigkeit der Saitenpunkte stetig.

Betrachten wir die Geschwindigkeit eines gegebenen Punktes der Saite, so sehen wir aus unseren Formeln, daß er sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit abwärts bewegt, $\frac{\partial v_2}{\partial t} = -\omega(l-x)$, solange der Knickpunkt sich zu seiner Linken befindet. Liegt derselbe zu seiner Rechten, so bewegt der betrachtete Punkt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{\partial v_1}{\partial t} = \omega x$ aufwärts. Läuft der Knickpunkt über ihn hinweg, so springt seine Geschwindigkeit von dem positiven auf den negativen Konstantwert bzw. umgekehrt.

Nach Helmholtz bewegt sich nahezu nach diesem Gesetz eine Violinsaite. Der Bogen erteilt dem gestrichenen Punkte der Saite eine Bewegung, wie sie hier beschrieben wurde.

§ 2. Schwingungsprobleme und Integralgleichungen.

1. Ableitung der Integralgleichung[1]. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Methode der Integralgleichungen zu erläutern, die wir als eine Verallgemeinerung der Methode der Reihenentwicklung nach Partikularlösungen betrachten können. Wenn wir sie zunächst an dem Beispiel der schwingenden Saite mit festgehaltenen Endpunkten entwickeln, so können wir vor allen Dingen die Einschränkung überall gleicher Dichte fallen lassen.

Wir gehen aus von dem Falle einer statischen Belastung. Es wirke auf das Längenelement der Saite die Belastung $q \cdot dx$ ($q =$ Belastung pro Längeneinheit). Ist v die Durchbiegung der Saite unter dieser Last, so verlangt das Gleichgewicht an dem Element dx:

$$S\frac{d^2v}{dx^2} = -q(x) \tag{1}$$

($S =$ Spannung der Saite), denn die Spannung S in Richtung der Tangente hat am linken Ende des Elements die y-Komponente $-S\frac{dv}{dx}$, am rechten Ende $S\left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}dx\right)$. Es bleibt also von der Saitenspannung S her die Komponente $S\frac{d^2v}{dx^2}dx$; setzen wir diese ins Gleichgewicht mit der Belastung $q\,dx$, so erhalten wir die Gl. (1).

Wir bemerken zunächst, daß sich wegen der Linearität der Differentialgleichung und der Homogenität der Randbedingungen ($v = 0$ für $x = 0$ und $x = l$) die Durchbiegungen der Saite addieren, wenn

[1]) Siehe 1. Bd., XI, § 1, 3.

wir verschiedene Belastungen superponieren, d. h. wenn die Belastungen $q_1(x)$ und $q_2(x)$ die Durchbiegungen $v_1(x)$ und $v_2(x)$ hervorrufen, so bewirkt die Belastung $q = q_1 + q_2$ die Durchbiegung $v = v_1 + v_2$ (Superpositionsgesetz).

Einzellast. Wirkt an der Stelle ξ eine Einzellast $Q = 1$, so besteht die Deformationsfigur aus zwei geradlinigen Stücken; von $x = 0$ bis $x = \xi$ ist

$$V_1(x) = \frac{V(\xi)x}{\xi}, \tag{2}$$

von $x = \xi$ bis $x = l$:

$$V_2(x) = \frac{V(\xi)(l-x)}{l-\xi}, \tag{3}$$

und das Gleichgewicht erfordert

$$S\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = -Q = -1. \tag{4}$$

Das ergibt:

$$V(\xi) = \frac{\xi(l-\xi)}{Sl}. \tag{5}$$

Diese Gleichung liefert uns die Deformation:

$$\begin{cases} \text{links der Last, d. h. } x \leqq \xi \quad V(x,\xi) = \dfrac{x(l-\xi)}{Sl}, \\ \text{rechts der Last, d. h. } x \geqq \xi \quad V(x,\xi) = \dfrac{\xi(l-x)}{Sl}. \end{cases} \tag{6}$$

Wir bezeichnen die Durchbiegungen mit $V(x,\xi)$, um die Abhängigkeit von der Laststellung anzudeuten. Wirkt an der Stelle ξ nicht eine Last 1, sondern eine Last P, so ist die Durchbiegung bei x die P-fache

$$PV(x,\xi) = \frac{Px(l-\xi)}{Sl} \quad \text{bzw.} \quad \frac{P\xi(l-x)}{Sl}.$$

Wirken an den Stellen ξ_1, ξ_2, ξ_3 usw. die Lasten P_1, P_2 usw., so superponieren sich die Durchbiegungen und wir erhalten

$$v(x) = \sum V(x,\xi_\nu) P_\nu.$$

Haben wir stetig verteilte Lasten, derart, daß auf das Stück $d\xi$ eine Last $q(\xi)d\xi$ wirkt, so geht die Summe in das Integral

$$v(x) = \int_0^l V(x,\xi) q(\xi) d\xi \tag{7}$$

über. Daß diese Lösung die Differentialgleichung befriedigt, kann direkt bestätigt werden. Wir schreiben:

$$v(x) = \int_0^x V(x,\xi) q(\xi) d\xi + \int_x^l V(x,\xi) q(\xi) d\xi,$$

also wird

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^x \frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x} q(\xi)\, d\xi + \int_x^l \frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x} q(\xi)\, d\xi.$$

Nun ist im ersten Integral

$$x \geqq \xi, \quad \text{also} \quad \frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x} = \frac{-\xi}{Sl},$$

im zweiten Integral

$$x \leqq \xi, \quad \frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x} = \frac{l-\xi}{Sl},$$

also wird

$$S\frac{dv}{dx} = -\int_0^x \frac{\xi\, q(\xi)\, d\xi}{l} + \int_x^l \frac{(l-\xi)\, q(\xi)\, d\xi}{l},$$

und somit

$$S\frac{d^2v}{dx^2} = -q(x),$$

die Differentialgleichung ist also tatsächlich erfüllt.

Die wichtigste Eigenschaft der Funktion $V(x,\xi)$ ist ihre Symmetrie in bezug auf x und ξ.

(8) $$V(x,\xi) = V(\xi,x),$$

d. h. eine Last 1, welche bei ξ wirkt, ruft an der Stelle x die gleiche Deformation hervor, die an der Stelle ξ hervorgerufen wird, wenn die Last 1 bei x wirkt. Zum Beweise setzen wir einmal $x = h$, $\xi = k$ $(h < k)$, dann wird:

$$V(h,k) = \frac{h(l-k)}{Sl}.$$

Zweitens setzen wir $x = k$, $\xi = h$, $x > \xi$, und es wird:

$$V(k,h) = \frac{h(l-k)}{Sl},$$

also:

$$V(k,h) = V(h,k),$$

wie zu beweisen war.

Die Integralgleichung für die Saitenbewegung erhalten wir durch die Anwendung des d'Alembertschen Prinzips. Dieses sagt aus, daß in jedem Augenblick die Saite im Gleichgewicht ist, wenn wir die Trägheitswiderstände wie äußere Kräfte anbringen.

Wir machen nun von vornherein für die Bewegung einen nach der Zeit periodischen Ansatz:

(9) $$v(x,t) = \varphi(x) \cos \nu t.$$

Ein Element von der Länge dx hat die Masse μdx (μ = Masse pro Längeneinheit an der Stelle x) und erleidet eine Beschleunigung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\nu^2 \varphi(x) \cos \nu t. \tag{10}$$

Der Trägheitswiderstand ist also:

$$-\mu dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \nu^2 \mu \varphi(x) \cos \nu t \, dx,$$

oder pro Längeneinheit:

$$\nu^2 \mu \varphi(x) \cos \nu t. \tag{11}$$

Dieser Trägheitswiderstand ist als Belastung q in die Gleichgewichtsgleichung (7)

$$v = \int_0^l V(x, \xi) q(\xi) d\xi$$

einzusetzen. Der Faktor $\cos \nu t$ hebt sich rechts und links heraus, und für φ ergibt sich die Integralgleichung:

$$\varphi(x) = \nu^2 \int_0^l V(x, \xi) \mu(\xi) \varphi(\xi) d\xi, \tag{12}$$

also eine homogene lineare Integralgleichung. Ist die Masse μ nicht überall die gleiche, so ist der Kern dieser Integralgleichung nicht symmetrisch. Man gelangt aber zu einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern, wenn man die Integralgleichung (12) rechts und links mit $\sqrt{\mu(x)}$ multipliziert, was stets zulässig ist, da μ positiv ist. Setzt man jetzt

$$\psi(x) = \varphi(x) \sqrt{\mu(x)}, \tag{13}$$

$$K(x, \xi) = V(x, \xi) \sqrt{\mu(x) \mu(\xi)} = K(\xi, x), \tag{14}$$

so erhält man für die Funktion ψ die Integralgleichung,

$$\psi(x) = \nu^2 \int_0^l K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi, \tag{15}$$

deren Kern $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ symmetrisch ist. Nach den allgemeinen Sätzen (s. 1. Bd., XII, § 3) ist diese Integralgleichung nicht für beliebige ν^2-Werte lösbar, sondern nur dann, wenn ν^2 mit einem der Eigenwerte des Kernes $K(x, \xi)$ übereinstimmt. Die Saite kann also nicht mit einer beliebigen Schwingungszahl periodische Schwingungen ausführen, sondern die möglichen Schwingungszahlen bilden als Quadratwurzeln der Eigenwerte eine diskrete, sich im Endlichen nirgends häufende Folge, die wir nach wachsender Größe geordnet mit ν_1, ν_2, ν_3 usw. bezeichnen. Die zugehörigen Eigenfunktionen der symmetrisierten Integralgleichung $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ usw. und die Funktionen $\varphi_h(x) = \psi_h(x)/\sqrt{\mu(x)}$, welche uns die Amplituden angeben, mit denen die Punkte der Saite sich bewegen, sind

nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, über den wir so verfügen, daß

$$\int_0^l \psi_h^2(x)\,dx = \int_0^l \mu(x)\,\varphi_h^2(x)\,dx = 1 \tag{16}$$

wird. Zwei Eigenfunktionen, welche zu verschiedenen Eigenwerten (Schwingungszahlen) gehören, sind zueinander orthogonal, d. h. es ist für $h \neq k$:

$$\int_0^1 \psi_h(x)\,\psi_k(x)\,dx = \int_0^1 \mu(x)\,\varphi_h(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0. \tag{17}$$

Gehören zu einem Eigenwert mehrere Eigenfunktionen ψ', ψ'' usw., so ist auch jede mit konstanten Koeffizienten gebildete lineare Verbindung $c'\psi' + c''\psi'' + \cdots$ eine Eigenfunktion für diesen Eigenwert, und man kann die c stets so bestimmen, daß die Orthogonalitätsbedingungen (17) und die Normierung (16) auch in diesem Falle gelten.

2. Potentielle und kinetische Energie. Belasten wir eine Saite durch eine Belastung von q kg/cm, so wird von diesen Lasten während der Durchbiegung eine Arbeit geleistet, die als „potentielle Energie der Deformation“ in der Saite aufgespeichert ist und bei der Entlastung wieder frei wird, bzw. bei den Schwingungen sich in kinetische Energie umsetzt. Um sie zu berechnen, denken wir uns die Belastung $q(\xi)$ um δq vermehrt, hierbei vergrößern sich die Durchbiegungen der Saite um

$$\delta v(x) = \int_0^l V(x,\xi)\,\delta q(\xi)\,d\xi,$$

und es wird eine Arbeit

$$\delta A = \int_0^l q(x)\,\delta v(x)\,dx = \int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,q(x)\,\delta q(\xi)\,dx\,d\xi \tag{18}$$

geleistet, welche gleich der Vermehrung der potentiellen Energie ist. Vertauschen wir unter dem Integral x und ξ, so wird

$$\delta A = \int_0^l\int_0^l V(\xi,x)\,q(\xi)\,\delta q(x)\,dx\,d\xi. \tag{19}$$

Durch Addition von (18) und (19) erhalten wir, indem wir beachten, daß $V(x,\xi) = V(\xi,x)$ ist

$$\left\{\begin{aligned} \delta A &= \tfrac{1}{2}\int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,\{q(x)\,\delta q(\xi) + q(\xi)\,\delta q(x)\}\,dx\,d\xi \\ &= \delta\left\{\tfrac{1}{2}\int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,q(x)\,q(\xi)\,dx\,d\xi\right\}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Es ist also die Vermehrung der potentiellen Energie gleich der Vergrößerung des Integrals auf der rechten Seite, so daß wir, wenn im unbelasteten Zustande die potentielle Energie gleich Null gesetzt wird,

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,q(x)\,q(\xi)\,dx\,d\xi \tag{21}$$

erhalten.

Führt die Saite mit der Frequenz ν eine Eigenschwingung

$$v(x) = \varphi(x)\cos(\nu t - \gamma) \tag{22}$$

aus, so erhalten wir zu irgend einem Zeitpunkt t die Durchbiegung, indem wir den Trägheitswiderstand der Längeneinheit als Belastung q aufbringen:

$$q(x) = \nu^2\cos(\nu t - \gamma)\,\mu(x)\,\varphi(x). \tag{23}$$

Damit erhalten wir als potentielle Energie der Deformation

$$A = \frac{\nu^4\cos^2(\nu t-\gamma)}{2}\int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,\mu(x)\,\mu(\xi)\,\varphi(x)\,\varphi(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{24}$$

Hier können wir unter dem Integral die Integration nach ξ ausführen. Es ist auf Grund der Integralgleichung

$$\nu^2\int_0^l V(x,\xi)\,\mu(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi(x),$$

also

$$A = \tfrac{1}{2}\nu^2\cos^2(\nu t-\gamma)\int_0^l \mu(x)\,\varphi^2(x)\,dx. \tag{25}$$

Die kinetische Energie der schwingenden Saite wird

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\nu^2\sin^2(\nu t-\gamma)\int_0^l \mu(x)\,\varphi^2(x)\,dx. \tag{26}$$

Aus den Formeln für die kinetische und potentielle Energie wollen wir einige Folgerungen ziehen. Zunächst folgt der Energiesatz: wir erhalten als Summe aus kinetischer und potentieller Energie:

$$E + A = \frac{\nu^2}{2}\int_0^l \mu(x)\,\varphi^2(x)\,dx, \tag{27}$$

d. h. die Gesamtenergie ist von der Zeit unabhängig. Zweitens erhalten wir durch Integration über eine volle Schwingungsperiode:

$$\int_0^T E\,dt = \frac{\nu^2 T}{4}\int_0^l \mu(x)\,\varphi^2(x)\,dx = \int_0^T A\,dt, \tag{28}$$

d. h. für jede Eigenschwingung sind die zeitlichen Mittelwerte der kinetischen und der potentiellen Energie einander gleich.

Schreiben wir den Mittelwert der potentiellen Energie in der Form $\frac{\nu^4 T}{4}\int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,\mu(x)\,\mu(\xi)\,\varphi(x)\,\varphi(\xi)\,dx\,d\xi$, so erhalten wir aus dem letzten Satze:

$$\frac{\nu^2 T}{4}\int_0^l \mu(x)\,\varphi^2(x)\,dx = \frac{\nu^4 T}{4}\int_0^l\int_0^l V(x,\xi)\,\mu(x)\,\mu(\xi)\,\varphi(x)\,\varphi(\xi)\,dx\,d\xi$$

und schließen daraus, daß die Eigenwerte ν^2 der Integralgleichung nicht nur reell, sondern auch positiv sind. Die rechte Seite ist nämlich als potentielle Energie jedenfalls positiv. Auf der linken Seite ist $\int \mu(x)\,\varphi^2(x)\,dx$ auch positiv, so daß auch ν^2 positiv sein muß.

Schließlich erhalten wir aus unseren Gleichungen noch die mechanische Deutung der Orthogonalitätsbedingungen (17), wonach für zwei verschiedene Eigenfunktionen

$$\int_0^l \psi_h(x)\,\psi_k(x)\,dx = \int_0^l \mu(x)\,\varphi_h(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0$$

ist. Sie besagen, daß bei der Superposition zweier Eigenschwingungen sich nicht nur die Ausschläge, sondern auch die Energien addieren. Sind die beiden Schwingungen

$$v_h = A_h\,\varphi_h(x)\cos(\nu_h t - \gamma_h) \quad \text{und} \quad v_k = A_k\,\varphi_k(x)\cos(\nu_k t - \gamma_k),$$

so ist die kinetische Energie der einzelnen Schwingungen:

$$E_h = \tfrac{1}{2}\nu_h^2 A_h^2 \sin^2(\nu_h t - \gamma_h)\int_0^l \mu(x)\,\varphi_h^2(x)\,dx,$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}\nu_k^2 A_k^2 \sin^2(\nu_k t - \gamma_k)\int_0^l \mu(x)\,\varphi_k^2(x)\,dx.$$

Erfolgen beide gleichzeitig, so ist die kinetische Energie der resultierenden Schwingung

$$v = v_h + v_k$$

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$= E_h + E_k + \nu_h\nu_k A_h A_k \sin(\nu_h t - \gamma_h)\sin(\nu_k t - \gamma_k)\int_0^l \mu(x)\,\varphi_h(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

Wegen der Orthogonalitätsbedingung fällt das Integral fort, so daß tatsächlich

$$E = E_h + E_k \tag{29}$$

herauskommt, was zu beweisen war. In gleicher Weise folgt die Addition der potentiellen Energie.

Wir schließen daraus, daß der Energiesatz auch für eine beliebige, durch Superposition von Eigenschwingungen gewonnene Bewegung seine Gültigkeit behält.

3. Einführung des Anfangszustandes. Wenn wir die Bewegung ermitteln wollen, welche die Saite aus einer gegebenen Anfangslage

$$v(x,0) = f(x) \tag{30}$$

mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = g(x) \tag{31}$$

ausführt, so verfahren wir genau wie bei der homogenen Saite (siehe S. 679 f.). Sind die zu den Schwingungszahlen ν_1, ν_2 usw. gehörenden Schwingungen

$$v_h(x,t) = \varphi_h(x)\cos\nu_h t \quad \text{oder} \quad \varphi_h(x)\sin\nu_h t,$$

so erfüllt auch jede gleichmäßig konvergente Reihe

$$v(x,t) = \sum \varphi_h(x)\{A_h\cos\nu_h t + B_h\sin\nu_h t\} \tag{32}$$

die Integralgleichung der Saitenbewegung:

$$v(x,t) = -\int_0^l V(x,\xi)\,\mu(\xi)\,\frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial t^2}\,d\xi,$$

wobei die Koeffizienten A_h, B_h zunächst beliebig sind. Sie sind so zu bestimmen, daß ein gegebener Anfangszustand herauskommt. Soll der Anfangsausschlag $f(x)$, die Anfangsgeschwindigkeit $g(x)$ sein, so muß

$$\begin{cases} f(x) = \sum A_h\,\varphi_h(x), \\ g(x) = \sum B_h\,\nu_h\,\varphi_h(x) \end{cases} \tag{33}$$

werden. Multiplizieren wir hier rechts und links mit $\mu(x)\,\varphi_n(x)$ und integrieren von 0 bis 1, so fallen auf der rechten Seite alle Integrale bis auf (16)

$$\int_0^l \mu(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx = 1$$

heraus, und wir erhalten:

$$\begin{cases} A_n = \int_0^l f(x)\,\mu(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \\ B_n = \frac{1}{\nu_n}\int_0^l g(x)\,\mu(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \end{cases} \tag{34}$$

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß diese Reihen konvergieren und die Funktionen f und g tatsächlich darstellen. Um dies zu beweisen, schreiben wir unter Benutzung der Funktionen ψ, indem wir (33) mit $\sqrt{\mu(x)}$ multiplizieren:

$$f(x)\sqrt{\mu(x)} = \sum A_h \sqrt{\mu(x)}\,\varphi_h(x) = \sum A_h \psi_h(x). \tag{35}$$

Es muß sich also die Funktion $\sqrt{\mu(x)}\,f(x)$ durch die Eigenfunktionen $\psi_h(x)$ der symmetrischen Integralgleichung (15) nach Fourierart in eine Reihe entwickeln lassen. Das ist nach der allgemeinen Theorie dann der Fall, wenn $\sqrt{\mu}\,.\,f$ in der Form

$$\sqrt{\mu(x)}\,f(x) = \int_0^l K(x,\xi)\,\varrho(\xi)\,d\xi \tag{36}$$

darstellbar ist, wobei die Funktion ϱ quadratisch integrabel sein muß. Schreiben wir diese Bedingung:

$$f(x) = \int_0^l V(x,\xi)\sqrt{\mu(\xi)}\,\varrho(\xi)\,d\xi = \int_0^l V(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi, \tag{37}$$

so bedeutet sie, daß sich die Anfangslage durch eine stetig verteilte und quadratisch integrable Belastung $q(\xi)$ herstellen lassen muß. Da die Belastung, welche eine gegebene Durchbiegung f hervorbringt, nach Gl. (1), S. 690 durch

$$q(x) = -Sf''(x)$$

bestimmt ist, so bedeutet unsere Bedingung, daß die Anfangslage der Saite einen quadratisch integrablen zweiten Differentialquotienten haben muß.

Eine analoge Bedingung ergibt sich für $g(x)$. Die Resultate lassen sich jedoch dahin erweitern, daß die in der angegebenen Weise gebildeten Reihen für jeden mit endlichem Energieaufwand herzustellenden Anfangszustand absolut und gleichmäßig konvergieren.

4. Erzwungene Schwingungen. Bis jetzt hatten wir den Fall betrachtet, daß eine Saite mit gegebenem Anfangszustand zu schwingen beginnt, ohne daß weitere äußere Kräfte wirken. Nun wollen wir die Saite einer periodischen Erregung aussetzen, die wir in der einfachen Form

$$Q(x,t) = q(x)\cos\varrho t \tag{38}$$

annehmen wollen. Die allgemeine periodische Erregung setzen wir dann durch Fourierzerlegung aus solchen Partikularfällen zusammen. Setzen wir die Lösung in der gleichen periodischen Form an

$$v(x,t) = \varphi(x)\cos\varrho t, \tag{39}$$

so erhalten wir als Ausdruck des d'Alembertschen Prinzips die Integralgleichung:

$$v(x,t) = \varphi(x)\cos\varrho t = \int_0^l \left\{Q(\xi) - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\mu(\xi)\right\} V(x,\xi)\,d\xi,$$

oder nach Wegheben von $\cos\varrho t$:

$$\varphi(x) = k(x) + \varrho^2 \int_0^l V(x,\xi)\,\mu(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{40}$$

Hier ist

$$k(x) = \int_0^l V(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi \tag{41}$$

die Durchbiegung, welche durch die statische Belastung $q(\xi)\,\mathrm{kg/cm}$ hervorgerufen wird. Nach Symmetrisierung des Kernes:

$$K(x,\xi) = V(x,\xi)\sqrt{\mu(x)\,\mu(\xi)},$$
$$\psi(x) = \varphi(x)\sqrt{\mu(x)}$$

und mit der Abkürzung $f(x) = k(x)\sqrt{\mu(x)}$ ergibt sich:

$$\psi(x) = f(x) + \varrho^2 \int_0^l K(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{42}$$

Diese „nicht homogene" Integralgleichung hat (nach 1. Bd., XII, § 3, 4) immer dann eine Lösung, wenn die Erregungsfrequenz ϱ verschieden ist von einer der Eigenschwingungszahlen ν_n des homogenen Problems, d. h. außer im Falle der „Resonanz". Die Schmidtsche Lösung dieser Integralgleichung gewinnt man in rein formaler Weise folgendermaßen — wenn wir wieder direkt mit dem unsymmetrischen Kern und seinen Eigenfunktionen $\varphi_h(x)$ operieren —; wir denken uns $k(x)$ nach den Eigenfunktionen entwickelt:

$$k(x) = \sum k_n \varphi_n(x), \quad k_n = \int_0^l k(x)\,\mu(x)\,\varphi_n(x)\,dx \tag{43}$$

und setzen die Lösung in der Form

$$\varphi(x) = \sum A_n \varphi_n(x) \tag{44}$$

an. Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gl. (40) ein, so erhalten wir

$$\begin{cases} \sum A_n \varphi_n(x) = \sum k_n \varphi_n(x) + \varrho^2 \sum A_n \int_0^l V(x,\xi)\,\mu(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi \\ \qquad = \sum \left(k_n + \dfrac{\varrho^2}{\nu_n^2} A_n\right) \varphi_n(x). \end{cases} \tag{45}$$

Diese Gleichung ist offenbar erfüllt, wenn

$$(46)\quad A_n = k_n + \frac{\varrho^2 A_n}{\nu_n^2} \quad \text{oder} \quad A_n = k_n \frac{\nu_n^2}{\nu_n^2 - \varrho^2} = k_n\left(1 + \frac{\varrho^2}{\nu_n^2 - \varrho^2}\right)$$

ist. Also wird die Lösung

$$(47)\qquad \varphi(x) = \sum k_n\left(1 + \frac{\varrho^2}{\nu_n^2 - \varrho^2}\right)\varphi_n(x).$$

Berücksichtigen wir, daß (43)

$$\sum k_n \varphi_n(x) = k(x)$$

ist, so können wir diese schreiben:

$$(48)\qquad \varphi(x) = k(x) + \varrho^2 \sum \frac{k_n \varphi_n(x)}{\nu_n^2 - \varrho^2}.$$

Dies ist die Schmidtsche Form der Lösung für die nicht homogene Integralgleichung. Die Gültigkeit dieser Lösung ist zunächst daran gebunden, daß die Reihenentwicklung (43) für $k(x)$ gleichmäßig konvergiert. Daß die Lösung in der letzten Form (48) auch ohne diese Konvergenzbedingung noch gültig bleibt, ist der wesentliche mathematische Inhalt des Schmidtschen Beweises. (1. Bd., Kap. XII, § 3.)

Ist $\varrho = \nu_h$, d. h. die Erregungsfrequenz gleich einer der Eigenfrequenzen, so ist die Integralgleichung nur dann lösbar, wenn

$$(49)\qquad k_h = \int_0^l k(x)\,\varphi_h(x)\,\mu(x)\,dx = 0$$

ist, was man mechanisch dahin deuten kann, daß die äußeren Kräfte keine Arbeit leisten, wenn die Saite die zu der betreffenden Eigenschwingung gehörende Bewegung ausführt.

5. Stabschwingungen. Die Theorie der Integralgleichungen läßt sich in der Form, wie wir sie auf die Saitenbewegung angewendet haben, wörtlich auf das Problem der Stabschwingungen übertragen.

Wir betrachten einen Stab von der Länge l, der irgendwie festgehalten sei — entweder an beiden Enden gelagert, oder an einem Ende eingespannt, oder an beiden Enden drehbar gelagert oder eingespannt. $V(x, \xi)$ sei wieder die Durchbiegung an der Stelle x infolge einer an der Stelle ξ wirkenden Last 1. Für $V(x, \xi)$ gilt dann vor allem wieder die Symmetriebedingung $V(x, \xi) = V(\xi, x)$, wie durch folgende Energiebetrachtung zu erkennen ist. Die in dem Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist gleich der beim Deformationsvorgang von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit. Bringen wir an der Stelle x eine Last P auf den Balken, und an der Stelle ξ eine Last Q (Einzelkräfte), so rufen diese

bei x die Durchbiegung $v(x) = V(x, x)\,P + V(x, \xi)\,Q$,
bei ξ die Durchbiegung $v(\xi) = V(\xi, x)\,P + V(\xi, \xi)\,Q$

hervor. Vergrößern wir nun P um δP, so vergrößert sich

$$\text{die Durchbiegung bei } x \text{ um } \delta v(x) = V(x, x)\delta P,$$
$$\text{die Durchbiegung bei } \xi \text{ um } \delta v(\xi) = V(\xi, x)\delta P$$

und die Formänderungsarbeit vergrößert sich um die Arbeit der äußeren Kräfte bei der zusätzlichen Deformation

$$\delta A = V(x, x) P \delta P + V(\xi, x) Q \delta P.$$

Es ist also

$$\frac{\partial A}{\partial P} = V(x, x) P + V(\xi, x) Q,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P \partial Q} = V(\xi, x) = \frac{\partial^2 A}{\partial Q \partial P} = V(x, \xi),$$

also

$$V(x, \xi) = V(\xi, x).$$

Von hier aus sind die Ableitung der Integralgleichung und die daraus zu ziehenden Schlüsse genau so wie bei der schwingenden Saite.

Als Abschluß der Untersuchungen über die schwingende Saite wäre hier noch die allgemeine Integrationstheorie von Riemann zu erwähnen. Da dieselbe bereits im ersten Bande eine ausführliche Darstellung erfahren hat, sei hier darauf zurückverwiesen. (1. Bd., Kap. XVIII, § 4.)

§ 3. Die Schwingungen einer Membran.

1. Die Differentialgleichung der schwingenden Membran. Eine Membran ist ein elastischer Körper von der Gestalt eines dünnen Häutchens, das einer Biegung keinen Widerstand entgegensetzt, wohl aber einer Ausdehnung. Eine solche Membran sei in einer gegebenen festen Randkurve durch eine längs des Randes S überall konstante Zugkraft von S Kilogramm pro Zentimeter ausgespannt. Die Randkurve sei eben; im Gleichgewichtszustande liegt die Membran in dieser Ebene, die wir zur $x\,y$-Ebene machen, es herrscht dann überall der gleiche Spannungszustand, d. h. längs irgend eines Schnittes, den wir in der $x\,y$-Ebene durch die Membran legen, wird eine Zugkraft von S kg/cm von einer Seite des Schnittes auf die andere ausgeübt. Wird die Membran durch eine anfängliche Störung aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, wobei der Rand fest bleiben soll, so wird sie Schwingungen ausführen. Die Ausschläge aus der Gleichgewichtslage wollen wir als klein betrachten, derart, daß wir wieder die Produkte zweier Verschiebungen oder ihrer Ableitungen gegenüber linearen Ausdrücken in diesen Größen vernachlässigen. Ebenso wollen wir annehmen, daß die Spannungsänderungen bei der Deformation gegenüber der Anfangsspannung S

vernachlässigt werden können. Gegen die Oberfläche der Membran sollen keine äußeren Kräfte wirken. Die Verschiebungen eines Punktes der Fläche aus der Gleichgewichtslage bezeichnen wir mit u, v, w, von denen wir hier nur die letzte betrachten. Mit n werde die Richtung der Normalen zur Oberfläche der Membran in ihrer augenblicklichen Lage bezeichnet. Die Richtungskosinus der Normalen gegen diese drei Achsen sind dann nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie

$$\cos(n, x) = -\cos(n, z)\,\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\cos(n, y) = -\cos(n, z)\,\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}$$

bzw. bei Beschränkung auf kleine Deformationen

$$(1) \qquad \cos(n, x) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \cos(n, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \cos(n, z) = 1.$$

Wir nehmen nun an, daß die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} gleichmäßig über die Dicke der Membran verteilt seien. Schreiben wir dann die Gleichgewichtsbedingungen [Kap. XVII, S. 630, (6)] für ein Oberflächenelement der Membran an und berücksichtigen, daß die Spannungskomponenten

$$\sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}$$

klein sein sollen, und daß σ_x und σ_y bis auf kleine Größen

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{S}{d}$$

sind, wo d die Dicke der Membran ist, so erhalten wir bei Vernachlässigung der Quadrate und Produkte kleiner Größen

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y) + \tau_{xz}\cos(n, z) = -\frac{S}{d}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xz} = 0,$$

$$\tau_{xy}\cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz}\cos(n, z) = -\frac{S}{d}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{yz} = 0,$$

$$\tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) = \sigma_z = 0,$$

also

$$(2) \qquad \tau_{xz} = \frac{S}{d}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \tau_{yz} = \frac{S}{d}\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \sigma_z = 0.$$

Setzen wir diese Werte in die dritte der Gleichgewichtsbedingungen [Kap. XVII, S. 626, (12)] ein

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \varrho^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

so erhalten wir als Differentialgleichung der Membranbewegung

$$\frac{S}{d}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Hier ist ϱ die Masse des Membranmaterials pro Volumeinheit, also

(3) $$\mu=\varrho d$$

die Masse pro Flächeneinheit. Schreiben wir zur Abkürzung

(4) $$c^2=\frac{S}{\mu}=\frac{S}{\varrho d},\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\Delta w,$$

so wird die Differentialgleichung

(5) $$c^2\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Zu der Differentialgleichung kommen die Randbedingungen und die Anfangsbedingungen hinzu. Am Rande soll die Membran festgehalten sein, d. h. längs der Randkurve ist

(6) $$\text{für alle Werte } t\geqq 0,\qquad w=0.$$

Zu Beginn der Bewegung ($t=0$) sei die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit der Membran gegeben, d. h. es sei

(7) $$\text{für } t=0,\quad w=f(x,y),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=g(x,y)$$

gegeben.

Genau wie bei den Saitenschwingungen, bemerken wir wieder zunächst, daß wegen der Homogenität der Differentialgleichung und der Randbedingung eine aus irgendwelchen Partikularlösungen w_1, w_2, w_3 usw. mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2, c_3 usw. gebildete Reihe $w=\sum c_n w_n$ wieder die Differentialgleichung und die Randbedingung befriedigt. Wir suchen deshalb wieder unter vorläufigem Verzicht auf die Anfangsbedingungen periodische Partikularlösungen

(8) $$w(x,y,t)=W(x,y)\cos\nu t\quad(\text{oder }\sin\nu t),$$

aus denen wir dann eine Reihe bilden, in der wir die Koeffizienten so bestimmen, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Gehen wir mit dem Ansatz (8) in die Differentialgleichung (5) ein, so erhalten wir für die Funktion $W(x,y)$, die uns für jeden Punkt die Amplitude liefert, mit welcher er die harmonische Schwingung ausführt, die Differentialgleichung

$$c^2\Delta W+\nu^2 W=0$$

bzw. mit der Abkürzung

(9) $$\lambda^2=\nu^2/c^2,$$

(10) $$\Delta W+\lambda^2 W=0.$$

Genau wie bei der Saite werden wir auch hier sehen, daß die Membran nur mit ganz bestimmten Frequenzen ν periodische Schwingungen ausführen kann, d. h. daß die Differentialgleichung $\Delta w + \lambda^2 w = 0$ nur für ganz bestimmte Werte von λ^2, die wir als die „Eigenwerte des Randwertproblems“ bezeichnen wollen, am Rande verschwindende Lösungen hat, die nicht identisch Null sind. Es wird sich also darum handeln, die „Eigenwerte“ zu bestimmen und die zugehörigen Funktionen $W(x, y)$, die sogenannten „Eigenfunktionen“ zu ermitteln. Wir beginnen mit einem speziellen Beispiel.

2. Die rechteckige Membran. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Membran durch ein Rechteck von den Seiten a und b begrenzt ist, und legen den Koordinatenanfang in eine Ecke dieses Rechtecks, die x-Achse in die Seite a, die y-Achse in die Seite b. Suchen wir partikulare Lösungen der Differentialgleichung, die aus einem Produkt einer Funktion von x und einer Funktion von y bestehen,

$$W = p(x)q(y),$$

so finden wir unmittelbar, daß jedes der Produkte

(11) $\sin\alpha x \sin\beta y, \quad \sin\alpha x \cos\beta x, \quad \cos\alpha x \sin\beta y, \quad \cos\alpha x \cos\beta y$

der Differentialgleichung genügt, wenn die Konstanten α und β der Bedingung

(12) $$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2$$

entsprechen. Von diesen vier partikularen Lösungen hat nur die erste die Eigenschaft, an den Randlinien $x = 0$ und $y = 0$ des Rechtecks zu verschwinden. Soll sie auch an den Randlinien $x = a$ und $y = b$ verschwinden, so muß

$$\sin\alpha a = 0, \quad \sin\beta b = 0$$

oder

(13) $$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

sein, wo m und n positive ganze Zahlen sind. Aus (12) ergibt sich dann für λ der Ausdruck

(14) $$\lambda = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Multiplizieren wir dies mit c, so erhalten wir alle möglichen Frequenzen, mit denen das Rechteck schwingen kann, wenn wir für m und n der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen einsetzen. Zu diesen Frequenzen gehören die Schwingungszeiten

(15) $$T_{m,n} = \frac{2\pi}{\nu_{m,n}} = \frac{2}{c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}.$$

Den tiefsten Ton der Membran erhalten wir, wenn wir $m = n = 1$ setzen. Die höheren Töne bezeichnen wir als „Obertöne".

Die allgemeine Schwingung einer Membran setzt sich aus den gefundenen Partikularlösungen in Reihenform zusammen

$$(16) \qquad w = \sum_1^\infty \sum_1^\infty \{A_{m,n} \cos \nu_{m,n} t + B_{m,n} \sin \nu_{m,n} t\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

wo $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ Konstante sind, welche so zu bestimmen sind, daß für $t = 0$ eine gegebene Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit (7)

$$w = f(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = g(x, y)$$

angenommen werden. Es muß also

$$(17) \qquad \begin{cases} f(x, y) = \sum_1^\infty \sum_1^\infty A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ g(x, y) = \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_{m,n} \nu_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{cases}$$

d. h. die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ sind in Fouriersche Doppelreihen (s. 1. Bd., IV, § 4, 5) zu entwickeln, was für die Koeffizienten die Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{cases} A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy, \\ B_{m,n} = \frac{4}{ab\nu_{m,n}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy \end{cases}$$

ergibt.

Harmonische Obertöne. Wir fragen, welche unter den einfachen Tönen der Membran untereinander harmonisch sind oder, mit anderen Worten, welche der durch $\nu_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$ dargestellten Werte von ν untereinander in rationalem Verhältnis stehen.

Es seien also ν, ν' zwei solche Werte, die den ganzen Zahlen m, n und m', n' entsprechen, und $\nu : \nu' = h : h'$, worin h und h' positive ganze Zahlen sind, die wir ohne gemeinschaftlichen Teiler annehmen können. Dann ist

$$(19) \qquad h'^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) = h^2 \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}\right),$$

also

$$(19') \qquad \frac{h'^2 m^2 - h^2 m'^2}{a^2} = -\frac{h'^2 n^2 - h^2 n'^2}{b^2},$$

und wenn nun a^2 und b^2 nicht in einem rationalen Verhältnis stehen, so müssen beide Seiten von (19) verschwinden, also

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{h}{h'}, \tag{20}$$

wenn wir m und n ohne gemeinschaftlichen Teiler annehmen, so folgt hieraus, wenn l eine ganze Zahl ist,

$$m' = l\,m, \quad n' = l\,n, \tag{21}$$

und es ergeben sich also Reihen von harmonischen Tönen, aus

$$\nu = \nu^*, \quad 2\,\nu^*, \quad 3\,\nu^*, \quad \nu^* = \pi\,c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \tag{22}$$

wenn ν^* dadurch gebildet ist, daß für m, n in (22) irgend zwei positive teilerfremde Zahlen genommen werden. Zu jedem solchem ν^* gehört also eine Reihe (22) von harmonischen Tönen, für welche wir ν^* als den „relativen Grundton“ bezeichnen. Den absolut tiefsten Ton (Grundton der Membran) erhalten wir, wenn wir $m = 1$ und $n = 1$ setzen.

Nehmen wir nun irgend ein anderes Paar teilerfremder Zahlen m_1, n_1, so erhalten wir eine zweite Reihe möglicher harmonischer Töne

$$\nu = \nu_1^*, \quad 2\,\nu_1^*, \quad 3\,\nu_1^*$$

und so fort, und wenn a^2, b^2 nicht in rationalem Verhältnis stehen, so sind je zwei Töne verschiedener Reihen nicht harmonisch.

Anders ist es aber, wenn a^2 und b^2 in einem rationalen Verhältnis stehen, dann können auch die Töne verschiedener Reihen harmonisch sein. Setzen wir unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \alpha : \beta, \tag{23}$$

worin α, β positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, so lautet die Bedingung (19) für die Harmonie zweier Reihen (ν) und (ν')

$$h'^2(\alpha\,m^2 + \beta\,n^2) = h^2(\alpha\,m'^2 + \beta\,n'^2). \tag{24}$$

Wenn irgend zwei Töne einer Reihe (ν) untereinander harmonisch sind, so sind je zwei Töne dieser Reihe harmonisch, und wenn also ein Ton der Reihe (ν) mit einem der Reihe (ν') harmonisch ist, so ist jeder Ton der einen Reihe mit jedem Ton der anderen harmonisch. Wir nennen dann die beiden Reihen harmonisch. Suchen wir also alle zu einer bestimmten Reihe (ν) harmonischen Reihen auf, so können wir in (ν') m' und n' teilerfremd annehmen und erhalten, wenn wir

$$\begin{cases} \alpha\,m^2 + \beta\,n^2 = \gamma, \\ h\,m' = x, \quad h\,n' = y, \quad h' = z \end{cases} \tag{25}$$

setzen, aus (24) die Gleichung

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2 \tag{26}$$

und es kommt also auf die Lösung der zahlentheoretischen Aufgabe an:

Alle Lösungen der unbestimmten Gleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2$ in ganzen Zahlen x, y, z zu finden, wenn α, β, γ gegebene ganze Zahlen sind.

Die Lösung dieser Aufgabe ist dadurch vereinfacht, daß man eine Lösung von (26) kennt, nämlich $z = 1$, $x = m$, $y = n$.

Um alle einfachen Töne der Membran zu finden, die untereinander gleiche Schwingungsdauer haben, hat man also alle ganzzahligen Werte x, y zu ermitteln, die dem Ausdruck

$$\alpha x^2 + \beta y^2$$

einen und denselben ganzzahligen Wert γ erteilen [worin α, β die aus (23) zu entnehmenden ganzen Zahlen sind], oder, wie man sich in der Zahlentheorie ausdrückt, alle Darstellungen einer Zahl γ durch die quadratische Form $\alpha x^2 + \beta y^2$ zu finden. Die Anzahl dieser Darstellungen ist immer endlich, weil es nur eine endliche Anzahl ganzer Zahlen geben kann, für die die positive ganze Zahl $\alpha x^2 + \beta y^2$ eine gegebene Grenze nicht überschreitet. Wir wollen hier auf diese zahlentheoretische Aufgabe nicht näher eingehen, für die wir auf den vierten Abschnitt von Dirichlet-Dedekinds Vorlesungen über Zahlentheorie verweisen, und begnügen uns damit, für den besonderen Fall $\alpha = \beta = 1$, also für die quadratische Membran, ein Paar einfache Beispiele anzuführen:

$$\begin{aligned} \gamma = \quad 2 &= 1^2 + 1^2, \\ 5 &= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2, \\ 10 &= 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 65 &= 1^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2 = 7^2 + 4^2. \end{aligned}$$

Knotenlinien. Eine einfache Schwingung der rechteckigen Membran hat die Form

$$w = \{A \cos \nu_{m,n} t + B \sin \nu_{m,n} t\} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}.$$

Durch eine passende Verfügung über den Nullpunkt der Zeitmessung können wir dies stets auf die Form bringen

$$w = C \sin \nu_{m,n} t \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \tag{27}$$

wo C die Amplitude der Schwingung genannt wird. Ist t ein ganzes Vielfaches von $\frac{\pi}{\nu_{m,n}} = \frac{T_{m,n}}{2}$, so ist $w = 0$, d. h. alle Punkte der Membran

gehen gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage. Außerdem bleibt für alle Werte von t $w = 0$, wenn x oder y ganzzahlige Vielfache von

$$\frac{a}{m} \text{ oder } \frac{b}{n}$$

sind. Wir haben also zwei Systeme gerader Linien, die den Seiten des Rechteckes parallel sind, in denen die schwingende Membran dauernd in Ruhe bleibt. Solche Linien heißen „Knotenlinien“; sie teilen die rechteckige Membran in mn rechteckige Felder von den Seitenlängen $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ und w ist in benachbarten Feldern zu jeder Zeit abwechselnd positiv und negativ.

Wenn nun bei einer zusammengesetzten Schwingung, die durch eine Summe mehrerer Ausdrücke

$$w = \sum C_{m,n} \sin \nu_{m,n} t \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

dargestellt wird, Knotenlinien, d. h. Linien, in denen w dauernd gleich Null ist, vorhanden sein sollen, so muß der von der Zeit abhängige Faktor $\sin \nu_{m,n} t$ in allen Gliedern der Summe derselbe sein. Es muß also die Schwingungsdauer in allen Gliedern der Summe dieselbe sein. Es kann dies, wie wir gesehen haben, nur vorkommen, wenn a und b in rationalem Verhältnis stehen, und man erhält unter dieser Voraussetzung als Bedingung für die Knotenlinien:

$$\sum C_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0, \tag{28}$$

worin sich, wenn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \alpha : \beta$ ist, die Summe auf alle Werte m, n erstrecken kann, für die die Summe $\alpha m^2 + \beta n^2$ denselben Wert γ hat. Da jedes Glied der Summe mit einem beliebigen Faktor C multipliziert ist, so ist in der Gl. (28) eine große Menge von möglichen Gestalten der Knotenlinien, oder wie man auch sagt, von „Klangfiguren“ enthalten, deren Diskussion aber nicht ganz einfach ist.

Als Beispiel geben wir einige Figuren für ein Quadrat von der Seitenlänge $a = b = \pi$. Für $\lambda^2 = 10$ bzw. $\nu^2 = 10\,c^2$ erhalten wir die beiden Lösungen

$$\sin \nu t \sin x \sin 3y$$

und

$$\sin \nu t \sin 3x \sin y.$$

Setzen wir sie mit beliebigen Koeffizienten zusammen:

$$w = \sin \nu t \{A \sin x \sin 3y - B \sin 3x \sin y\}$$

oder

$$w = A \sin \nu t \{\sin x \sin 3y - \mu \sin 3x \sin y\},$$

so erhalten wir als Knotenlinien die Kurven

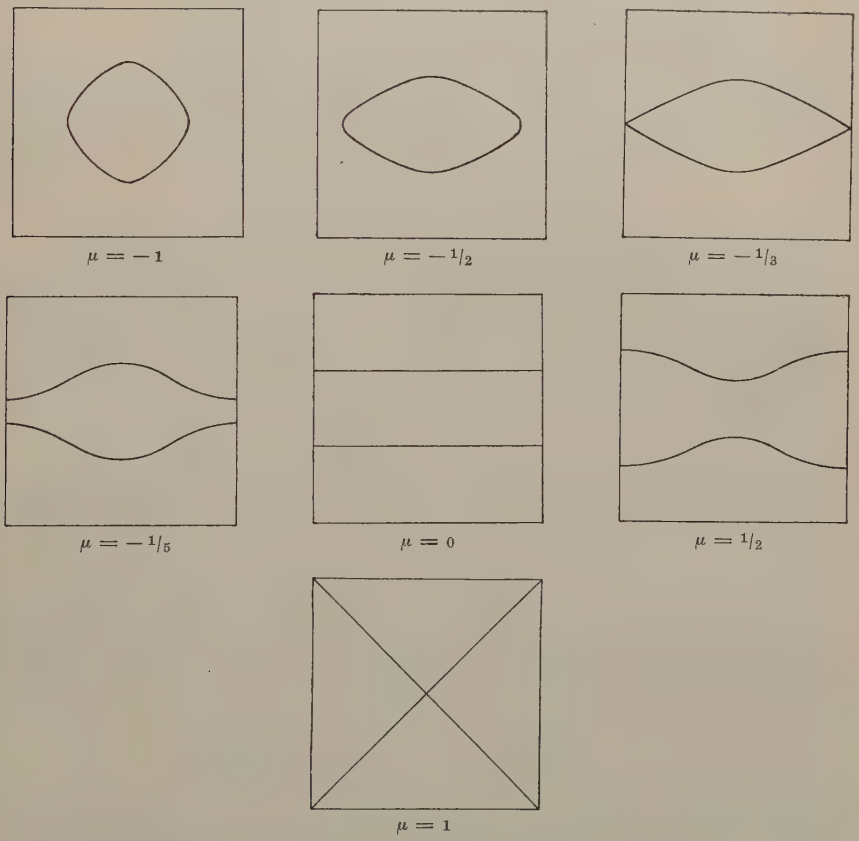
$$\sin x \sin 3y = \mu \sin 3x \sin y$$

bzw. mit elementarer Umformung

$$\cos 2y + \tfrac{1}{2} = \mu \{\cos 2x + \tfrac{1}{2}\}.$$

Diese Knotenlinien sind in den Figuren für $\mu = -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}; 0; \frac{1}{2}; 1$ gezeichnet. Nehmen wir statt dieser Werte die reziproken,

Fig. 77.



so vertauschen sich x und y. Alle gezeichneten Kurven gehen durch die Punkte $x = \frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$, $y = \frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$, für welche beide Seiten der Knotenliniengleichung verschwinden.

3. Kreisförmige Membran. Wenn die Membran durch einen Kreis begrenzt ist, so führt man zur Integration der Differentialgleichung (10)

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0$$

Polarkoordinaten r und ϑ in der xy-Ebene ein. Die Differentialgleichung nimmt dann in diesen Koordinaten (1. Bd., II, § 3, S. 76) die Form

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} + \lambda^2 W = 0 \tag{29}$$

an. Hat die Membran die Gestalt eines vollen Kreises vom Radius a, so muß W endlich bleiben, wenn r die Werte von 0 bis a durchläuft, und muß dieselben Werte wieder annehmen, wenn ϑ um 2π wächst. Wir werden also die Partikularlösungen in der Form

$$W = R(r)\cos m\vartheta \quad \text{oder} \quad W = R(r)\sin m\vartheta \tag{30}$$

annehmen, wo m eine ganze Zahl und R eine Funktion von r allein ist, für die sich aus (29) die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

oder

$$\frac{d^2R}{d(\lambda r)^2} + \frac{1}{\lambda r}\frac{dR}{d(\lambda r)} + \left(1 - \frac{m^2}{(\lambda r)^2}\right)R = 0 \tag{31}$$

ergibt. Man erkennt hierin die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen m-ter Ordnung (1. Bd., VIII, § 3); die Funktion $J_m(\lambda r)$ ist die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, die für $r = 0$ endlich bleibt.

Es ist also, wenn A und B Konstanten sind,

$$W = AJ_m(\lambda r)\cos m\vartheta + BJ_m(\lambda r)\sin m\vartheta \tag{32}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (10). Damit die Randbedingung $W = 0$ am Rande des Kreises, d. h. für $r = a$ erfüllt ist, muß

$$J_m(\lambda a) = 0 \tag{33}$$

sein. Diese transzendente Gleichung hat nur reelle Wurzeln (1. Bd., VIII, § 3, S. 337), von denen wir nur die positiven zu berücksichtigen brauchen. Wir wollen sie, der Größe nach geordnet, mit ξ_{m1}, ξ_{m2} usw. bezeichnen. Dann haben wir für λ einen der Werte

$$\lambda_{m,n} = \frac{\xi_{m,n}}{a} \quad \text{bzw.} \quad \nu_{m,n} = \frac{c\,\xi_{m,n}}{a} \tag{34}$$

zu setzen und wir erhalten

$$W_{m,n} = \{A_{m,n}\cos m\vartheta + B_{m,n}\sin m\vartheta\}\, J_m\left(\frac{\xi_{m,n}\, r}{a}\right). \tag{35}$$

Die allgemeine Schwingung der Membran setzt sich aus diesen Partikularlösungen in der Form

$$\left\{\begin{aligned} w = \sum_0^\infty \sum_1^\infty & J_m\left(\frac{\xi_{m,n}\, r}{a}\right)\{(A_{m,n}\cos m\vartheta + B_{m,n}\sin m\vartheta)\cos \nu_{m,n} t \\ & + (A'_{m,n}\cos m\vartheta + B'_{m,n}\sin m\vartheta)\sin \nu_{m,n} t\} \end{aligned}\right. \tag{36}$$

zusammen.

Um die Lösung einem gegebenen Anfangszustande anzupassen, muß über die willkürlichen Konstanten A, A' und B, B' noch passend verfügt werden. Soll z. B. zur Zeit $t = 0$ $w = f(r, \vartheta)$ sein, so muß

$$(37) \qquad f(r, \vartheta) = \sum_0^\infty \sum_1^\infty J_m(\lambda_{m,n} r)\{A_{m,n} \cos m\vartheta + B_{m,n} \sin m\vartheta\}$$

sein. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\cos m\vartheta$ und integrieren von 0 bis 2π, so erhalten wir

$$(38) \qquad \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta) \cos m\vartheta \, d\vartheta = \pi \sum_{n=1}^\infty J_m(\lambda_{m,n} . r) A_{m,n} \text{ (bzw. } 2\pi \sum \text{für } m = 0),$$

multiplizieren wir jetzt noch mit $r J_m(\lambda_{m,h} r)$ und integrieren von 0 bis a, so ist

$$(39) \qquad \int_0^a J_m(\lambda_{m,n} . r) J_m(\lambda_{m,h} . r) r \, dr = 0, \quad \text{für } n \neq h.$$

Diese Gleichungen sind (1. Bd., IX, § 3) für $J_0(\lambda r)$ bewiesen, gelten aber für jeden Index m. Wir sparen diesen Beweis, da er als Spezialfall der später zu besprechenden Orthogonalitätsbedingungen erscheinen wird. Es ergibt sich also

$$(40) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta) \cos m\vartheta J_m(\lambda_{m,h} . r) r \, dr \, d\vartheta = A_{m,h} \int_0^a J_m^2(\lambda_{m,h} r) r \, dr;$$

setzen wir hier noch

$$\int_0^a J_m^2(\lambda_{m,h} r) r \, dr = \frac{a^2}{2} J_{m+1}(\lambda_{m,h} a),$$

so erhalten wir

$$(41) \qquad A_{m,h} J_{m+1}(\lambda_{m,h} a) = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta) \cos m\vartheta J_m(\lambda_{m,h} r) r \, dr \, d\vartheta$$

und ebenso

$$(42) \qquad B_{m,h} J_{m+1}(\lambda_{m,h} a) = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta) \sin m\vartheta J_m(\lambda_{m,h} r) r \, dr \, d\vartheta.$$

Die Bestimmung der Konstanten A' und B' erfolgt in gleicher Weise aus der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit.

4. Analytische Eigenschaften der Lösungen. Zur analytischen Untersuchung unserer Differentialgleichung bedienen wir uns der folgenden Formeln (vgl. 1. Bd., II, § 3), die aus dem Gaußschen Integralsatze gewonnen werden:

$$(43) \qquad \iint \operatorname{div} t \, dx \, dy = \int t_\nu \, ds \,^1)$$

[1]) Hier und im folgenden sind Doppelintegrale stets über die von der Membran bedeckte Fläche, einfache Integrale über deren Rand zu nehmen.

(Flächenintegral über die Divergenz = Randintegral über die Normalkomponente des Vektors), wo, wenn t_x und t_y die Komponenten des Vektors t sind,

$$\operatorname{div} t = \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y}$$

und

$$t_\nu = t_x \cos(\nu, x) + t_y \cos(\nu, y)$$

ist. $\cos(\nu, x)$ und $\cos(\nu, y)$ sind die Richtungskosinus der äußeren Normalen ν gegen die Achsen.

Ist φ eine Funktion des Ortes, so bezeichnen wir durch $\operatorname{grad}\varphi$ den Vektor, dessen Komponenten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sind. Dann ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta\varphi \tag{44}$$

und die Normalkomponente in Richtung der äußeren Normalen wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\nu, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\nu, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}. \tag{45}$$

Ist ψ eine weitere Funktion des Ortes, so ist

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\varphi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ &= \psi\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \psi\Delta\varphi + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi, \end{aligned}\right. \tag{46}$$

wo $\operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi$ das skalare Produkt der Vektoren $\operatorname{grad}\varphi$ und $\operatorname{grad}\psi$ bedeutet.

Wenden wir den Gaußschen Integralsatz auf die letzte Gleichung an, so ergibt sich

$$\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, ds = \int\int \psi \Delta\varphi\, dx\, dy + \int\int \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi\, dx\, dy. \tag{47}$$

Vertauschen wir φ und ψ, so wird

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, ds = \int\int \varphi \Delta\psi\, dx\, dy + \int\int \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi\, dx\, dy \tag{48}$$

oder, wenn wir (48) von (47) abziehen [s. 1. Bd., XIV, § 1, (9)],

$$\int\int (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\, dx\, dy = \int\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) ds. \tag{49}$$

Für das Randintegral der rechten Seite wollen wir einen speziellen Fall betrachten, den wir unten brauchen werden. φ sei eine stetige Funktion mit stetigen ersten Differentialquotienten und ψ eine Funktion,

welche in einem Punkte P mit den Koordinaten $x = \xi$, $y = \eta$ logarithmisch unendlich wird, so daß

$$\psi = C \ln r + \gamma(x, y), \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \tag{50}$$

ist, wo γ stetige erste Differentialquotienten hat. Erstrecken wir das Randintegral über einen kleinen Kreis mit dem Radius ε um P und lassen ε gegen Null gehen, so erhalten wir das folgende Resultat:

$$\int \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) ds = C \int \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds + \int \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds - C \int \varphi \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} ds - \int \varphi \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} ds.$$

Im Limes $\varepsilon = 0$ verschwinden sämtliche Integrale bis auf das Integral

$$-C \int \varphi \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} ds.$$

Ist ν die in das Innere des Kreises weisende Normale, so wird

$$\frac{\partial \ln r}{\partial \nu} = -\frac{\partial \ln r}{\partial r} = -\frac{1}{r}, \quad ds = r\, d\vartheta$$

und es ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) ds = C \varphi(\xi, \eta) \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi C \varphi(\xi, \eta). \tag{51}$$

Die gewonnenen Formeln wenden wir nun zur Untersuchung der Differentialgleichung

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0$$

an. Wir zeigen zunächst, daß die Lösungen dieser Differentialgleichung analytische Funktionen sind. Zu diesem Zwecke setzen wir in der Formel (49) $\varphi = W$, wo W die zu untersuchende Lösung der Differentialgleichung ist. Für ψ nehmen wir diejenige Lösung derselben Differentialgleichung, welche im Punkte $P(x = \xi,\ y = \eta)$ logarithmisch unendlich wird und nur von der Entfernung r eines Punktes von P abhängt.

Sind in der Umgebung des Punktes P r und ϑ Polarkoordinaten, so wird die auf diese Koordinaten umgerechnete Differentialgleichung, wenn ψ von ϑ nicht abhängt,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \lambda^2 \psi = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen nullter Ordnung. Dieselbe hat zwei linear unabhängige Lösungen $J_0(\lambda r)$ und

$K_0(\lambda r)$[1]). J (im folgenden ist der Index bei J_0 und K_0 fortgelassen) ist für alle Werte von r stetig und beliebig oft differenzierbar. K wird für $r = 0$ logarithmisch unendlich, und zwar hat es die für ψ verlangte Form [s. 1. Bd., S. 328, Gl. (10a)]

$$K(\lambda r) = -\frac{2}{\pi} \ln r + \gamma,$$

wo γ stetige erste Differentialquotienten hat. Liegt jetzt der Punkt P innerhalb eines Gebietes G, in welchem W stetige Differentialquotienten hat, so wenden wir die Formel (49) auf ein Gebiet G' an, das wir aus G erhalten, indem wir den Punkt P durch einen kleinen Kreis von verschwindendem Radius ε aus G ausschließen. Da sowohl W als auch K der Differentialgleichung genügen, so ist

$$\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi = K \Delta W - W \Delta K = \lambda^2 (K W - W K) = 0$$

und Formel (49) ergibt

$$\int \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) ds = \int \left(K \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial K}{\partial \nu} \right) ds = 0, \tag{52}$$

wo wir das Randintegral über die gesamte Umrandung des Gebietes G' einschließlich des Kreises um P erstrecken müssen. Zerlegen wir es in die beiden Teilintegrale über den eigentlichen Rand von G und den Kreis um P, so liefert das letztere nach Gl. (51) den Beitrag

$$-\frac{2}{\pi} 2\pi W(\xi, \eta) = -4 W(\xi, \eta)$$

und wir erhalten

$$-4 W(\xi, \eta) + \int \left(K \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial K}{\partial \nu} \right) ds = 0$$

oder

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int \left(K \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial K}{\partial \nu} \right) ds. \tag{53}$$

Jetzt ist das Randintegral nur noch über den eigentlichen Rand von G zu erstrecken.

Die Formel (53) ist das Analogon zum Greenschen Satze der Potentialtheorie (s. 1. Bd., XIV, § 1, 3). Liegt der Punkt P außerhalb des Gebietes G, so ist die Ausschließung des Punktes P unnötig, der von dem kleinen Kreis herrührende Anteil fällt fort, und es ist (P außerhalb G)

$$\int \left(K \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial K}{\partial \nu} \right) ds = 0. \tag{54}$$

---

[1]) $K_0(\lambda r)$ ist die im 1. Bd., VIII, § 3, 2 eingeführte Besselsche Funktion zweiter Art, die dort mit Y_0 bezeichnet wurde.

Ebenso, wenn wir an Stelle der Besselschen Funktion K die Funktion erster Art J nehmen (P außerhalb oder innerhalb G)

$$\int \left(J \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial J}{\partial \nu} \right) ds = 0. \tag{55}$$

Liegt P innerhalb von G, so ist in (53) r von Null verschieden; da $K(\lambda r)$ für $r \neq 0$ beliebig oft differenzierbar ist, so folgt, daß auch W im Innern des Regularitätsgebietes beliebig oft differenzierbar ist, z. B.

$$4 \frac{\partial W}{\partial \xi} = \int \left\{ \frac{\partial K(\lambda r)}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial^2 K(\lambda r)}{\partial \xi \partial \nu} \right\} ds.$$

W ist also eine analytische Funktion von x und y.

Der Mittelwertsatz. Nehmen wir für G ein kreisförmiges Gebiet, so erhalten wir aus (53) einen Satz, der dem Mittelwertsatze der Potentialtheorie entspricht (s. 1. Bd., XVI, § 1, S. 535). r sei der Radius des Kreises. Dann ist für die Integration $K(\lambda r)$ eine Konstante, die Normalableitung wird

$$\frac{\partial K(\lambda r)}{\partial \nu} = \frac{\partial K(\lambda r)}{\partial r} = \lambda K'(\lambda r),$$

ferner $ds = r d\vartheta$. Damit erhalten wir aus (53) und (55), indem wir den Wert von W im Mittelpunkt durch den Index 0 kennzeichnen:

$$W_0 = \frac{1}{4} K(\lambda r) r \int_0^{2\pi} \frac{\partial W}{\partial \nu} d\vartheta - \frac{1}{4} \lambda K'(\lambda r) r \int_0^{2\pi} W d\vartheta, \tag{56}$$

$$0 = \frac{1}{4} J(\lambda r) r \int_0^{2\pi} \frac{\partial W}{\partial \nu} d\vartheta - \frac{1}{4} \lambda J'(\lambda r) r \int_0^{2\pi} W d\vartheta. \tag{57}$$

Diese Formeln gelten für eine beliebige Lösung W der Differentialgleichung. Wenden wir sie speziell auf die Funktion $J(\lambda r)$ an, so wird, da $J(0) = 1$ ist,

$$1 = \frac{\lambda \pi r}{2} \{ K(\lambda r) J'(\lambda r) - K'(\lambda r) J(\lambda r) \}. \tag{58}$$

Multiplizieren wir also (56) mit $J(\lambda r)$ und (57) mit $K(\lambda r)$ und subtrahieren, so folgt mit Rücksicht auf (58)

$$J(\lambda r) W_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W d\vartheta, \tag{59}$$

d. h. wir erhalten den Wert einer Funktion W im Mittelpunkt eines Kreises, indem wir den Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rande bilden und diesen durch $J(\lambda r)$ dividieren.

Wir können hieraus schließen, daß Punkte, in denen W verschwindet, niemals isoliert auftreten können. Denn wenn W in einem Punkte P verschwindet, so muß es auf jedem Kreise um P sowohl positive als negative Werte annehmen, also mindestens zweimal Null werden. Also muß durch den Punkt P eine Kurve $W = 0$ hindurchgehen. Jede Kurve $W = 0$ scheidet also Flächenteile, in denen $W > 0$ ist, von solchen, in denen $W < 0$ ist.

Die Gleichung $J(\lambda r) = 0$ hat unendlich viele Wurzeln (s. 1. Bd., VIII, § 3, **10**), deren kleinste $\lambda r = 2{,}405$ ist. Setzen wir also $r = 2{,}405/\lambda$, so wird

$$\int W d\vartheta = 0.$$

Es muß also auf einer Kreisperipherie, deren Radius den Wert $2{,}405/\lambda$ hat, wo immer auch der Punkt P liegt, die Funktion W ihr Zeichen wechseln, vorausgesetzt, daß das Gebiet, in dem W gegeben ist, hinreichend groß ist.

5. Die Integralgleichung der schwingenden Membran. Setzen wir in Formel (49) für ψ die Greensche Funktion des logarithmischen Potentials (s. 1. Bd., XIII, § 3, **1** und XVI, § 2, **3**) ein, d. h. diejenige Potentialfunktion $G(\xi\eta, xy)$, welche im Punkte ξ, η eine logarithmische Singularität hat und am Rande des gegebenen Gebietes G verschwindet, so erhalten wir mit $\varphi = W$ das folgende Ergebnis:

$$\iint G(\xi\eta, xy) \Delta W \, dx\, dy = \int \left(G \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) ds. \tag{60}$$

Das Randintegral der rechten Seite ist wieder einerseits über den Rand des Gebietes zu erstrecken, andererseits über einen Kreis von verschwindendem Radius, durch den wir den singulären Punkt ξ, η ausschließen müssen. Da auf dem eigentlichen Rande sowohl $G(\xi\eta, xy)$ als W verschwinden, trägt dieser zu dem Randintegral nichts bei. Es bleibt nur der Anteil übrig, der von dem kleinen Kreise herrührt und dieser ist nach (51) $2\pi W(\xi\eta)$. Setzen wir noch $\Delta W = -\lambda^2 W$, so erhalten wir also

$$W(\xi, \eta) = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \iint G(\xi\eta, xy) W(x, y)\, dx\, dy. \tag{61}$$

Dies ist eine lineare homogene Integralgleichung für die Eigenfunktionen (s. 1. Bd., XII, § 3). Der Kern ist symmetrisch, da

$$G(\xi\eta, xy) = G(xy, \xi\eta) \tag{62}$$

ist (1. Bd., XVI, § 2, S. 542). Die Eigenwerte sind also alle reell. Daß sie auch positiv sind, beweisen wir, indem wir die Differentialgleichung beiderseits mit W multiplizieren und über das von der Membran bedeckte Gebiet integrieren:

$$\iint W \Delta W \, dx\, dy + \lambda^2 \iint W^2 dx\, dy = 0.$$

Nach Formel (47) wird, wenn wir $\varphi = \psi = W$ setzen,

$$\iint W \Delta W \, dx\, dy + \iint \operatorname{grad}^2 W \, dx\, dy = \int W \frac{\partial W}{\partial \nu} \, ds,$$

das Randintegral fällt fort, weil W auf dem Rande verschwindet. Es folgt $\iint W \Delta W \, dx\, dy = -\iint \operatorname{grad}^2 W \, dx\, dy$,

$$\lambda^2 = \frac{\iint \operatorname{grad}^2 W \, dx\, dy}{\iint W^2 \, dx\, dy}. \tag{63}$$

λ^2 ist also sicher positiv.

Die Theorie der Integralgleichungen (1. Bd., XII, § 3) liefert die folgenden Sätze. Es gibt eine unendliche Folge von Eigenwerten, für welche die Integralgleichung lösbar ist, die Differentialgleichung also eine am Rande verschwindende Lösung (Eigenfunktion) besitzt. Diese Eigenwerte und Eigenfunktionen bezeichnen wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ usw. bzw. W_1, W_2, W_3 usw. Sie sind nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, über den wir so verfügen wollen, daß

$$\iint W_n^2 \, dx\, dy = 1 \tag{64}$$

ist. Zwei Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind zueinander orthogonal, d. h. es ist

$$\iint W_n W_m \, dx\, dy = 0, \quad \text{für } n \neq m. \tag{65}$$

Gehören zu einem Eigenwerte mehrere Eigenfunktionen, so ist auch jede lineare Verbindung derselben $\sum c_\varrho W_\varrho$ eine Lösung der Differentialgleichung zum gleichen Eigenwert. Durch passende Bestimmung der c können wir erreichen, daß die Orthogonalitätsbedingungen (65) und die Normierung (64) auch in diesem Falle gelten.

Die allgemeine Bewegung der Membran setzt sich dann aus den zu den Eigenwerten gehörenden Partikularschwingungen zusammen:

$$w(x, y, t) = \sum_1^\infty W_n(x, y) \{A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t\}. \tag{66}$$

Die Koeffizienten A_n und B_n bestimmen sich mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung (65) und der Normierung (64) aus dem Anfangszustand. Soll z. B. zur Zeit $t = 0$ die Membran aus einer Anfangslage

$$W = f(x, y)$$

ohne Geschwindigkeit losgelassen werden, so müssen die Koeffizienten B verschwinden und es muß

$$f(x, y) = \sum A_n W_n(x, y) \tag{67}$$

sein. Multiplizieren wir rechts und links mit $W_h(x, y)$ und integrieren über das ganze Gebiet, so ergibt sich

$$A_h = \iint f(x, y) \, W_h(x, y) \, dx\, dy. \tag{68}$$

In gleicher Weise bestimmen sich aus einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit die Koeffizienten B.

Die Reihe $\sum A_n W_n(x, y)$ konvergiert absolut und gleichmäßig, wenn für die Anfangslage $f(x, y)$ eine Darstellung

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(xy, \xi\eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{69}$$

mit quadratisch integrablem p existiert. Physikalisch bedeutet dieses, daß die Anfangslage durch eine Belastung von $p\,\mathrm{kg/cm^2}$ hervorgerufen wird.

§ 4. Die Randwertaufgabe der schwingenden Membran als Problem der Variationsrechnung[1]).

1. Das Minimalproblem für den ersten Eigenwert. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Methoden der Variationsrechnung in ihrer Anwendung auf das Problem der schwingenden Membran zu erläutern und werden zu diesem Zwecke zunächst unsere Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0 \tag{1}$$

mit der Randbedingung

$$W = 0 \tag{2}$$

zu integrieren, als Variationsproblem formulieren. Wir betrachten zunächst die zu dem niedrigsten Eigenwert gehörige Lösung der Differentialgleichung und zeigen, daß sie die Minimaleigenschaft besitzt:

Unter allen am Rande verschwindenden, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen, für welche

$$J(W) = \int\int W^2\, dx\, dy = 1 \tag{3}$$

ist, das Integral

$$D(W) = \int\int \mathrm{grad}^2 W\, dx\, dy \tag{4}$$

zum Minimum zu machen.

Zur Lösung dieses Variationsproblems verfahren wir nach den klassischen Methoden der Variationsrechnung folgendermaßen. Wir nehmen an, W sei die Lösung dieses Minimalproblems. Außer W betrachten wir eine benachbarte Funktionenschar:

$$U = W + \xi\varphi(x, y) + \eta\psi(x, y). \tag{5}$$

Die Funktionen φ und ψ sind dabei willkürlich gewählt, nur müssen sie differenzierbar sein und die Randbedingung

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0 \tag{6}$$

[1]) H. Weber, Über die Integration der Differentialgleichung usw. Math. Ann. **1**, 1, 1868 (s. auch 1. Bd., XX. Kap.).

erfüllen. Für die folgende Rechnung werden sie, einmal gewählt, festgehalten. Das zum Minimum zu machende Integral ist dann nur noch eine Funktion von ξ und η:

$$(7)\quad \begin{cases} D(U) = \iint \operatorname{grad}^2 U\, dx\, dy = \iint \operatorname{grad}^2 W\, dx\, dy \\ \quad + 2\xi \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \varphi\, dx\, dy + 2\eta \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \psi\, dx\, dy \\ \quad + \xi^2 \iint \operatorname{grad}^2 \varphi\, dx\, dy + 2\xi\eta \iint \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi\, dx\, dy \\ \quad + \eta^2 \iint \operatorname{grad}^2 \psi\, dx\, dy, \end{cases}$$

ebenso das Integral

$$(8)\quad \begin{cases} J(U) = \iint U^2\, dx\, dy = \iint W^2\, dx\, dy + 2\xi \iint W\varphi\, dx\, dy \\ \quad + 2\eta \iint W\psi\, dx\, dy + \xi^2 \iint \varphi^2\, dx\, dy + 2\xi\eta \iint \varphi\psi\, dx\, dy \\ \quad + \eta^2 \iint \psi^2\, dx\, dy. \end{cases}$$

Unsere Minimalforderung verlangt, daß für die Funktion W, d. h. für $\xi = 0$, $\eta = 0$ unter der Nebenbedingung $J = 1$ D ein Minimum sein muß. Da φ und ψ fest gewählt sind, sind nur noch ξ und η veränderlich, und wir haben die gewöhnliche Minimumaufgabe, eine Funktion $D(\xi, \eta)$ unter der Nebenbedingung $J(\xi, \eta) = 1$ zum Minimum zu machen. Soll das Minimum für $\xi = 0$, $\eta = 0$ eintreten, so muß für $\xi = \eta = 0$

$$(9)\quad \frac{\partial D}{\partial \xi} = \lambda^2 \frac{\partial J}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial D}{\partial \eta} = \lambda^2 \frac{\partial J}{\partial \eta}$$

(λ^2 = Lagrangescher Faktor)

sein, d. h.

$$(10)\quad \begin{cases} \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \varphi\, dx\, dy = \lambda^2 \iint W\varphi\, dx\, dy, \\ \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \psi\, dx\, dy = \lambda^2 \iint W\psi\, dx\, dy. \end{cases}$$

Da am Rande φ und ψ verschwinden, werden die Integrale der linken Seite [s. Formel (47), § 3]:

$$(11)\quad \begin{cases} \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \varphi\, dx\, dy = -\iint \varphi \Delta W\, dx\, dy, \\ \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \psi\, dx\, dy = -\iint \psi \Delta W\, dx\, dy, \end{cases}$$

so daß die Minimalbedingung die Form

$$(12)\quad \begin{cases} \iint \varphi \{\Delta W + \lambda^2 W\}\, dx\, dy = 0, \\ \iint \psi \{\Delta W + \lambda^2 W\}\, dx\, dy = 0 \end{cases}$$

annimmt. Sollen diese beiden Gleichungen für jede mögliche Wahl von φ und ψ erfüllt sein, so muß

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0$$

sein. Wir sehen also, daß unsere Minimalaufgabe mit der Randwertaufgabe für die Gleichung der schwingenden Membran identisch ist. Der Wert des Minimalintegrals wird [vgl. wieder Formel (47), § 3], da am Rande $W = 0$ ist,

$$D(W) = \iint \operatorname{grad}^2 W\, dx\, dy = -\iint W \Delta W\, dx\, dy = \lambda^2 \iint W^2\, dx\, dy.$$

Nun sollte $\iint W^2\, dx\, dy = 1$ sein, es wird also

$$\lambda^2 = D(W) = \iint \operatorname{grad}^2 W\, dx\, dy. \tag{13}$$

Es ist also der Eigenwert unserer Differentialgleichung unmittelbar durch den Minimalwert des zum Minimum gemachten Integrals gegeben.

Bei dem hier eingeschlagenen Verfahren mußten wir die Nachbarfunktionen in der Form $U = W + \xi\varphi + \eta\psi$ schreiben, statt einfach $U = W + \xi\varphi$, weil sonst bei beliebiger Wahl von φ die Nebenbedingung nur einen Wert von ξ zugelassen hätte, so daß wir nach ξ nicht hätten differenzieren können.

Die Schwingung mit freiem Rande. Wir können noch fragen, wie die Lösung unseres Variationsproblems aussieht, wenn wir auf die Randbedingung $W = 0$ verzichten. Die Rechnung ist zunächst genau die gleiche wie oben, und wir erhalten wieder als Minimalbedingung

$$\begin{cases} \iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \varphi\, dx\, dy = \lambda^2 \iint W\varphi\, dx\, dy \\ \text{(und ebenso für } \psi\text{)}, \end{cases} \tag{14}$$

nur tritt bei der jetzt folgenden partiellen Integration ein Randintegral auf, da mit der Randbedingung $W = 0$ auch die Randbedingungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ fortgefallen sind. Wir erhalten also:

$$\iint \operatorname{grad} W \operatorname{grad} \varphi\, dx\, dy = -\iint \varphi \Delta W\, dx\, dy + \int \varphi \frac{\partial W}{\partial \nu}\, ds$$
$$= \lambda^2 \iint \varphi W\, dx\, dy$$

oder

$$\begin{cases} \iint \varphi \{\Delta W + \lambda^2 W\}\, dx\, dy = \int \varphi \dfrac{\partial W}{\partial \nu}\, ds, \\ \iint \psi \{\Delta W + \lambda^2 W\}\, dx\, dy = \int \psi \dfrac{\partial W}{\partial \nu}\, ds. \end{cases} \tag{15}$$

Hier können wir φ und ψ ganz beliebig wählen. Wählen wir sie speziell so, daß am Rande φ und ψ verschwinden, so folgt genau wie oben für das Innere des Gebietes die Differentialgleichung

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0.$$

Das Integral der linken Seite wird also auf alle Fälle zu Null und die Randintegrale müssen für sich Null werden, wie immer wir die Rand-

werte von φ und ψ auch wählen. Das ist offenbar nur dann möglich, wenn am Rande

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \tag{16}$$

ist. Auch in diesem Falle wird der Wert des Minimalintegrals gleich dem Eigenwert. Physikalisch entspricht dieser Fall einer Schwingung, bei welcher der Rand nicht festgehalten wird; die die Membran ausspannende Kraft S wirkt dabei auch während der Bewegung normal zur Randkurve parallel zu der Gleichgewichtsebene.

2. Die höheren Eigenwerte. Nehmen wir an, der erste Eigenwert und die erste Eigenfunktion (wieder für die Randbedingung $W = 0$) wären ermittelt, so können wir den zweiten Eigenwert und die zweite Eigenfunktion, von der wir wissen, daß sie zur ersten orthogonal ist,

$$O(W_1 W_2) = \int W_1 W_2 \, dx\, dy = 0 \tag{17}$$

durch das gleiche Variationsproblem wie oben bestimmen, wenn wir zu der Nebenbedingung $\int W_2^2 \, dx\, dy = 1$ noch die Orthogonalitätsbedingung (17) als weitere Nebenbedingung hinzufügen.

Neben der wahren Lösung W_2 betrachten wir wieder eine Funktionenschar, die wir mit drei Parametern ξ_1, ξ_2, ξ_3 und den beliebig, aber fest gewählten, am Rande verschwindenden Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 in der Form

$$U = W_2 + \sum \xi_\varrho \varphi_\varrho \tag{18}$$

ansetzen. Die Integrale $D(U)$, $J(U)$, $O(U)$ werden dann als Funktion von ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\left\{\begin{aligned} D(U) &= \iint \operatorname{grad}^2 U \, dx\, dy = \iint \operatorname{grad}^2 W_2 \, dx\, dy \\ &\quad + 2 \sum \xi_\varrho \iint \operatorname{grad} W_2 \operatorname{grad} \varphi_\varrho \, dx\, dy + \text{quadrat. Glieder}, \\ J(U) &= \iint U^2 \, dx\, dy = \iint W_2^2 \, dx\, dy \\ &\quad + 2 \sum \xi_\varrho \iint W_2 \varphi_\varrho \, dx\, dy + \cdots, \\ O(U) &= \iint W_1 U \, dx\, dy = \iint W_1 W_2 \, dx\, dy \\ &\quad + \sum \xi_\varrho \iint W_1 \varphi_\varrho \, dx\, dy + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Soll $D(W)$ wieder das Minimum liefern, so muß für $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$

$$\frac{\partial D}{\partial \xi_\varrho} = \lambda_2^2 \frac{\partial J}{\partial \xi_\varrho} + 2\mu \frac{\partial O}{\partial \xi_\varrho} \tag{20}$$

sein, wo λ_2^2 und 2μ die Lagrangeschen Faktoren der beiden Nebenbedingungen sind. Das ergibt

$$\iint \operatorname{grad} W_2 \operatorname{grad} \varphi_\varrho \, dx\, dy = \lambda_2^2 \iint W_2 \varphi_\varrho \, dx\, dy + \mu \iint W_1 \varphi_\varrho \, dx\, dy$$

oder nach partieller Integration

$$\iint \varphi_\varrho \{\Delta W_2 + \lambda_2^2 W_2 + \mu W_1\} dx\,dy = 0. \tag{21}$$

Soll dieses Integral wieder für beliebige Wahl von φ_1, φ_2, φ_3 verschwinden, so muß

$$\Delta W_2 + \lambda_2^2 W_2 + \mu W_1 = 0 \tag{22}$$

sein. Der Faktor μ wird Null, denn wenn wir die Gleichung mit W_1 multiplizieren und über die Membranfläche integrieren, so wird wegen der Randbedingungen $W_1 = W_2 = 0$

$$\iint (W_1 \Delta W_2 - W_2 \Delta W_1)\, dx\,dy = \int \Big(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial \nu} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial \nu}\Big) ds = 0,$$

also

$$\iint W_1 \Delta W_2\, dx\,dy = \iint W_2 \Delta W_1\, dx\,dy = -\lambda_1^2 \iint W_2 W_1\, dx\,dy = 0,$$

und folglich

$$\iint W_1 \{\Delta W_2 + \lambda_2^2 W_2 + \mu W_1\}\, dx\,dy = 0 = \mu \iint W_1^2\, dx\,dy = \mu,$$

d. h.

$$\mu = 0. \tag{23}$$

Unsere Minimalbedingung ist also tatsächlich identisch mit der Differentialgleichung. Der Wert des Minimalintegrals wird wieder gleich dem Eigenwert. Verzichten wir wieder auf die Randbedingung $W_2 = 0$, so wird die Lösung des Variationsproblems durch die Lösung der Differentialgleichung für die Randbedingung $\frac{\partial W_2}{\partial \nu} = 0$ gelöst.

In dieser Weise fortfahrend, können wir durch Rekursion die sämtlichen Eigenwerte und Eigenfunktionen durch ihre Minimaleigenschaften festlegen. Zu der Minimalforderung $\iint \operatorname{grad}^2 W\, dx\,dy =$ Minimum mit der Nebenbedingung $\iint W^2\, dx\,dy = 1$ treten für den n-ten Eigenwert noch die Orthogonalitätsbedingungen

$$\iint W_n W_h\, dx\,dy = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{24}$$

als weitere Nebenbedingungen hinzu. Der Wert des Minimalintegrals wird gleich dem betreffenden Eigenwert:

$$\lambda_n^2 = \iint \operatorname{grad}^2 W_n\, dx\,dy. \tag{25}$$

Unabhängige Bestimmung des n-ten Eigenwertes durch ein Maximum-Minimumproblem. Für allgemeine Untersuchungen ist die letzte Formulierung nicht sehr brauchbar, da sie nur eine rekurrierende Bestimmung der Eigenwerte zuläßt. Man kann aber durch die folgende Änderung des Variationsproblems zu einer direkten

Bestimmung des n-ten Eigenwertes kommen. Wir fragen nach dem Minimum des Integrals

$$D(U) = \iint \operatorname{grad}^2 U \, dx\, dy \tag{26}$$

bei der Nebenbedingung

$$J(U) = \iint U^2 \, dx\, dy = 1 \tag{27}$$

und der Randbedingung

$$U = 0, \tag{28}$$

wenn wir statt der Orthogonalitätsbedingungen (24) fordern, daß

$$\iint U f_h(x, y)\, dx\, dy, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \tag{29}$$

sein soll, wo die $f_h(x, y)$ beliebige, gegebene Funktionen von x und y sind. Dann können wir zeigen, daß der Wert des Minimums stets zwischen λ_1^2 und λ_n^2 liegen muß. Daß er oberhalb λ_1^2 liegen muß, ist selbstverständlich, denn λ_1^2 stellt das Minimum dar, wenn wir auf alle Orthogonalitätsbedingungen verzichten, kann also auch nicht unterschritten werden, wenn wir die Zahl der zulässigen Funktionen durch die Orthogonalitätsbedingungen einschränken. Daß das gesuchte Minimum unter λ_n^2 liegt, wird offenbar bewiesen sein, wenn wir eine einzige Funktion U angeben können, für welche bei allen Nebenbedingungen der Wert des Minimalintegrals kleiner als λ_n^2 bleibt, denn das Minimum muß tiefer liegen als jeder spezielle Wert, den wir für irgend eine Funktion ausrechnen. Diese Funktion U bilden wir als lineare Funktion der ersten n Eigenfunktionen

$$U = \sum_1^n c_\varrho W_\varrho(x, y). \tag{30}$$

Die Konstanten c_ϱ bestimmen wir so, daß die Nebenbedingungen (29) und die Bedingung (27) erfüllt sind. Das ist sicher möglich, denn die Gleichungen

$$\iint U f_h(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\varrho=1}^n c_\varrho \iint W_\varrho f_h \, dx\, dy = 0, \quad h = 1, 2, \ldots, n-1$$

stellen $n-1$ lineare homogene Gleichungen dar, die durch n Größen c auf unendlich viel Arten erfüllt werden können. Durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor wird dann erreicht, daß auch noch

$$J = \iint U^2 \, dx\, dy = \sum c_\varrho^2 = 1 \tag{31}$$

ist.

Bilden wir nun $\iint \operatorname{grad}^2 U \, dx\, dy$, so erhalten wir

$$\iint \operatorname{grad}^2 U \, dx\, dy = \sum_1^n c_\varrho^2 \lambda_\varrho^2, \tag{32}$$

und dies ist, da λ_1 bis λ_{n-1} kleiner als λ_n ist:

$$\iint \operatorname{grad}^2 U\, dx\, dy \leqq \lambda_n^2 \sum c_\varrho^2 = \lambda_n^2. \tag{33}$$

Die obere Grenze λ_n^2 wird dann erreicht, wenn wir die Funktionen f_1 bis f_{n-1} gleich den ersten $n-1$ Eigenfunktionen nehmen. Wir können also den n-ten Eigenwert als das Maximum aller Minima bezeichnen, welche bei irgendwelchen $n-1$ Orthogonalitätsbedingungen angenommen werden.

3. Folgerungen aus den Minimaleigenschaften. Aus den Minimaleigenschaften können wir für die zum niedrigsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion einige Folgerungen ziehen, die wir hier zusammenstellen wollen. Zunächst zeigen wir, daß die erste Eigenfunktion keine Knotenlinien aufweist, d. h. daß sie im Innern des von der Membran bedeckten Gebietes G nicht verschwindet. Die erste Eigenfunktion macht bei gegebenem $J(W) = \iint W^2\, dx\, dy = 1$ das Integral $D(W) = \iint \operatorname{grad}^2 W\, dx\, dy$ zum Minimum. Wenn wir also zeigen, daß wir für irgend eine Eigenfunktion, welche eine Knotenlinie besitzt, eine benachbarte Funktion U finden können, für welche bei festbleibendem J das Integral $D(U)$ kleiner wird als für W, so wird unser Satz bewiesen sein, denn es ist dann gezeigt, daß diese Eigenfunktion das Variationsproblem der ersten Eigenfunktion sicher nicht löst, daß sie also nicht die erste Eigenfunktion sein kann.

Wir haben früher gesehen (s. S. 716), daß eine Knotenlinie stets Gebiete mit positivem W von Gebieten mit negativem W trennt. Wir bezeichnen die Gebiete, wo W positiv ist, mit I, die, wo es negativ ist, mit II. Nun ersetzen wir zunächst die Funktion W durch ihren Absolutwert

$$W' = |W|, \tag{34}$$

d. h. wir drehen überall da, wo W negativ ist, das Vorzeichen um. Dann haben die Integrale J und D für W und W' offenbar den gleichen Wert, da die Funktionen und ihre Ableitungen in D und J nur quadratisch vorkommen.

Um nun eine Funktion U zu finden, welche bei festem

$$J(U) = J(W) = J(W') = 1 \tag{35}$$

einen Wert des Minimalintegrals

$$D(U) < D(W') = D(W) \tag{36}$$

liefert etzen wir U in der Form

$$U = W' + \xi\varphi + \eta\psi$$

an, wo φ und ψ beliebige, am Rande der Membran verschwindende, stetig differenzierbare Funktionen sein mögen. ξ und η sind zwei Para-

meter, über die wir noch verfügen werden. Sie sind dadurch eingeschränkt, daß wir verlangen, daß $J(U) = J(W')$ sein soll, d. h.

$$\iint W'^2\,dx\,dy = \iint W'^2\,dx\,dy + 2\xi \iint W'\varphi\,dx\,dy + 2\eta \iint W'\psi\,dx\,dy + \iint (\xi\varphi + \eta\psi)^2\,dx\,dy$$

oder

$$(37)\quad \begin{cases} 0 = 2\xi \iint W'\varphi\,dx\,dy + 2\eta \iint W'\psi\,dx\,dy + \xi^2 \iint \varphi^2\,dx\,dy \\ \qquad + 2\xi\eta \iint \varphi\psi\,dx\,dy + \iint \psi^2\,dx\,dy. \end{cases}$$

Sind φ und ψ gegeben, so können wir uns in einer $\xi\eta$-Ebene die zulässigen Werte von ξ und η aufzeichnen. Sie liegen auf einer durch den Nullpunkt gehenden Ellipse, wenn die Funktionen φ und ψ so gewählt sind, was wir immer annehmen können, daß nicht gleichzeitig $\iint W'\varphi\,dx\,dy$ und $\iint W'\psi\,dx\,dy = 0$ ist. Wir bemerken vor allem, daß wir stets beliebig kleine Werte ξ und η finden können, welche (37) noch erfüllen.

Berechnen wir nun das Integral $D(U)$, so erhalten wir

$$(38)\quad \begin{cases} D(U) = \iint \operatorname{grad}^2 U\,dx\,dy = \iint \operatorname{grad}^2 W'\,dx\,dy \\ \qquad + 2\iint \operatorname{grad} W' \operatorname{grad}(\xi\varphi + \eta\psi)\,dx\,dy \\ \qquad + \iint \operatorname{grad}^2(\xi\varphi + \eta\psi)\,dx\,dy. \end{cases}$$

Führen wir hier eine partielle Integration aus, so müssen wir die auftretenden Randintegrale um die Gebiete I und II gesondert integrieren und erhalten

$$(39)\quad \begin{cases} \iint \operatorname{grad} W' \operatorname{grad}(\xi\varphi + \eta\psi)\,dx\,dy = -\iint (\xi\varphi + \eta\psi)\,\Delta W'\,dx\,dy \\ \qquad + \int\limits_{\mathrm{I}} (\xi\varphi + \eta\psi)\,\frac{\partial W'_{\mathrm{I}}}{\partial \nu_{\mathrm{I}}}\,ds + \int\limits_{\mathrm{II}} (\xi\varphi + \eta\psi)\,\frac{\partial W'_{\mathrm{II}}}{\partial \nu_{\mathrm{II}}}\,ds. \end{cases}$$

Die Randintegrale sind, da am Rande der Membran $\varphi = \psi = 0$ sein sollte, nur noch über die die Gebiete I und II trennende Knotenlinie zu nehmen. Da W' aus dem ursprünglichen W dadurch hervorgegangen war, daß das Vorzeichen von W in den Gebieten II in ein positives verwandelt wurde, so hat W' längs der Knotenlinie einen Sprung in der Normalableitung, und die Anteile der Randintegrale, welche von den Gebieten I und II herrühren, heben sich nicht gegeneinander fort. Berücksichtigen wir noch, daß $\Delta W' = -\lambda^2 W'$ ist, so wird

$$(40)\quad \begin{cases} D(U) = D(W') + 2\lambda^2 \iint W'(\xi\varphi + \eta\psi)\,dx\,dy \\ \qquad + \iint \operatorname{grad}^2(\xi\varphi + \eta\psi)\,dx\,dy \\ + \int\limits_{\mathrm{I}} (\xi\varphi + \eta\psi)\,\frac{\partial W'_{\mathrm{I}}}{\partial \nu_{\mathrm{I}}}\,ds + \int\limits_{\mathrm{II}} (\xi\varphi + \eta\psi)\,\frac{\partial W'_{\mathrm{II}}}{\partial \nu_{\mathrm{II}}}\,ds. \end{cases}$$

Ziehen wir hiervon die mit λ^2 multiplizierte Gl. (37) ab, so ergibt sich

$$(41)\quad \begin{cases} D(U)-D(W) = \int\limits_{\mathrm{I}} (\xi\varphi+\eta\psi)\dfrac{\partial W_{\mathrm{I}}'}{\partial \nu_{\mathrm{I}}}\,ds + \int\limits_{\mathrm{II}} (\xi\varphi+\eta\psi)\dfrac{\partial W_{\mathrm{II}}'}{\partial \nu_{\mathrm{II}}}\,ds \\ \qquad + \iint \operatorname{grad}^2(\xi\varphi+\eta\psi)\,dx\,dy - \lambda^2 \iint (\xi\varphi+\eta\psi)^2\,ds. \end{cases}$$

Wählen wir jetzt ξ und η so klein, daß die quadratischen Glieder in dem Ausdruck für $D(U) - D(W)$ das Vorzeichen nicht mehr beeinflussen können, so ist das Vorzeichen der Randintegrale maßgebend für den Wert der Differenz. Da nun aber die Vorzeichen von ξ und η gleichzeitig gewechselt werden können, so können wir der rechten Seite durch passende Wahl hinreichend kleiner ξ und η ein beliebiges Vorzeichen geben. D. h. wir können tatsächlich eine Funktion U finden, für welche bei gleichem $J(U) = J(W)$ $D(U) < D(W)$ ist, wie zu beweisen war.

Aus dem eben Bewiesenen können wir schließen, daß zu dem ersten Eigenwert stets nur eine einzige Eigenfunktion gehören kann. Gäbe es nämlich zwei Eigenfunktionen W_1 und W_2, so wäre ihre Differenz ebenfalls eine Eigenfunktion. Nun kann, da $\iint W_1^2\,dx\,dy = \iint W_2^2\,dx\,dy = 1$ ist, W_2 nicht überall kleiner oder überall größer sein als W_1. Die Differenz $W_2 - W_1$ wäre also eine Eigenfunktion mit Knotenlinien, könnte also nach dem oben Bewiesenen nicht zum kleinsten Eigenwert gehören.

4. Das Ritzsche Verfahren. Elliptische Membran. Eine direkte Methode zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen auf Grund ihrer Minimaleigenschaften verdankt man Ritz. Wir wollen hier nur den Rechnungsgang andeuten; bezüglich der Untersuchung über die Konvergenz der Methode verweisen wir auf Bd. 1, XX, S. 679.

Wir benutzen unmittelbar das Variationsproblem, aus allen am Rande verschwindenden stetigen und differenzierbaren Funktionen diejenige herauszusuchen, für welche $\iint W^2\,dx\,dy = 1$ ist und $\iint \operatorname{grad}^2 W\,dx\,dy$ ein Minimum wird. Haben wir eine Reihe von Funktionen $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$ usw., welche auf dem Rande verschwinden, und welche so beschaffen sind, daß wir irgend eine am Rande verschwindende stetige und differenzierbare Funktion durch eine Reihe der Form $\sum \alpha_\varrho p_\varrho(x, y)$ samt ihren Differentialquotienten mit beliebiger Genauigkeit approximieren können, so setzen wir auch die Lösung unseres Variationsproblems näherungsweise in Form einer endlichen Summe

$$(42)\qquad U = \sum_1^n \alpha_\varrho p_\varrho(x, y)$$

an. Nun bestimmen wir die Koeffizienten α_ϱ derart, daß die Nebenbedingung $J = \iint U^2\,dx\,dy = 1$ erfüllt ist und $D(U) = \iint \operatorname{grad}^2 U\,dx\,dy$ ein Minimum wird. Wir haben also, wenn λ^2 wieder den Lagrangeschen Faktor für die Nebenbedingung bedeutet, die Gleichungen

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_h} = \lambda^2 \frac{\partial J}{\partial \alpha_h} \tag{43}$$

aufzulösen. Da

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_h} = 2\iint \operatorname{grad} U \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial \alpha_h}\,dx\,dy = 2\sum \alpha_\varrho \iint \operatorname{grad} p_\varrho \operatorname{grad} p_h\,dx\,dy$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_h} = 2\iint U \frac{\partial U}{\partial \alpha_h} = 2\sum_1^n \alpha_\varrho \iint p_\varrho p_h\,dx\,dy$$

ist, können wir diese Gleichungen

$$\sum_1^n \alpha_\varrho \iint \operatorname{grad} p_\varrho \operatorname{grad} p_h\,dx\,dy = \lambda^2 \sum_1^n \alpha_\varrho \iint p_\varrho p_h\,dx\,dy \tag{44}$$

schreiben, und wir sehen, daß wir darin genau so viele lineare homogene Gleichungen vor uns haben, als Koeffizienten zu bestimmen sind. Die Gleichungen sind nur lösbar, wenn die Determinante verschwindet; setzen wir dieselbe gleich Null, so erhalten wir eine algebraische Gleichung zur Bestimmung des Lagrangeschen Faktors λ^2. Der Grad dieser Gleichung ist gleich der Zahl der Koeffizienten: da die Determinante symmetrisch ist, hat sie nur reelle Wurzeln. Daß diese auch positiv sind, erkennen wir, wenn wir die Gl. (43) mit α_h multiplizieren und summieren. Da nämlich sowohl $J(U)$ als $D(U)$ quadratische Formen in den α sind, so ist

$$2D = \sum \alpha_h \frac{\partial D}{\partial \alpha_h}, \qquad 2J = \sum \alpha_h \frac{\partial J}{\partial \alpha_h},$$

so daß wir mit $J = 1$

$$D = \lambda_1^2 J, \qquad \lambda^2 = \iint \operatorname{grad}^2 U\,dx\,dy \tag{45}$$

bekommen. Sind die Werte von λ ermittelt, so erhalten wir für jeden Wert λ^2, der eine Wurzel der Determinantengleichung ist, aus den Gl. (44) je ein System von Koeffizienten α_ϱ, aus denen wir Funktionen U bilden. Mit wachsender Koeffizientenzahl n konvergieren die Wurzeln der Determinantengleichung gegen die Eigenwerte unseres Variationsproblems. Wegen der Konvergenz der Eigenfunktionen s. 1. Bd., XX, S. 679.

Brauchbar ist die Methode vor allen Dingen zur Bestimmung der Eigenwerte. Wir wollen sie anwenden, um den ersten Eigenwert für eine elliptische Membran zu bestimmen. Wir bemerken zunächst, daß wir durch das Näherungsverfahren sicher einen zu großen Wert erhalten, denn da der wahre Wert das Minimum von D liefert, so muß irgend eine Näherung einen größeren Wert ergeben.

Für die Ellipse machen wir noch eine vereinfachende Vorbetrachtung. Da zum kleinsten Eigenwert nur eine Eigenfunktion gehören kann, so sehen wir, daß dieselbe symmetrisch zur x- und y-Achse sein muß. Wäre sie nämlich gleich $f(x, y)$, wo $f(-x, y) \neq f(x, y)$ wäre, so müßte aus Symmetriegründen auch $f(-x, y)$ eine Eigenfunktion sein, es gäbe also zwei Eigenfunktionen, was ausgeschlossen ist. Wir können uns also zur Bestimmung der ersten Eigenfunktion auf gerade Funktionen in x und y beschränken.

Die Halbachsen der Ellipse seien a und b, ihre Gleichung ist also

$$a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0.$$

Wenn wir die allereinfachste Näherung nehmen, welche nur die Randbedingung befriedigt,

$$U = C\{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2\},$$

so bestimmt sich die Konstante C aus der Bedingung

$$\iint U^2 \, dx \, dy = 1$$

zu

$$C^2 = \frac{3}{\pi a^5 b^5}.$$

Weitere Koeffizienten, durch deren Bestimmung der Wert des Minimalintegrals noch herabgedrückt werden könnte, stehen nicht zur Verfügung. Rechnen wir das Minimalintegral aus, so erhalten wir durch elementare Integrationen

$$D(U) = \iint \operatorname{grad}^2 U \, dx \, dy = C^2 \pi a^3 b^3 (a^2 + b^2),$$

woraus wir mit dem errechneten Werte für C^2 als Näherungswert für den ersten Eigenwert nach (45)

$$\lambda_1^2 = \frac{3(a^2 + b^2)}{a^2 b^2}$$

erhalten. Zur Verbesserung dieses Wertes machen wir jetzt den erweiterten Ansatz

$$U = \{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2\}\{\alpha a^2 b^2 + \beta b^2 x^2 + \gamma a^2 y^2\}.$$

Der vorgesetzte Faktor $a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2$ garantiert bei beliebigen α, β, γ die Erfüllung der Randbedingung $U = 0$. Rechnen wir uns nun die Werte der Integrale D und J als Funktion von α, β, γ aus, so erhalten wir

$$J(U) = \pi a^9 b^9 \left\{\frac{\alpha^2}{3} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{80} + \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma}{12} + \frac{\beta\gamma}{120}\right\},$$

$$D(U) = \pi a^7 b^7 (a^2 + b^2) \left\{\begin{array}{c} \alpha^2 + \beta^2\left(\dfrac{b^2}{6(a^2+b^2)} + \dfrac{1}{16}\right) + \gamma^2\left(\dfrac{a^2}{6(a^2+b^2)} + \dfrac{1}{16}\right) \\ + \dfrac{\alpha\beta + \alpha\gamma}{3} + \dfrac{\beta\gamma}{24} \end{array}\right\}$$

und die Gleichungen

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \lambda^2 \frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad \text{usw.}$$

nehmen nach Wegheben unwesentlicher Faktoren und mit der Abkürzung

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda^2 a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

die Form an:

$$\begin{aligned}
\alpha + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{6} &= \varkappa^2\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{24} + \frac{\gamma}{24}\right),\\
\frac{\alpha}{6} + \beta\left(\frac{b^2}{6(a^2+b^2)} + \frac{1}{16}\right) + \frac{\gamma}{48} &= \varkappa^2\left(\frac{\alpha}{24} + \frac{\beta}{80} + \frac{\gamma}{240}\right),\\
\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{48} + \gamma\left(\frac{a^2}{6(a^2+b^2)} + \frac{1}{16}\right) &= \varkappa^2\left(\frac{\alpha}{24} + \frac{\beta}{240} + \frac{\gamma}{80}\right).
\end{aligned}$$

Wir wollen die Rechnung für den Spezialfall $a = 2$, $b = 1$ zu Ende führen. Die letzten Gleichungen werden dann nach Multiplikation mit 24:

$$\begin{aligned}
(24 - 8\varkappa^2)\alpha + (4 - \varkappa^2)\beta + (4 - \varkappa^2)\gamma &= 0,\\
(4 - \varkappa^2)\alpha + (2{,}3 - 0{,}3\,\varkappa^2)\beta + (0{,}5 - 0{,}1\,\varkappa^2)\gamma &= 0,\\
(4 - \varkappa^2)\alpha + (0{,}5 - 0{,}1\,\varkappa^2)\beta + (4{,}7 - 0{,}3\,\varkappa^2)\gamma &= 0,
\end{aligned}$$

woraus wir für $\varkappa^2$ die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} (24-8\varkappa^2), & (4-\varkappa^2), & (4-\varkappa^2) \\ (4-\varkappa^2), & (2{,}3-0{,}3\varkappa^2), & (0{,}5-0{,}1\varkappa^2) \\ (4-\varkappa^2), & (0{,}5-0{,}1\varkappa^2), & (4{,}7-0{,}3\varkappa^2) \end{vmatrix} = 157{,}44 - 78{,}08\varkappa^2 + 8{,}72\varkappa^4 - 0{,}24\varkappa^6 = 0$$

erhalten, deren kleinste Wurzel $\varkappa_1^2 = 2{,}8554$ ist. Es wird somit

$$\lambda_1^2 = \frac{\varkappa_1^2 (a^2 + b^2)}{a^2 b^2} = 2{,}8554 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = 3{,}568.$$

Vergleichen wir dies mit dem Ergebnis der ersten Näherung

$$\frac{3(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} = 3{,}75,$$

so sehen wir, daß der verbesserte Näherungswert um 5 Proz. tiefer liegt als der erste Wert.

Bestimmt man noch die Koeffizienten, so ergibt die elementare Rechnung

$$\alpha = 1{,}560, \quad \beta = -1{,}178, \quad \gamma = 0{,}399.$$

Ein Mangel der Methode ist es, daß man keine Möglichkeit hat, den Fehler in einfacher Weise brauchbar abzuschätzen. Man begnügt sich bei der Bestimmung der Eigenwerte deshalb damit, die Näherung als brauchbar anzusehen, wenn bei einer Verbesserung der Näherung der erzielte Näherungswert sich nicht mehr merklich ändert.

5. Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte[1]. Den Abschluß unserer Betrachtungen soll die Frage der Verteilung der Eigenwerte bilden, d. h. physikalisch gesprochen, die Frage, wieviel Schwingungszahlen einer Membran unterhalb einer gegebenen Zahl z liegen. Die exakte Beantwortung dieser Frage würde natürlich die Bestimmung der Eigenwerte in jedem gegebenen Falle erfordern, wir können aber zeigen, daß für sehr großes z die Anzahl $N(z)$ der Eigenschwingungen, welche unterhalb z liegen, für alle Membranen gleichen Flächeninhalts asymptotisch die gleiche wird. Ist F der Flächeninhalt der Membran, und $N(z)$ die Zahl der Eigenwerte unterhalb z, so wird

$$\lim_{z=\infty} \frac{N(z)}{z^2} = \frac{F}{4\pi c}. \tag{46}$$

Diese asymptotische Formel können wir zunächst für den Fall des Rechtecks beweisen, wo wir die Verteilung der Eigenwerte kennen. Die variationstheoretische Betrachtung des letzten Abschnittes wird uns dann die Möglichkeit geben, die Formel auf den allgemeinen Fall zu übertragen.

Das Rechteck. Die Eigenschwingungen eines Rechtecks von den Seitenlängen a und b haben nach § 3 (S. 705) die Form

$$w_{m,n} = A_{m,n} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \cos(\nu_{m,n} t - \gamma_{m,n}), \tag{47}$$

wo m und n ganze Zahlen sind. Der Eigenwert λ der Differentialgleichung $\Delta W + \lambda^2 W = 0$ wird

$$\lambda_{m,n} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \tag{48}$$

Die zugehörigen Schwingungszahlen sind, wenn wir wieder

$$c = S/\mu \tag{49}$$

setzen,

$$\nu_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \tag{50}$$

Wollen wir also wissen, wie viele Schwingungszahlen unterhalb einer gegebenen Größe z liegen, so müssen wir fragen, wie viele ganzzahlige positive Lösungen m, n der Ungleichung

$$\pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} < z \quad \text{bzw.} \quad \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} < \frac{z^2}{\pi^2 c^2} \tag{51}$$

---

[1]) Vgl. Courant, Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Zeitschr. 7, 1—57, 1920.

genügen. Für einen endlichen Wert von z können wir die Zahl dieser Lösungen durch Abzählen gewinnen, wenn wir uns in einem Koordinatensystem mit m als Abszisse und n als Ordinate die Ellipse

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{z^2}{\pi^2 c^2}$$

zeichnen. Diese Ellipse hat die Achsen $\frac{az}{\pi c}$ und $\frac{bz}{\pi c}$, alle Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten), welche innerhalb des ersten Ellipsenquadranten liegen, entsprechen dann Schwingungszahlen

$$\nu_{m,n} < z,$$

für Punkte außerhalb der Ellipse ist $\nu_{m,n} > z$. Es ist also die Anzahl der Frequenzen unterhalb z gleich der Anzahl der Gitterpunkte innerhalb des ersten Ellipsenquadranten. Die Anzahl derselben ist näherungsweise gleich dem Flächeninhalt des Quadranten; in der Zahlentheorie wird gezeigt, daß der prozentuale Fehler, den wir bei dieser Approximation begehen, mit wachsendem z gegen Null geht. Es wird also angenähert

$$N(z) = \frac{\pi}{4} \frac{az}{\pi c} \cdot \frac{bz}{\pi c} = \frac{ab z^2}{4 \pi c} \tag{52}$$

oder genauer ausgedrückt

$$\lim_{z \to \infty} \frac{N(z)}{z^2} = \frac{ab}{4 \pi c}.$$

Wenn wir die Randbedingung $W = 0$ durch die Randbedingung $\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0$ ersetzen, was (s. S. 721) darauf hinauskommt, daß wir in der variationstheoretischen Behandlung unseres Problems auf jede Randbedingung verzichten, so erhalten wir als Eigenschwingungen der rechteckigen Membran mit freiem Rande

$$w_{m,n} = A^*_{m,n} \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \cos (\nu_{m,n} t - \gamma_{m,n}).$$

Die Schwingungszahlen

$$\nu_{m,n} = c \lambda_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

werden also die gleichen wie für die Randbedingung $W = 0$, nur treten noch alle diejenigen Werte hinzu, welche wir erhalten, wenn m oder n gleich Null ist; beim Rechteck mit festgehaltenem Rande sind diese ausgeschlossen. Die neu hinzutretenden Eigenwerte liegen bei der graphischen Darstellung in den Gitterpunkten der positiven Achsen. Die asymptotische Formel für die Anzahl der Eigenschwingungen bleibt die gleiche, da die neu hinzutretenden Frequenzen der Zahl nach gleich

der Summe der Halbachsen sind, so daß sie in der asymptotischen Formel verschwinden:

$$\lim_{z=\infty} \frac{N(z)}{z^2} = \frac{ab}{4\pi c}. \tag{53}$$

Wir wollen nun zeigen, daß diese Formel für eine beliebige Gestalt der Membran ihre Gültigkeit behält. Der Grundgedanke des Beweises ist der, daß bei einer Verschärfung der Bedingungen eines Variationsproblems, d. h. wenn irgendwelche neuen Bedingungen hinzugefügt werden, welche den Kreis der zulässigen Funktionen einschränken, die Minimalwerte nur steigen können, somit auch in dem Maximum-Minimumproblem, welches die Eigenwerte für die Differentialgleichung der Membranschwingungen charakterisiert, die Höchstwerte der Minima. Wird umgekehrt das Variationsproblem „gelockert", d. h. wenn durch Weglassen von Bedingungen (Randbedingungen oder Stetigkeitsforderungen) der Kreis der zulässigen Funktionen erweitert wird, so können alle Minima und deren Höchstwerte nur fallen. Physikalisch heißt das also: Bei einer Verschärfung der Bedingungen steigen, bei einer Lockerung fallen alle Schwingungszahlen.

Um diese Grundtatsache aller Variationsrechnung auf unseren besonderen Fall anzuwenden, verfahren wir folgendermaßen. Wir legen in die Ebene der Membran — welche das Gebiet G bedecken möge — ein Koordinatensystem und zeichnen uns das quadratische Netz aus achsenparallelen Geraden, die den Abstand ε voneinander haben. Fassen wir nun die sämtlichen kleinen Quadrate, welche keinen Punkt außerhalb des gegebenen Gebietes haben, zusammen, so bilden sie eine Fläche, die wir abkürzend als das „Ineck" bezeichnen wollen. Fassen wir zweitens die Quadrate ins Auge, welche mindestens einen Punkt mit G gemeinsam haben, so bilden sie eine Fläche, die wir abkürzend als das „Umeck" bezeichnen wollen. Die Membranfläche G liegt dann zwischen Ineck und Umeck, und mit abnehmender Maschenweite nähern sich die Flächeninhalte von Ineck und Umeck dem Flächeninhalt der Membran.

Verschärfung des Variationsproblems. Wir gehen von dem Variationsproblem der gegebenen, am Rande festgehaltenen Membran aus, und verschärfen die Bedingungen für die Eigenfunktionen zunächst dadurch, daß wir alle diejenigen Flächenteile festhalten, die zwischen den Rändern der Membran und des Inecks liegen. Dazu fügen wir die weitere verschärfende Bedingung, daß wir auch noch die Gittergeraden festhalten. Wir betrachten also unter den verschärfenden Bedingungen die Schwingungen, welche das Ineck mit festgehaltenem Rande und festgehaltenen Gittergeraden ausführen kann. Dabei schwingen offenbar alle Quadrate des Inecks unabhängig voneinander, so daß wir die Zahl der Eigenschwingungen des Inecks unterhalb z erhalten, indem wir die

Zahl der Schwingungen für alle einzelnen Quadrate addieren. Nun ist asymptotisch die Zahl der Schwingungen unterhalb z für das einzelne Quadrat $\frac{\varepsilon^2 z^2}{4\pi c}$, also für alle Quadrate

$$\frac{f_i z^2}{4\pi c},$$

wo f_i der Inhalt des Inecks ist. Nun sind bei der Verschärfung alle Schwingungszahlen gestiegen (oder wenigstens nicht gefallen), so daß ihre Anzahl unterhalb z gefallen (oder mindestens nicht gestiegen) ist. Die ermittelte Anzahl ist also sicher kleiner als die Anzahl der Schwingungen unter z für die ursprünglich betrachtete Membran, d. h.

$$\lim_{z=\infty} \frac{N(z)}{z^2} \geqq \frac{f_i}{4\pi c}. \tag{54}$$

Lockerung des Variationsproblems. Wir gehen wieder aus von dem Variationsproblem der gegebenen Membran und lockern die Bedingungen, indem wir zunächst die Flächenteile zwischen Umeck und Membran loslassen. Dann lockern wir weiter, indem wir auch noch den Rand des Umecks loslassen und das Umeck längs der Gittergeraden aufschneiden, oder mathematisch gesprochen, indem wir auf die Stetigkeit längs der Gittergeraden verzichten. Damit werden die einzelnen Quadrate vollkommen voneinander unabhängig, sie schwingen, da auf jede Randbedingung verzichtet ist, im Minimalfall mit der Randbedingung $\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0$, d. h. mit freiem Rande, und die Schwingungen des zerschnittenen Umecks setzen sich aus diesen Schwingungen der einzelnen Quadrate zusammen. Es ist also die Zahl der Schwingungen unterhalb z für das zerschnittene Umeck gleich der Summe der Anzahlen für die einzelnen Quadrate. Nun ist nach (53) die Zahl der Schwingungen unterhalb z für jedes Quadrat asymptotisch gleich $\frac{\varepsilon^2 z^2}{4\pi c}$, die Summe für alle Quadrate also $\frac{f_a}{4\pi c}$, wo f_a der Inhalt des Umecks ist. Da bei der Lockerung alle Schwingungszahlen gefallen (oder mindestens nicht gestiegen) waren, so muß ihre Anzahl unterhalb z gestiegen (oder mindestens nicht gefallen) sein. Es ist also die ermittelte Anzahl größer oder gleich der Anzahl für die ursprünglich betrachtete Membran. Mit (54) zusammen erhalten wir also die Ungleichung

$$\lim_{z=\infty} \frac{f_i}{4\pi c} \leqq \frac{N(z)}{z^2} \leqq \frac{f_a}{4\pi c}. \tag{55}$$

Nun können wir aber durch hinreichend feine Maschenteilung die Inhalte f_i und f_a von Ineck und Umeck beliebig nahe an den Flächen-

inhalt F der Membran heranbringen, so daß in unserer Abschätzung obere und untere Grenze gleich werden. Damit erhalten wir als asymptotische Formel die eingangs behauptete Beziehung

$$\lim_{z=\infty} \frac{N(z)}{z^2} = \frac{F}{4\pi c}. \tag{56}$$

Die hier angestellten Betrachtungen lassen sich auf alle Eigenwertprobleme übertragen.

Lehrbücher.

A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862; französische Ausgabe von B. de St. Venaut. Paris 1883.
A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe. Leipzig 1907.
E. und F. Cosserat, Théorie des corps déformables. Paris 1908.

Zwanzigstes Kapitel.

Ideale Flüssigkeiten.

§ 1. Gleichgewichtsprobleme.

1. Gleichgewichtsbedingungen. Man nimmt als charakteristisches Merkmal der Flüssigkeiten und Gase an, daß im Gleichgewichtszustand alle Schubspannungen verschwinden. Der Spannungszustand ist daher in jedem inneren Punkte durch den Wert des allseitig gleichen Druckes p vollständig bestimmt.

Die auf die Flüssigkeitselemente wirkenden über das Volumen verteilten Kräfte (Volumenkräfte) sind zumeist durch ihre auf die Masseneinheit bezogene Größe $\mathfrak{P}$ — mit den Komponenten X, Y, Z — als Funktion des Ortes gegeben. Die Bedingung, daß die auf das Volumenelement wirkende Kraft $\mathfrak{P}\,\varrho$ den auf die Flächen des Volumenelements wirkenden Druckkräften das Gleichgewicht hält, lautet offenbar (ϱ = Dichte der Flüssigkeit)

$$\operatorname{grad} p = \varrho\,\mathfrak{P}. \tag{1}$$

Betrachten wir nämlich ein Volumenelement mit den Seitenlängen Δx, Δy, Δz, so wirken z. B. an den zwei zur x-Achse senkrechten Stirnflächen die Druckkräfte $p\Delta y\Delta z$ und $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$. Die Differenz ist mithin $-\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$, und die Bedingung, daß die Summe der x-Komponenten aller Kräfte verschwindet, liefert die Gleichung

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + \varrho X\Delta x\Delta y\Delta z = 0.$$

Ebenso erhalten wir die beiden Gleichungen für die Komponenten in der y- und z-Richtung

$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\varrho Y=0, \qquad -\frac{\partial p}{\partial z}+\varrho Z=0.$$

Die drei Gleichungen fassen wir in der vektoriellen Schreibweise in Gl. (1) zusammen.

Man rechnet die Fälle, in denen die Flüssigkeit gegen ein Inertialsystem sich wie ein starrer Körper bewegt, in denen daher die relative Lage aller Flüssigkeitsteilchen unverändert bleibt, zu den Gleichgewichtsproblemen. Die Gleichung für die Druckverteilung lautet in diesen Fällen

$$\text{grad}\, p = \varrho(\mathfrak{P}-\mathfrak{b}), \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{b}$ die Beschleunigung des im Punkte x, y, z befindlichen Flüssigkeitsteilchens bezeichnet, die aus der Bewegung des gesamten Flüssigkeitskörpers sich ergibt.

Bei kompressiblen Flüssigkeiten ist die Dichte ϱ mit dem Druck p und der Temperatur T durch die Zustandsgleichung verbunden; bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist sie eine gegebene konstante Größe, so daß die Gl. (1) bzw. (2) zur Bestimmung der Druckverteilung ausreicht.

Wir betrachten als Beispiel das Gleichgewicht der Atmosphäre; wir nehmen an, daß Dichte und Druck nur von der Höhe z abhängen. An der Erdoberfläche ($z = 0$) soll der Druck p_0 herrschen, die Dichte den Wert ϱ_0 haben. Unter Annahme der sogenannten „isothermischen Atmosphäre“ wäre (R = Gaskonstante)

$$\frac{p_0}{\varrho_0}=\frac{p}{\varrho}=RT,$$

und die Gl. (1) lautet

$$\frac{dp}{dz}=-\varrho g=-\varrho_0\frac{p}{p_0}g$$

oder

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\varrho_0}{p_0}g\,dz.$$

Daraus ergibt sich die sogenannte logarithmische Höhenformel

$$\log\frac{p}{p_0}=-\frac{\varrho_0}{p_0}gz. \tag{3}$$

Für praktische Zwecke wird zumeist (wenigstens für Höhen bis etwa 10 bis 15 km) die mittlere Temperatur als lineare Funktion der Höhe angesetzt (Annahme eines konstanten Temperaturgradienten), etwa

$$T=T_0-\lambda z=T_0\left(1-\frac{z}{H}\right)$$

(H ist die Höhe, in welcher, falls die Extrapolation zulässig wäre, die Temperatur Null eintreten würde).

Alsdann lautet die Beziehung zwischen Druck und Dichte

$$\frac{p}{\varrho} = R T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

Die Differentialgleichung für die Druckverteilung lautet

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{R T_0} \frac{1}{1 - \frac{z}{H}}.$$

Wir erhalten

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{R T_0} \int_0^z \frac{dz}{1 - \frac{z}{H}}$$

oder

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{g H}{R T_0}}. \tag{4}$$

Man sieht unmittelbar, daß Gl. (4) für $H = \infty$ (Temperaturgradient = Null) in Gl. (3) übergeht.

2. Die freie Oberfläche. Für zwei Flüssigkeiten, welche sich nicht mischen, gelten die Gleichungen

$$\operatorname{grad} p_1 = \varrho_1 \mathfrak{P}_1,$$
$$\operatorname{grad} p_2 = \varrho_2 \mathfrak{P}_2,$$

wobei die Indizes 1 und 2 sich auf die zwei verschiedenen Flüssigkeiten beziehen. Für die Trennungsfläche gilt offenbar, falls keine besonderen Oberflächenkräfte angenommen werden,

$$p_1 = p_2. \tag{5}$$

Falls die Dichte der einen Flüssigkeit, etwa ϱ_1, gegen die der zweiten (ϱ_2) sehr klein ist (z. B. die Dichte der Luft gegen die vom Wasser), dagegen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von derselben Größenordnung sind (etwa im Falle der Schwere), so kann die Veränderlichkeit von p_1 gegen die von p_2 vernachlässigt werden, und wir erhalten als Bedingung für die „freie Oberfläche“ der schwereren Flüssigkeit

$$p_2 = \text{konst.} \tag{6}$$

Aus der Bedingung $\operatorname{grad} p_2 = \varrho_2 \mathfrak{P}_2$ folgt für diesen Fall, daß die Volumenkraft (bei Vorhandensein von Beschleunigungen die um die Beschleunigung verminderte Volumenkraft) senkrecht zur freien Oberfläche stehen muß. Mit anderen Worten stellt sich die Flüssigkeits-

oberfläche senkrecht zur jeweiligen Kraftrichtung ein. Falls die Kraftfunktion $\varrho\,\mathfrak{P}$ ein Potential V besitzt, so ist

$$\varrho\,\mathfrak{P} = \operatorname{grad} V.$$

Die freie Oberfläche fällt dann mit einer Äquipotentialfläche zusammen.

Rotiert ein schwerer Flüssigkeitskörper (etwa von der konstanten Dichte ϱ) um eine vertikale Achse mit der Drehgeschwindigkeit ω, so ist $\mathfrak{P} - \mathfrak{b}$ durch die drei Komponenten

$$\begin{aligned} X - b_x &= x\omega^2, \\ Y - b_y &= y\omega^2, \\ Z - b_z &= -g \end{aligned}$$

gegeben. Wir können $\mathfrak{P} - \mathfrak{b}$ als Kraft betrachten; ihr entspricht das Potential $-gz + (x^2 + y^2)\,\frac{\omega^2}{2}$. Als freie Oberfläche erhalten wir daher eine Paraboloidfläche, deren Gleichung durch

$$-gz + (x^2 + y^2)\,\frac{\omega^2}{2} = \text{konst}$$

gegeben ist. Wir schreiben daher mit $x^2 + y^2 = r^2$

$$z = z_0 + \frac{r^2\omega^2}{2g},$$

wobei z_0 die Höhenkoordinate des tiefsten Punktes ($r = 0$) darstellt. Die „Erhöhung" eines beliebigen Punktes der freien Oberfläche über den tiefsten Punkt beträgt mithin $\frac{v^2}{2g}$, falls v die Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ bezeichnet.

Ebbe und Flut entstehen durch Variation der Schwere in Größe und Richtung infolge Beeinflussung derselben durch die relative Lage der Sonne und des Mondes zur Erdkugel. Wenn man die Lage der freien Oberfläche in der hier erörterten Weise bestimmt, erhält man die sogenannte „Gleichgewichtstheorie" der Gezeiten; die wirklichen Vorgänge sind insoweit anders, als einerseits durch die Veränderlichkeit der Kräfte eine Wellenbewegung (Flutwelle) entsteht, andererseits insbesondere in der Nähe der Ufer (bei geringer Wassertiefe) die Reibung der sich verlagernden Wassermassen bedeutenden Einfluß ausübt.

3. Die Gleichgewichtsgestalt rotierender Flüssigkeitsmassen unter Einfluß der eigenen Gravitation. Es ist eine klassische Fragestellung, welche Gleichgewichtsgestalten eine rotierende Flüssigkeitsmasse annehmen kann, falls ihre Teile sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen.

Beschränken wir uns zunächst auf Rotationskörper, so sieht man, wie Mac Laurin zuerst gezeigt hat, leicht, daß jedes abgeplattete

Rotationsellipsoid bei geeigneter Wahl der Drehgeschwindigkeit eine solche Gleichgewichtsfigur darstellt.

Denken wir die z-Achse als Drehachse und bezeichnen die Drehgeschwindigkeit wieder mit ω, so kann man die negativ genommenen Beschleunigungen $-b_x = \omega^2 x$, $-b_y = \omega^2 y$, $b_z = 0$ zu den Gravitationskräften, deren Potential V genannt werden soll, hinzufügen und die Größe $V + (x^2 + y^2)\frac{\omega^2}{2}$ als das Potential der um die Zentrifugalkraft verminderten Kräfte betrachten. Die Bedingung der freien Oberfläche lautet alsdann:

$$V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{konst},$$

wobei V den Wert des Newtonschen Potentials des betreffenden Flüssigkeitskörpers in dem Oberflächenpunkt xyz bezeichnet.

Das Potential eines homogenen Rotationsellipsoids mit den Halbachsen $a = b$, c und der konstanten Massendichte ϱ wird durch die Formel (vgl. 1. Bd., S. 486; um V die Dimension einer Arbeit zu geben, fügen wir die Gravitationskonstante K hinzu)

$$V = V_0 - A(x^2 + y^2) - Cz^2$$

dargestellt, wobei die Größen A und C durch die bestimmten Integrale

$$A = K\varrho a^2 c\pi \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)^2 (c^2 + t)^{1/2}}, \quad C = K\varrho a^2 c\pi \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)(c^2 + t)^{3/2}}$$

gegeben sind.

Die Gleichung des Rotationsellipsoids lautet

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder

$$z^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}(x^2 + y^2),$$

so daß wir erhalten

$$V + \frac{x^2 + y^2}{2}\omega^2 = V_0 + \left(C\frac{c^2}{a^2} - A + \frac{\omega^2}{2}\right)(x^2 + y^2) - Cc^2.$$

Die Bedingung $V + \frac{x^2 + y^2}{2}\omega^2 = \text{konst}$ ist erfüllt, falls wir

$$C\frac{c^2}{a^2} - A + \frac{\omega^2}{2} = 0$$

setzen. Wir erhalten daher für die Drehgeschwindigkeit, bei welcher das Ellipsoid mit den Halbachsen a und c sich im Gleichgewicht befindet,

$$\omega = \sqrt{2\left(A - C\frac{c^2}{a^2}\right)}.$$

Wir führen das Achsenverhältnis $\lambda = \frac{a}{c}$ und $z = \frac{t}{a^2}$ ein. Es wird damit

$$A = K\varrho\pi\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^2(1+\lambda^2 z)^{1/2}}, \quad C = K\varrho\pi\int_0^\infty \frac{\lambda^2 dz}{(1+z)(1+\lambda^2 z)^{3/2}}$$

und

$$\frac{\omega^2}{2K\varrho\pi} = (\lambda^2 - 1)\int_0^\infty \frac{z\,dz}{(1+z)^2(1+\lambda^2 z)^{3/2}}.$$

Die linke Seite ist eine dimensionslose Größe, welche folgendermaßen gedeutet werden kann. Man denke zunächst den Flüssigkeitskörper im Ruhezustande, d. h. in Gestalt einer Kugel vom Halbmesser r_0. Die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche ist alsdann $g = \frac{4}{3}K\varrho\pi r_0$; wenn wir nun die Kugel mit der Drehgeschwindigkeit ω rotieren lassen, so ist die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator $r_0\omega^2$, so daß die Größe $\frac{3\omega^2}{4K\varrho\pi}$ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerebeschleunigung bei Beibehaltung der Kugelform darstellt[1]).

[1]) Die Verhältniszahl $\frac{\omega^2}{2K\varrho\pi}$ hat auch folgende Bedeutung. Man kann sich die Frage stellen: Bis zu welcher Drehgeschwindigkeit ω kann es bei verschwindendem Oberflächendruck Gleichgewichtsfiguren geben, ohne daß im Innern der Flüssigkeit negativer Druck (Zugspannung) auftritt? Nach den Gleichgewichtsgleichungen muß für das ganze innere Gebiet $\frac{p}{\varrho} - V - \frac{x^2+y^2}{2}\omega^2 =$ konst gelten, d. h. mit Rücksicht darauf, daß $\Delta V = -4\pi\varrho K$, $\Delta\frac{(x^2+y^2)}{2} = 2$ ist,

$$\Delta p = -4\pi K\varrho^2 + 2\varrho\omega^2.$$

Berücksichtigt man, daß nach dem Gaußschen Satze das Volumenintegral $\int_{(v)} \Delta p\,dv$ für ein beliebiges Gebiet gleich dem Flächenintegral $\int_{(F)} \frac{\partial p}{\partial n}\,dF$ ist ($\frac{\partial p}{\partial n}$ ist der Differentialquotient nach der nach außen positiv gerechneten Normale), so sieht man unmittelbar, daß für $\Delta p < 0$, d. h. $\frac{\omega^2}{2K\pi\varrho} < 1$ die Funktion $p(x, y, z)$ im Innern der Flüssigkeit nur Maxima, aber kein Minimum haben kann, dagegen für $\Delta p > 0$, d. h. $\frac{\omega^2}{2K\pi\varrho} > 1$, an der Oberfläche der Flüssigkeit Punkte vorhanden sein müssen, für welche $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ ist, d. h. der Druck nach innen abnimmt. Im letzteren Falle treten also negative Drucke auf. Die durch die Beziehung $\omega^2 = 2K\pi\varrho$ gegebene obere Grenze der Drehgeschwindigkeit ist etwa 21 mal so groß wie die Drehgeschwindigkeit der Erde (Umdrehungszeit $1^h\,7'$).

Das Integral auf der rechten Seite läßt sich durch gewöhnliche Funktionen berechnen; es wird dann für die „Mac Laurinschen“ Ellipsoide

$$(7) \qquad \frac{\omega^2}{2K\varrho\pi} = \frac{1}{(\lambda^2-1)^{3/2}}\left\{(2+\lambda^2)\arccos\frac{1}{\lambda} - 3\sqrt{\lambda^2-1}\right\}.$$

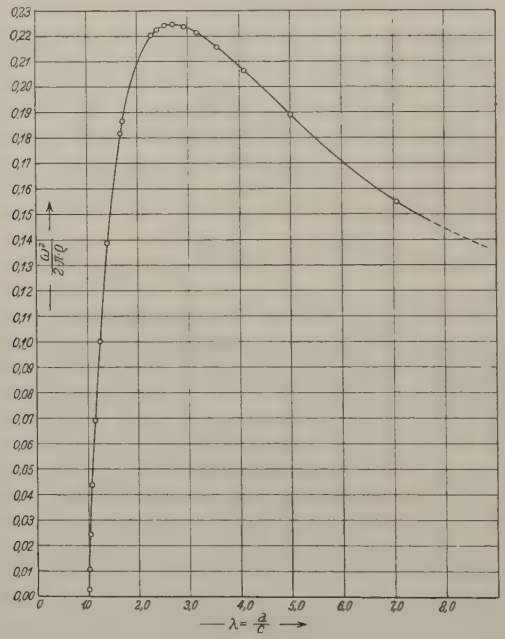
Ist λ wenig von Eins verschieden (kleine Abplattung), so erhält man

$$\frac{\omega^2}{2K\varrho\pi} = \frac{8}{15}\frac{a-c}{a}.$$

Die relative Abplattung $\frac{a-c}{a}$ ist gleich $\frac{15}{16}\frac{\omega^2}{K\varrho\pi} = \frac{5}{4}\frac{r_0\omega^2}{g}$.

Die Funktion auf der rechten Seite der Gl. (7) ist in Fig. 78 dargestellt. Man sieht, daß bis zu einer bestimmten Drehgeschwindig-

Fig. 78.



keit für jede Drehgeschwindigkeit zwei Werte des Achsenverhältnisses möglich sind. Wenn $\omega > \sqrt{0{,}4494\,\varrho K\pi}$, so liefert die Gl. (7) keine reelle Wurzel für λ, d. h. es gibt kein Rotationsellipsoid mehr als Gleichgewichtsgestalt.

Jacobi hat indessen bemerkt, daß die Rotationsellipsoide nicht die einzigen Ellipsoide sind, welche als Gleichgewichtsfiguren in Betracht kommen. Das Newtonsche Potential eines dreiachsigen Ellipsoids lautet nämlich für Punkte, die nicht außerhalb des Ellipsoids liegen:

$$V = V_0 - Ax^2 - By^2 - Cz^2.$$

Wenn wir nun die Gleichung des Ellipsoids in der Form schreiben:

$$z^2 = c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

so ist

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{konst},$$

falls

$$A - C\frac{c^2}{a^2} = B - C\frac{c^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{2}$$

gilt. Diese Bedingung bestimmt die Achsenverhältnisse $a:b:c$ und gleichzeitig die Drehgeschwindigkeit ω. Durch Diskussion der Gleichung stellt sich heraus, daß das Ellipsoid sich immer um die kleinste Achse dreht ($c < a$, $c < b$) und daß nur für $\frac{\omega^2}{2K\varrho\pi} < 0{,}187$ reelle Achsenverhältnisse sich ergeben. Bei $\omega^2 = 0{,}374\,K\varrho\pi$ geht das Jacobische Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid über.

Die Frage nach der Stabilität der Ellipsoide bildete den Gegenstand zahlreicher Untersuchungen.

Zunächst erhält man eine klarere Übersicht der Verhältnisse, wenn man statt der Drehgeschwindigkeit den Drehimpuls (Drall) als Parameter einführt. Der Drall des sich drehenden Flüssigkeitskörpers ist offenbar gleich

$$D = J_z\omega = \varrho\int\int\int(x^2 + y^2)\,\omega\,dx\,dy\,dz,$$

wobei J_z das Trägheitsmoment in bezug auf die z-Achse bezeichnet. Für ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c ist

$$J_z = \tfrac{4}{15}\pi a b(a^2 + b^2)c\varrho\omega.$$

Für den besonderen Fall des Rotationsellipsoids ($b = a$) führen wir durch die Beziehung

$$a^2 c = R^3$$

den Halbmesser der Kugel gleichen Volumens ein. Alsdann sieht man gleich, daß die Größe $\frac{D}{R^5\varrho^{3/2}K^{1/2}}$ eine dimensionslose ist. Für die Rotationsellipsoide ist

$$\frac{\omega}{\sqrt{2K\varrho\pi}} = \frac{15}{8\pi^{3/2}\sqrt{2}}\,\frac{D}{R^5\varrho^{3/2}K^{1/2}}\left(\frac{c}{a}\right)^{2/3}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Mac Laurinschen Ellipsoide lautet mithin

$$\frac{D}{R^5\varrho^{3/2}K^{1/2}} = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi^{3/2}\,\frac{\lambda^{2/3}}{(\lambda^2 - 1)^{3/4}}\sqrt{(2 + \lambda^2)\arccos\frac{1}{\lambda} - 3\sqrt{\lambda^2 - 1}}.$$

Für große λ $\left(\frac{a}{c}$ sehr groß$\right)$ wird $\frac{D}{R^5 \varrho^{3/2} K^{1/2}}$ unendlich, und zwar wie $\lambda^{1/6}$; das Achsenverhältnis $\frac{a}{c}$ wächst wie die sechste Potenz des Dralles.

Die Reihe der Mac Laurinschen Ellipsoide stellt mithin nach dem Parameter $c = \frac{D}{R^5 \varrho^{3/2} K^{1/2}}$ geordnet eine „lineare Reihe" von Gleichgewichtsfiguren dar; das Achsenverhältnis durchläuft von $c = 0$ bis $c = \infty$ die Werte zwischen $\lambda = 1$ bis $\lambda = \infty$.

Das Stabilitätskriterium für eine Gleichgewichtsfigur kann nun im Anschluß an II, § 2 folgendermaßen formuliert werden: Es sei

$$U = -\iiint V \, dx \, dy \, dz$$

die potentielle Energie der Flüssigkeit, entsprechend der gegenseitigen Anziehung ihrer Teile. Fernerhin sei

$$T = J \frac{\omega^2}{2} = \frac{D^2}{2J}$$

die kinetische Energie, entsprechend der Drehung. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn

$$U + T = -\int\int\int V \, dx \, dy \, dz + \frac{D^2}{2J}$$

bei konstant gehaltenem Drall (D = konst) für alle Variationen der Gestalt ein Minimum darstellt. Denkt man sich zunächst die Gestalt der Flüssigkeit durch endlich viele Parameter $q_1 \ldots q_n$ festgelegt, und zwar so, daß der untersuchten Gleichgewichtsgestalt die Werte $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ entsprechen, so kann $U + T$ in der Nähe der Gleichgewichtsgestalt durch eine quadratische Form $\sum\sum \alpha_{ik} q_i q_k$ dargestellt werden. Aus der Tatsache, daß sich die Ausgangsfigur im Gleichgewicht befindet, folgt, daß für alle q_i

$$\frac{\partial (U + T)}{\partial q_i} = 0$$

ist. Die Stabilität verlangt, daß die quadratische Form positiv definit sei. Transformiert man durch Einführung neuer Koordinaten $\bar{q}_1 \bar{q}_2 \ldots \bar{q}_n$ $U + T$ in eine Summe von Quadraten, so erscheint $U + T$ in der Form

$$U + T = \sum_1^n \beta_i \bar{q}_i^2,$$

und die Stabilitätsbedingung lautet: $\beta_i > 0$ für alle β_i. Die Größen β_i kann man als „Stabilitätskoeffizienten" bezeichnen. Wechselt bei Variation des Parameters D bzw. $c = \frac{D}{R^5 \varrho^{3/2} K^{1/2}}$ ein Koeffizient β_i sein

Vorzeichen, so bildet $U + T$ kein Minimum; es tritt eine Abzweigung (Bifurkation) einer neuen linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren ein.

Die Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variablen erlaubt, dieses Verfahren auf beliebige kleine Variationen der Gleichgewichtsform auszudehnen. Die Untersuchung der Stabilität der Ellipsoide hat zuerst Poincaré durchgeführt. Es zeigt sich, daß die Mac Laurinschen Ellipsoide von $D = 0$ ($\omega = 0$) bis zu jenem Werte D stabil sind, bei welchem die Jacobischen Ellipsoide abzweigen. Diesem Punkte entsprechen die Achsenverhältnisse $\frac{a}{R} = \frac{b}{R} = 1{,}197$, $\frac{c}{R} = 0{,}698$. Die Jacobischen Ellipsoide bilden durch Vertauschung der Achsen a und b zwei lineare Reihen, welche wieder nur bis zu einem bestimmten Werte von D stabil sind. Ihrem ersten Verzweigungspunkt entsprechen die Achsenverhältnisse $\frac{a}{R} = 1{,}886$, $\frac{b}{R} = 0{,}815$, $\frac{c}{R} = 0{,}651$. In diesem Punkte setzt eine neue lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren ein; die entsprechenden Figuren haben nach der angenäherten Berechnung eine birnenförmige Gestalt.

Außer den ellipsoidartigen Gleichgewichtsfiguren sind ringförmige und aus mehreren getrennten Teilen bestehende Gleichgewichtsgestalten untersucht worden; die ringförmige sind indessen wahrscheinlich instabil[1]).

4. Kapillarität. Für die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten haben wir zunächst angenommen, daß die aus den Gleichgewichtsgleichungen der beiden Flüssigkeiten sich ergebenden Druckwerte p_1 und p_2 stetig ineinander übergehen. Infolge der verschiedenen molekularen Struktur der beiden Flüssigkeiten ist dies indessen nicht der Fall. In der Übergangsschicht entsteht eine rasche Anderung des Druckes, welche man angenähert dadurch berücksichtigen kann, daß man einen Drucksprung

$$p_2 - p_1 = T_{12}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) \tag{8}$$

annimmt, wobei $\frac{1}{R'}$ und $\frac{1}{R''}$ die beiden Hauptkrümmungsradien der Trennungsfläche bezeichnen. Denkt man sich die Trennungsfläche durch eine durch die gleichmäßige, auf die Längeneinheit bezogene Spannung ge-

[1]) Eine ausführliche Darstellung der mathematischen Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten bei H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris 1902. Neuere Untersuchungen stammen von L. Lichtenstein, Math. Zeitschr. **1**, 1918 und **5**, 1919.

spannte dünne Membran ersetzt, so würde diese sich unter der Wirkung der Drucke p_1 und p_2 im Gleichgewicht befinden. Aus diesem Grunde bezeichnet man T_{12} als die Oberflächenspannung. Sie ist von der Beschaffenheit der beiden Flüssigkeiten, ferner lediglich von der Temperatur abhängig. Die Formel (8) hält stand, solange R' und R'' gegen die sogenannte molekulare Reichweite der Kohäsionskräfte sehr groß sind.

Denken wir uns zwei schwere Flüssigkeiten übereinandergeschichtet, etwa in einem zylindrischen Rohre, so zeigt die Erfahrung, daß im allgemeinen eine gekrümmte Trennungsschicht sich einstellt, und zwar so, daß der Winkel, den die Tangentialebene der Trennungsschicht mit der Normalen der festen Wand einschließt, einen bestimmten, von der Beschaffenheit der Wand, der beiden Flüssigkeiten und der Temperatur abhängigen Wert annimmt. Man bezeichnet diesen charakteristischen Winkel als den Randwinkel.

Dem Begriff des Randwinkels liegt folgende physikalische Vorstellung zugrunde: Wir nehmen an, daß genau so wie längs der Trennungsschicht zwischen den beiden Flüssigkeiten auch in den Randschichten zwischen der festen Wand und den Flüssigkeiten eine bzw. zwei bestimmte Oberflächenspannungen T_{1w} und T_{2w} auftreten. Das Gleichgewicht des Elements an der Stelle des Zusammentreffens der Trennungsfläche mit der Wand verlangt, daß die Komponenten der drei Spannungen in der Richtung der Wandfläche sich das Gleichgewicht halten. Es folgt daraus, daß, wenn die Trennungsfläche mit der Wand den Winkel γ einschließt,

$$T_{12} \cos \gamma = T_{1w} - T_{2w}.$$

Man sieht, daß ein Randwinkel nur entstehen kann, falls die Beziehung

$$\left| \frac{T_{1w} - T_{2w}}{T_{12}} \right| < 1 \text{ gilt.}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, ist die Oberflächenspannung zwischen den beiden Flüssigkeiten kleiner als die Differenz der Randspannungen der beiden Flüssigkeiten gegenüber der Wand, so kann die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten die Wand nicht schneiden, die Flüssigkeit mit der kleineren Randspannung (die „benetzende“ Flüssigkeit) läuft der Wand entlang und verdrängt die andere von der Oberfläche. Allerdings geschieht die Benetzung eventuell nur durch eine außerordentlich dünne Schicht, die kaum beobachtet werden kann. Mathematisch kann man diesen Fall dadurch annähern, daß man den Randwinkel für die benetzende Flüssigkeit gleich Null setzt.

Wirkt auf die zwei Flüssigkeiten die Schwere allein, so ist offenbar der Druck im Innern der Flüssigkeit 1

$$p_1 = C_1 - \varrho_1 g z$$

und in der Flüssigkeit 2

$$p_2 = C_2 - \varrho_2 g z,$$

so daß wir als Differentialgleichung der freien Oberfläche erhalten

$$C + g(\varrho_1 - \varrho_2) z = T_{12}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right), \tag{9}$$

wobei $C = C_2 - C_1$ gesetzt wurde.

Ist die Gleichung der Oberfläche $z = z(x, y)$, so ist bekanntlich die Summe der beiden Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Die freie Oberfläche ergibt sich durch Integration der Gl. (9) mit der Randbedingung, daß der Randwinkel an der ganzen Begrenzung den konstanten Wert γ annimmt.

Wird die Begrenzung durch ein vertikales Kreisrohr vom Halbmesser a gebildet, so wird die Oberfläche eine Rotationsfläche. Die Gleichung der Meridiankurve der freien Oberfläche sei $z = z(r)$ und $\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}\varphi$, alsdann wird

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r \sin\varphi).$$

Wir erhalten daher das Gleichungssystem

$$\frac{T_{12}}{r}\frac{d}{dr}(r\sin\varphi) = C + g(\varrho_1 - \varrho_2) z,$$

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}\varphi$$

mit der Randbedingung $\varphi = \pi/2 - \gamma$ für $r = a$.

Ersetzt man — was im Falle eines dünnen Kapillarrohrs wohl erlaubt ist — die Krümmung $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}$ und die Höhe z durch Mittelwerte, etwa

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{2\cos\gamma}{a},\quad z = h$$

(Annahme einer Kugelkalotte mit dem Randwinkel γ für den Meniskus), so erhält man

$$T_{12}\frac{2\cos\gamma}{a} = C + g(\varrho_1 - \varrho_2) h.$$

Steht das Kapillarrohr in Verbindung mit einem Gefäß von großem Querschnitt, in welchem die beiden Flüssigkeiten ebenfalls übereinander-

lagern und der Einfluß der Oberflächenspannung vernachlässigbar ist, so gilt für die Trennungsfläche in diesem

$$0 = C + g(\varrho_1 - \varrho_2)h'.$$

Die Größe $h - h' = \dfrac{2\,T_{12}\cos\gamma}{a\,g(\varrho_1 - \varrho_2)}$ wird die „kapillare Steighöhe“ genannt. Bei vollkommen benetzenden Flüssigkeiten ist $\gamma = 0$, bei gar nicht benetzenden $\gamma = \pi$. Je nach $\cos\gamma \gtrless 0$ ist die Steighöhe positiv oder negativ.

Die Bestimmung der genauen Gestalt der freien Oberfläche kann durch ein numerisches Verfahren geschehen. Eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung erhält man, wenn man statt des achsensymmetrischen das ebene Problem betrachtet, d. h. annimmt, daß die freie Oberfläche eine Zylinderfläche bildet, deren Erzeugenden etwa parallel zur y-Achse liegen. Von den beiden Hauptkrümmungen ist dann nur eine von Null verschieden. Sie heiße $\frac{1}{R}\left(= \dfrac{d\varphi}{ds}\right)$. Für die Schnittkurve in der x-z-Ebene lautet dann das Gleichungssystem

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} T_{12}\dfrac{d\varphi}{ds} = C + g(\varrho_1 - \varrho_2)z, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dz}{dx}. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir, daß $\dfrac{dz}{ds} = \sin\varphi$ ist, so erhalten wir durch nochmalige Differentiation:

$$T_{12}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = g(\varrho_1 - \varrho_2)\sin\varphi,$$

d. h. die Differentialgleichung des Pendels mit endlichem Ausschlag, so daß wir die Lösung mit Hilfe von elliptischen Funktionen vollständig beherrschen können (vgl. III, § 3, 4). Sehr anschaulich ist folgende Analogie:

Denken wir uns einen elastischen Stab in den Punkten A und B festgehalten, und zwar so, daß er in A und B mit bestimmten Richtungen den Winkel γ bildet. Auf den Stab sollen in den Endpunkten zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte X und $-X$, außerdem Momente in A und B wirken.

Die Differentialgleichung für die elastische Linie (s. XVIII, § 1, 3) lautet (φ Neigungswinkel gegen die x-Achse)

$$\text{(11)} \qquad D\frac{d\varphi}{ds} = M_0 + Xz,$$

wobei M_0 das Einspannmoment in A bzw. B, D die Biegungssteifigkeit des Stabes bezeichnet.

Man sieht, daß, wenn man in (10) $\frac{g(\varrho_1 - \varrho_2)}{T_{12}}$ durch $\frac{X}{D}$, C durch $\frac{M_0}{D}$ ersetzt, die Gl. (10) und (11) identisch werden. Aus der Lösung des sogenannten Problems der Elastika kann man daher auf die Form kapillarer Oberflächen schließen.

Wir wollen folgendes Beispiel betrachten:

An der horizontalen Ebene $z = 0$ soll ein zylindrischer Tropfen hängen. Legen wir die z-Achse in die Symmetrielinie des Tropfens (positiv nach unten gerechnet) und nehmen wir für den Randwinkel den Wert Null an, so gelten für die Tropfenoberfläche folgende aus (10) folgenden Bedingungen (für T_{12} sei schlechthin T, für $\varrho_1 - \varrho_2 = \varrho$ geschrieben):

$$T\frac{1}{R} = C - \varrho g z,$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ für } z = 0.$$

Die Begrenzungslinie ist identisch mit der Gleichgewichtsgestalt eines an beiden Enden horizontal eingespannten elastischen Stabes, welcher mit einer bestimmten Kraft zusammengedrückt wird.

Mit $\frac{1}{R} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}$ erhalten wir

$$T\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \varrho g z = C. \tag{12}$$

Wir wollen die Höhe des Tropfens mit h bezeichnen, die halbe Breite mit l. So erhalten wir durch die Substitution $u = z'^2$

$$T\frac{\frac{1}{2}\frac{du}{dz}}{(1+u)^{3/2}} + \varrho g z = C.$$

Die Begrenzungslinie hat einen Inflexionspunkt $\left(\frac{1}{R} = 0\right)$ in der Tiefe

$$z_0 = \frac{C}{\varrho g}.$$

Setzen wir $z = z_0 + \zeta$, so können wir schreiben:

$$T\frac{\frac{1}{2}\frac{du}{d\zeta}}{(1+u)^{3/2}} = \varrho g \zeta. \tag{13}$$

Durch Integration von $\zeta = \mathfrak{h} = h - z_0$ bis zu einem beliebigen ζ erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} - 1 = \frac{\varrho g}{2T}(\zeta^2 - \mathfrak{h}^2)$$

oder

$$u = \frac{1}{\left[1 - \frac{\varrho g}{2T}(\mathfrak{h}^2 - \xi^2)\right]^2} - 1. \tag{14}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir den Verlauf der Begrenzungslinie leicht diskutieren.

Zunächst sieht man, daß u verschwindet, falls $\xi = \pm\mathfrak{h}$ ist, d. h. der Inflexionspunkt liegt gerade in der mittleren Höhe des Tropfens

Fig. 79.

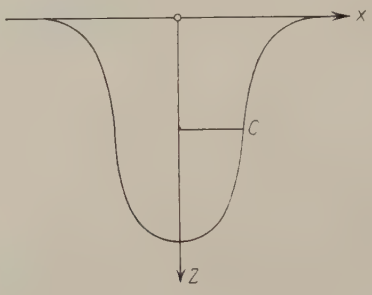


Fig. 80.

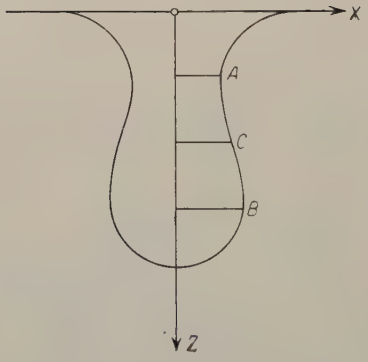
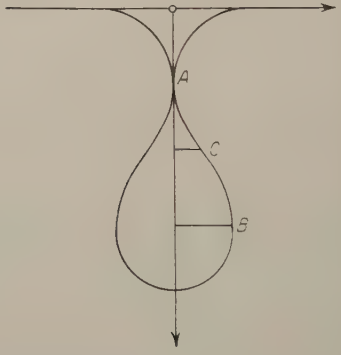


Fig. 81.



$\left(z_0 = \mathfrak{h} = \frac{h}{2}\right)$. Ferner sieht man, daß eine Einschnürung des Tropfens ($u = \infty$) nur entstehen kann, falls

$$\mathfrak{h}^2 \geqq \frac{2T}{\varrho g}, \quad h \geqq \sqrt{\frac{8T}{\varrho g}}$$

beträgt.

Wenn das Gleichheitszeichen gilt, nimmt der Tropfen die in Fig. 79 dargestellte Gestalt an; mit wachsender Höhe h wird der eingeschnürte Querschnitt stets schmaler, bis man die in Fig. 80 dargestellte Gestalt

bekommt. Von Interesse ist der Augenblick, in welchem der Tropfen sich ablöst (Fig. 81), d. h. in welchem die Oberflächenkurve die z-Achse berührt.

Die drei charakteristischen Punkte A, B, C haben die Höhenkoordinaten $\zeta = -\sqrt{\mathfrak{h}^2 - \frac{2T}{\varrho g}}$, $\zeta = \sqrt{\mathfrak{h}^2 - \frac{2T}{\varrho g}}$, $\zeta = \mathfrak{h}$. Soll die Kurve in A berühren, so muß

$$\int_A^C dx = \int_A^C \frac{d\zeta}{\sqrt{u}} = 0$$

sein. Rechnet man die (elliptischen) Integrale durch Einsetzen von u aus (14) aus, so erhält man nach 1. Bd., S. 138 als Bedingung die transzendente Gleichung

$$\left(\text{mit } \varkappa^2 = \frac{\mathfrak{h}^2 \varrho g}{2T}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\right)$$

$$2\{2E(\varkappa) - K(\varkappa)\} = \int_0^{\varphi_1} \left(2\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} - \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}\right) d\varphi = 0,$$

oder daraus

$$\varkappa = \sin 58^0\,46',$$

$$h \cong 3{,}32\sqrt{\frac{T}{\varrho g}}.$$

Diese Größe liefert die Höhe des hängendes Tropfens, bei welcher er sich von der horizontalen Ebene loslöst.

Betrachten wir dagegen ganz flache Tropfen, d. h. nehmen wir $\frac{dz}{dx} = \sqrt{u}$ klein an, so lautet die Differentialgleichung (12) der Oberfläche angenähert

$$Tz'' + \varrho g z = C.$$

Die Lösung lautet

$$z = \frac{C}{\varrho g} + A\cos\sqrt{\frac{\varrho g}{T}}\,x.$$

Soll für $z = 0$ auch $\frac{dz}{dx} = 0$ gelten, so muß einerseits die Konstante $A = \frac{C}{2\varrho g}$, andererseits die halbe Tropfenbreite $l = \sqrt{\frac{T}{\varrho g}}\,\pi$ betragen. Dies ist die größte Breite eines hängenden Tropfens. (Die Formel erinnert an die Eulersche Knickformel.)

§ 2. Die Dynamik idealer Flüssigkeiten.

1. Begriffsbestimmungen. Der Strömungszustand einer Flüssigkeit ist bestimmt, wenn wir die Strömungsgeschwindigkeit als Funktion des Ortes und der Zeit angeben. Die Strömungsgeschwindigkeit ist ein Vektor, wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{v}$, ihre Komponenten mit u, v, w. Falls $\mathfrak{v}$ (bezogen auf ein bestimmtes Koordinatensystem) nur vom Ort und nicht von der Zeit abhängt, so nennen wir die Strömung in bezug auf dieses Koordinatensystem stationär. Linien, deren Tangenten in einem Augenblick die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit angeben, sind Stromlinien, die Linien, welche die geometrischen Orte, welche ein Flüssigkeitsteilchen im Laufe der Zeit einnimmt, verbinden, Bahnlinien. Bei der stationären Strömung fallen Bahnlinien und Stromlinien zusammen.

2. Kinematische Beziehungen. Die drei Funktionen u, v, w sind nicht unabhängig voneinander; sie sind durch die sogenannte Kontinuitätsgleichung verknüpft, welche die Erhaltung der Materie bei der Strömung ausdrückt. Wir definieren den Vektor $\mathfrak{s} = \varrho\,\mathfrak{v}$ (ϱ = Dichte der Flüssigkeit, $\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeitsvektor) als den „Stromvektor“. Seine Komponenten ϱu, ϱv, ϱw liefern die Menge der Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit durchströmt, entsprechend den drei Koordinatenebenen. Der Zuwachs der Materie infolge der Zu- und Abströmung an einem Würfel von der Kantenlänge Eins ist infolgedessen gleich $\operatorname{div}\mathfrak{s}$ [s. 1. Bd., S. 68, (20)], und die Erhaltung der Materie fordert, daß die Beziehung

$$(1)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{s} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w) = 0$$

bestehe. Diese Gleichung wird die Kontinuitätsgleichung genannt.

Für eine inkompressible Flüssigkeit (ϱ = konst) lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$(2)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Wir legen ein orthogonales Koordinatenachsenkreuz x', y', z' in einen Punkt x, y, z der Flüssigkeit. Man kann sich nun die Frage stellen, was mit diesem Achsenkreuz während des nächsten Zeitelements Δt vor sich geht, falls wir die Koordinatenachsen mit den Flüssigkeitsteilchen fest verbunden denken. Genauer gesagt, wir betrachten außer dem Punkt P_0 (x, y, z) drei andere Punkte P_1, P_2, P_3, welche zur Zeit t auf den Achsen x, y, z im Abstand von $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ liegen. Wir verfolgen die Punkte P_0 und P_1, P_2, P_3 während der

Zeit Δt und verbinden die neuen Lagen der Punkte wieder durch ein Achsenkreuz. Die neuen Lagen sind offenbar:

für P_0 $\quad x + u\Delta t, \quad y + v\Delta t, \quad z + w\Delta t,$

„ P_1 $x + \Delta x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t, \quad y + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t,$

$z + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t,$

„ P_2 $\quad x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t, \quad y + \Delta y + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t,$

$z + \left(w + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t,$

„ P_3 $\quad x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\right)\Delta t, \quad y + \left(v + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z\right)\Delta t,$

$z + \Delta z + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right)\Delta t.$

Der Bewegungszustand des Volumenelements ist daher durch folgende Größen gekennzeichnet, die zusammen einen Tensor (s. 1. Bd., II, § 4) bilden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Dieser „derivierte Tensor“ des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ [s. 1. Bd., S. 79, Gl. (13′)] zerfällt nach Bd. 1, II, § 4, **3** in einen symmetrischen Tensor, den Tensor der „Deformationsgeschwindigkeiten“ (der die zeitliche Änderung des XVII, § 2, **3** behandelten Verzerrungstensors ist):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

und in einen antisymmetrischen

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{vmatrix}.$$

Der letztere ist äquivalent einem Vektor mit den drei Komponenten

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

d. h. dem Vektor $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ [s. 1. Bd., S. 68, (23)].

Der physikalische Sinn des symmetrischen Tensors ist (nach XVII, § 2, **3**) der folgende:

Die drei Größen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ liefern die „Dehnungsgeschwindigkeiten“ des Flüssigkeitselements, d. h. die Zunahme der Strecke zwischen zwei materiellen Punkten vom Abstand Eins während der Zeiteinheit, wenn die Strecke zwischen beiden Punkten abwechselnd auf die x, y, z-Achse gelegt wird.

Die drei Größen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

liefern die „Schiebungsgeschwindigkeiten“, d. h. die Änderung des rechten Winkels zwischen den Strecken Δx, Δy, Δz ebenfalls in der Zeiteinheit.

Der Vektor $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ liefert die „Drehgeschwindigkeit“ des Volumenelementes in folgendem Sinne:

Unter den orthogonalen Achsensystemen im Punkte x, y, z gibt es ein Achsenkreuz, welches keine Winkeländerungen erleidet. Dieses Achsensystem, das Hauptachsensystem des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten, führt, abgesehen von Längenänderungen der Achsen, eine Bewegung wie ein starres System aus. Die Drehgeschwindigkeit (Drehvektor) dieses Achsenkreuzes im Sinne der Mechanik starrer Körper (S. 92, Fußnote) ist gleich der Hälfte des Vektors $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$.

Der Vektor $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ wird der Wirbelvektor oder schlechthin der Wirbel im Punkte x, y, z zur Zeit t genannt.

3. Wirbelfreie Strömung. Wenn der Wirbel in jedem Punkte eines Bereiches verschwindet, so sagen wir: im Bereich herrscht eine „wirbelfreie Strömung“.

Die wirbelfreie Strömung hat ein „Potential“ [s. 1. Bd., S. 469, (1)]. Die Bedingung $\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0$ ist nämlich gleichbedeutend damit, daß die Geschwindigkeit als Gradient einer skalaren Größe φ, des „Geschwindigkeitspotentials“, dargestellt werden kann. Es heißt daher:

$$\mathfrak{v}=\operatorname{grad}\varphi, \tag{3}$$

oder in Komponenten geschrieben:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{4}$$

Das Linienintegral der Geschwindigkeit, d. h. das Integral über das skalare Produkt der Geschwindigkeit in das Linienelement, ist gleich der Differenz zwischen den Potentialwerten am Anfangs- und Endpunkt der Integration. Wenn daher in einem einfach zusammenhängenden Bereich überall wirbelfreie Strömung herrscht, so ist das Linienintegral der Geschwindigkeit längs einer beliebigen geschlossenen Linie gleich Null (1. Bd., S. 72). In einem mehrfach zusammenhängenden Bereich kann das Linienintegral von Null verschieden sein, und zwar sowohl dann, wenn der mehrfach zusammenhängende Bereich einen festen Körper, als auch in dem Falle, daß er einen mit Wirbelbewegung erfüllten Raum umschlingt. Den Wert des Linienintegrals, den man bei einmaliger Umschlingung erhält und der offenbar vom Integrationsweg unabhängig ist, nennt man die Zirkulation, eine Strömung, bei welcher die Zirkulation von Null verschieden ist, eine Zirkulationsströmung.

Bei einer inkompressiblen Flüssigkeit genügt das Potential infolge der Kontinuitätsbedingung (2) und Gl. (4) der Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{5}$$

also der Laplaceschen Differentialgleichung [s. 1. Bd., S. 471, (5)]. Zieht man die Stromlinien, d. h. Linien, welche in jedem Punkte die Richtung des Geschwindigkeitsvektors haben, so stehen dieselben senkrecht zu den Flächen gleichen Potentials (Äquipotentialflächen). Man wähle eine Potentialfläche aus und zeichne eine orthogonale Kurvenschar so, daß durch jedes Viereck dieselbe Flüssigkeitsmenge durchströmt. Wir legen durch diese Kurvenschar Stromlinienflächen durch (d. h. Flächen, welche die Stromlinien ganz enthalten), so daß die entstehenden Stromröhren alle von der gleichen Flüssigkeitsmenge durchströmt werden. Die Äquipotentialflächen liefern die „Querschnitte“ dieser Röhren. Sowohl der Querschnitt als der Abstand zweier nachfolgender Äquipotentialflächen (von den Äquipotentialflächen wählen wir solche aus, die gleichen Potentialstufen entsprechen) ist dann der Geschwindigkeit umgekehrt proportional. Das System der Äquipotentialflächen und Stromröhren teilt den Raum in lauter ähnliche Parallelepipede ein.

4. Wirbelströmung. Ist der Wirbel von Null verschieden, so nennen wir die Strömung eine Wirbelströmung. Die Wirbelströmung kann — außer durch die Stromlinien — gekennzeichnet werden durch die „Wirbellinien“, d. h. durch Linien, welche überall die Richtung des Wirbelvektors haben. Betrachten wir eine „Wirbelröhre“, d. h. eine Röhrenfläche, deren Mantel von Wirbellinien gebildet wird, so ist wegen des Satzes über das Volumintegral einer Divergenz [1. Bd., S. 70, (29)] die Differenz der Flächenintegrale $\int_{(f)} \bar{\omega}_n \, df$ ($\bar{\omega} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$, $f =$ Querschnitt) zwischen

zwei Querschnitten gleich dem Integral über das Volumenelement, multipliziert mit der Divergenz des Wirbelvektors. Da nun identisch

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$$

ist, so ist der Wirbelfluß $\int_{(f)} \bar{\omega}_n \, df$ längs einer Röhre konstant. Mit anderen Worten: die Wirbellinien sind wie die Stromlinien einer inkompressiblen Flüssigkeit; eine Wirbellinie kann im Innern der Flüssigkeit nicht beginnen und nicht aufhören. Das Produkt $\bar{\omega}_n \Delta f$ nennt man auch das Wirbelmoment der Röhre. Eine mit Wirbellinien durchsetzte Röhre nennen wir auch einen Wirbelstrang.

Ein Wirbelstrang von sehr kleinem Querschnitt wird Wirbelfaden genannt; wenn er in der Flüssigkeit geschlossen ist, so sprechen wir von einem Wirbelring. Wird ein Wirbelring von Flüssigkeit umgeben, welche selbst in einer (wirbelfreien) Potentialströmung begriffen ist, so ist die Zirkulation der letzteren gleich dem Wirbelmoment des Wirbelfadens.

5. Anwendung auf die ebene Bewegung. Bei der ebenen Strömung ($w = 0$, $xy =$ Strömungsebene) läßt sich der Wirbel einfacher und anschaulicher deuten. Legen wir in den Punkt x, y ein Achsenkreuz, das die Bewegung des dort befindlichen Teilchens mitmacht, so drehen sich beide Achsen im allgemeinen um die z-Achse; die Drehgeschwindigkeit der x-Achse beträgt $\frac{\partial v}{\partial x}$, die Drehgeschwindigkeit der y-Achse $-\frac{\partial u}{\partial y}$; die „mittlere Drehgeschwindigkeit" ist daher $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. In diesem Falle steht der Wirbelvektor in jedem Punkte senkrecht zur Strömungsebene. Wir haben ein Wirbelfeld $\omega(x, y)$, welches die Strömung vollständig bestimmt.

Die Bedingung der Wirbelfreiheit lautet für die zweidimensionale Strömung

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so existiert ein Potential, so daß

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{6}$$

beträgt. Aus der Kontinuitätsgleichung (2) folgt für inkompressible Flüssigkeiten

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

Andererseits ist die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten identisch erfüllt (unabhängig davon, ob die Bewegung wirbelfrei

ist oder nicht), wenn u und v sich aus einer Stromfunktion ψ etwa wie folgt ableiten lassen:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{8}$$

Die Linien $\psi =$ konst sind Stromlinien. Die Differenz der Werte ψ für zwei Stromlinien ist gleich dem zwischen den beiden Stromlinien und zwei Ebenen $z =$ konst. im Abstand Eins durchströmenden Flüssigkeitsvolumen. Ist die Bewegung wirbelfrei, so ist

$$\Delta \psi = 0, \tag{9}$$

d. h. sowohl die Potential- als die Stromfunktion sind harmonische Funktionen im Sinne von Bd. 1, S. 530. Da nach (6) und (8) für φ und ψ die Cauchy-Riemannschen partiellen Differentialgleichungen gelten, ist nach Bd. 1, S. 530 $\varphi + i\psi$ eine komplexe Funktion der Variablen $z = x + iy$.

Die Linien $\varphi =$ konst und $\psi =$ konst bilden ein orthogonales Netz. Werden die Linien $\varphi =$ konst entsprechend gleichen Potentialstufen und die Linien $\psi =$ konst so gezeichnet, daß zwischen zwei benachbarten Linien gleiche Flüssigkeitsmengen durchströmen, so sind die Abstände zwischen zwei nachfolgenden Linien beider Scharen der Geschwindigkeit umgekehrt proportional, d. h. die durch das Kurvennetz entstehenden Vierecke sind ähnlich; sie liefern eine konforme Abbildung zwischen den Ebenen x, y und φ, ψ (s. 1. Bd., III, § 1, **3**, **4**).

Der Wirbel $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ ist nach (8) gleich $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$; ist die Strömung von Wirbelfäden durchsetzt, so erscheinen sie in der xy-Ebene als Wirbelpunkte, mathematisch gesprochen als singuläre Punkte der Funktion $\varphi + i\psi$.

6. Die Bewegungsgleichungen reibungsfreier Flüssigkeiten. Eine reibungsfreie oder ideale Flüssigkeit wird dadurch gekennzeichnet, daß auch in bewegtem Zustand keine Schubspannungen (s. XVII, § 1) auftreten. Der Spannungszustand ist daher[1]) in jedem Punkte durch eine nach allen Richtungen gleiche Normalspannung (Normaldruck) gegeben. Ist die Flüssigkeit in Ruhe und wirkt auf das Volumenelement die Kraft $\mathfrak{P}$ mit den Komponenten X, Y, Z (bezogen auf die Masseneinheit), so ist die Bedingung des Gleichgewichtes, wie wir in § 1 gesehen haben,

$$\varrho \mathfrak{P} - \operatorname{grad} p = 0. \tag{10}$$

[1]) Aus XVII, § 2, (12) folgt nämlich, daß bei Verschiedenheit der drei Hauptspannungen σ_h sich von Null verschiedene Schubspannlagen τ_{xy} ergeben, während gleiche σ_h sich aus der Summe herausheben, die dann wegen der Orthogonalität der Hauptspannungsrichtungen verschwindet.

Bei der bewegten Flüssigkeit tritt auf der rechten Seite die Masse des Volumenelementes multipliziert mit der jeweiligen Beschleunigung auf.

Zur Berechnung der Beschleunigung dient folgende etwas allgemeinere Überlegung. Ist eine Vektorgröße $\mathfrak{a}$ oder eine skalare Größe b mit der strömenden Materie verbunden und bezeichnen wir die Strömungsgeschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$, den Operationsvektor mit den drei Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ mit ∇ (s. 1. Bd., S. 69), so liefert der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{a}$$

bzw.

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)b$$

die Änderung der betreffenden Größen $\mathfrak{a}$ bzw. b in der Zeiteinheit.

In der Tat, wenn wir $\mathfrak{a}$ bzw. b als Funktion von t und von x, y, z betrachten, so ist die Änderung von $\mathfrak{a}$ in dem Zeitraum Δt gleich

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}\Delta x' + \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y}\Delta y' + \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial z}\Delta z',$$

wenn $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ die Verschiebung des Punktes in der Zeiteinheit bedeuten sollen. Nun gilt offenbar

$$\Delta x' = u\Delta t, \quad \Delta y' = v\Delta t, \quad \Delta z' = w\Delta t,$$

so daß der obige Ausdruck die Gestalt erhält

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial z}\right)\Delta t$$

und die Änderung in der Zeiteinheit

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{a}. \tag{11}$$

Dasselbe gilt für die Änderung der skalaren Größe b.

Die Beschleunigung eines materiellen Teilchens ist infolgedessen

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v},$$

und die Bewegungsgleichung lautet in Erweiterung von (10):

$$\varrho\mathfrak{P} - \operatorname{grad} p = \varrho\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \varrho(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}, \tag{12}$$

oder in Komponenten

$$\begin{cases} \varrho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \varrho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \varrho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \varrho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \varrho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \varrho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{12'}$$

Die Bewegungsgleichungen in dieser Form werden die Eulerschen Gleichungen der Flüssigkeitsbewegung genannt. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (2) liefern sie vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten u, v, w, p.

7. Energie- und Impulssätze. Multiplizieren wir die drei Gl. (12′) mit u bzw. v und w, so erhalten wir durch Addition

$$\left\{\begin{aligned}&\varrho\,(Xu+Yv+Zw)-\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)\\&\quad=\varrho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{q^2}{2},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

wobei $q=u^2+v^2+w^2$ ist.

Wir beschränken uns auf stationäre Vorgänge. Alsdann können wir die Gl. (13) zwischen zwei Punkten einer Stromlinie längs derselben integrieren und erhalten

$$\int_1^2 \mathfrak{P}\,ds-\int_1^2\frac{dp}{\varrho}=\frac{q_2^2-q_1^2}{2}. \tag{14}$$

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten und Existenz eines Potentials V für die Kraft $\mathfrak{P}$ erhalten wir die Gleichung in folgender Gestalt:

$$V_2+\frac{p_2}{\varrho}+\frac{q_2^2}{2}=V_1+\frac{p_1}{\varrho}+\frac{q_1^2}{2} \tag{15}$$

(Bernoullische Gleichung). Das erste Glied ist die potentielle Energie der Masseneinheit, das letzte die kinetische Energie derselben; die Größe p/ϱ kann als „Druckenergie“ gedeutet werden. Die Gl. (15) sagt alsdann die Konstanz der Energie längs der Stromlinie aus.

Der Satz über die Erhaltung der Bewegungsgröße (Impulssatz) drückt sich für Flüssigkeiten in folgender Weise aus:

Wir betrachten die Flüssigkeitsmenge, welche in dem Raume R enthalten ist. Wenn die Bewegungsgröße derselben mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet wird (mit den Komponenten $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$), so ist die Änderung des Impulses in der Zeiteinheit gleich der Resultierenden der Kräfte, wobei als Kräfte die über das Volumen verteilten Kräfte und die Drucke auf die Oberfläche des Raumteiles R zu nehmen sind. Wir schreiben daher mit df als Flächenelement, $\mathfrak{n}$ als Einheitsvektor in der Richtung der Flächennormale und $\mathfrak{P}$ als Resultierender der über das Volumen verteilten Kräfte:

$$\mathfrak{P}+\int_{(f)} p\,df\,\mathfrak{n}=\frac{d\mathfrak{g}}{dt}.$$

Nun läßt sich $d\mathfrak{g}/dt$ durch die zeitliche Änderung der Impulsmenge $\mathfrak{g}$ im Raume R und durch den Impulsstrom, d. h. durch die

an der Oberfläche des Raumteiles R ein- und ausströmende Bewegungsgröße ausdrücken. Die zur Zeit t im Raume R befindliche Flüssigkeitsmenge wird zur Zeit $t + \Delta t$ einen Raum R' einnehmen, den wir erhalten, indem wir von jedem Punkt der Oberfläche den Vektor $\mathfrak{v}\Delta t$ auftragen. Die Endpunkte dieser Vektoren liefern die Grenzfläche des Raumes R'. Bildet man die Differenz zwischen der Bewegungsgröße, welche zur Zeit $t + \Delta t$ sich im Raume R' und im Raume R sich befindet, so ist diese Differenz offenbar gleich der Bewegungsgröße, welche aus dem Raume R durch die Oberfläche ausgetreten ist, abzüglich der Bewegungsgröße, welche durch dieselbe eingetreten ist. Der Impulsstrom durch ein Flächenelement ist offenbar $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\varrho\,df\ \mathfrak{v}$, so daß wir die Änderung des Impulses in der Zeiteinheit als Summe eines Raum- und eines Oberflächenintegrals ausdrücken können:

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \int\limits_{(v)} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}\, dv + \int\limits_{(f)} \varrho(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\mathfrak{v}\, df.$$

Der Impulssatz lautet daher

$$\mathfrak{P} + \int\limits_{(f)} p\mathfrak{n}\, df = \int\limits_{v} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}\, dv + \int\limits_{(f)} \varrho(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\mathfrak{v}\, df \tag{16}$$

oder mit Worten:

Die Änderung der in einem Raume befindlichen Bewegungsgröße in der Zeiteinheit, zuzüglich des Überschusses der durch die Oberfläche in der Zeiteinheit austretenden Bewegungsgröße über die eintretende, ist gleich der Resultierenden der über das Volumen verteilten Kräfte und der auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte.

Wir wollen den Satz auf den Einheitswürfel anwenden und in Komponenten schreiben.

Die Komponenten der Bewegungsgröße für die Volumeneinheit lauten offenbar ϱu, ϱv, ϱw. Die zeitlichen Änderungen betragen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u),\ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v),\ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho w).$$

Die Komponenten des Impulsstromes durch die drei Grenzflächen lauten:

(17)

	Durch die Grenzfläche		
	$x =$ konst	$y =$ konst	$z =$ konst
x-Komponente	ϱu^2	ϱuv	ϱuw
y-Komponente	ϱuv	ϱv^2	ϱvw
z-Komponente	ϱuw	ϱvw	ϱw^2

d. h. die Komponenten des Impulsstromes bilden einen Tensor. Der Überschuß der ausströmenden Impulsmenge beträgt offenbar für die

$$x\text{-Komponente: } \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho uw),$$

$$y\text{-Komponente: } \frac{\partial}{\partial y}(\varrho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho vw),$$

$$z\text{-Komponente: } \frac{\partial}{\partial z}(\varrho uw) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho vw) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w^2).$$

Die Resultierende der Kräfte und der Drucke an den Grenzflächen liefert die Komponenten

$$\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x},\ \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y},\ \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z},$$

so daß die Impulsgleichungen in ihrer Differentialgestalt im Gegensatz zur Integralgestalt (16) lauten:

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\varrho u) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\varrho u^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\varrho uv) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\varrho uw), \\ \varrho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\varrho uv) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\varrho v^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\varrho vw), \\ \varrho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\varrho w) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\varrho uw) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\varrho vw) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\varrho w^2), \end{cases}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$(19)\qquad \varrho \mathfrak{P} - \operatorname{grad} p = \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathfrak{v}) + \nabla \cdot S,$$

wobei S den durch das Schema (17) definierten Tensor „Impulsstrom“ und ∇S den durch Derivation im Sinne von Bd. 1, S. 79, (13′) daraus abgeleiteten Vektor bezeichnet. Berücksichtigt man die Kontinuitätsgleichung, so sieht man unmittelbar, daß diese Gleichungen mit den Eulerschen identisch sind.

8. Anwendung auf wirbelfreie Bewegung. Setzen wir

$$(20)\qquad \mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

so lautet die Bewegungsgleichung einer inkompressiblen Flüssigkeit[1]):

$$(21)\qquad \mathfrak{P} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2\right),$$

wobei wir für das Quadrat der Geschwindigkeit q^2 schreiben. Man kann dies leicht verifizieren, indem man z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

[1]) Nach Bd. 1, S. 69, Gl. (26) (vierte Gleichung) besteht die identische Beziehung $\operatorname{grad}(\mathfrak{v}^2) = 2(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{v} + 2(\mathfrak{v} \times \operatorname{rot}\mathfrak{v})$. Deshalb folgt für $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ aus (12′) und (20) die obige Gleichung.

bildet. Der Ausdruck ist offenbar nach (20) gleich

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right].$$

Wir erhalten daher nach (12) und (12′)

$$\mathfrak{P}=\operatorname{grad}\left[\frac{p}{\varrho}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2\right].$$

Im Falle einer kompressiblen Flüssigkeit tritt statt $\frac{p}{\varrho}$ die Funktion

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho}=\Pi$$

auf.

Eine wirbelfreie Bewegung kann daher nur bestehen, wenn das Kraftfeld, und zwar bezogen auf die Masseneinheit, ebenfalls ein Potential hat. In diesem Falle sind die Bewegungsgleichungen erfüllt und sie liefern den Wert des Druckes (bestimmt bis auf eine Konstante p_0) mittels der Gleichung

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho}=-V-\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}q^2, \tag{22}$$

wobei V das Kräftepotential bedeutet. Für konstantes ϱ steht links einfach $\frac{p-p_0}{\varrho}$.

Mit anderen Worten: — wenn wir zunächst von den Randbedingungen absehen — stellt in einem konservativen Kräftefeld jede Funktion $\varphi(t,x,y,z)$, welche der Gleichung $\Delta\varphi=0$ genügt, einen in einer reibungsfreien Flüssigkeit möglichen Strömungszustand dar; wenn das Kräftefeld nicht konservativ ist, kann die Bewegung nicht ständig wirbelfrei sein.

Die Ermittlung der Strömung, welche in einem wirklich gegebenen Falle eintritt, hängt naturgemäß von den Randbedingungen ab.

9. Wirbelbewegung. Wir wählen als Ausgangspunkt die Gl. (12) (mit der Einschränkung, daß das äußere Kraftfeld ein Potential V hat)

$$-\operatorname{grad}V-\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad}p=\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}$$

und nehmen an beiden Seiten die Operation rot vor. Mit Rücksicht darauf, daß $\operatorname{rot}\operatorname{grad}=0$ ist, liefert die linke Seite Null. Die rechte Seite liefert

$$\frac{\partial \operatorname{rot}\mathfrak{v}}{\partial t}+\operatorname{rot}\{(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\}.$$

Setzen wir nach Bd. 1, S. 69, Gl. (26)

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v},$$

so wird wegen $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathfrak{v}^2 = 0$ bei Einführung des Symbols ∇ [vgl. Bd. 1, S. 69, Gl. (24)

$$\operatorname{rot}[(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}] = \nabla\times(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = -\operatorname{rot}(\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v})$$
$$= \operatorname{rot}\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\times\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} + (\mathfrak{v}\nabla)\operatorname{rot}\mathfrak{v} - (\operatorname{rot}\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}.$$

Entsprechend der Kontinuitätsgleichung (2) ist das erste Glied gleich Null, das zweite Glied verschwindet identisch. Folglich erhalten wir die Bewegungsgleichung in der Form:

$$\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathfrak{v})}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\operatorname{rot}\mathfrak{v} - (\operatorname{rot}\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = 0$$

oder, wenn wir $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \overline{\omega}$ setzen:

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\overline{\omega} = (\overline{\omega}\nabla)\mathfrak{v}. \tag{23}$$

Diese Gleichung läßt eine überaus einfache und anschauliche Deutung zu:

Der Vektor $\overline{\omega}$ bestimmt die Richtung der Wirbellinie. Wir tragen von einem Punkt P aus die Strecke ω auf der Wirbellinie auf. Die Geschwindigkeit am Endpunkt dieser Strecke beträgt offenbar $\mathfrak{v} + (\overline{\omega}\nabla)\mathfrak{v}$.

Andererseits wollen wir den Punkt P um die Strecke $\mathfrak{v}$ verschieben und in dem so gewonnenen Punkte den Wirbelvektor bilden. Nach Gl. (11) ist die Änderung des Wirbelvektors bei dieser Verschiebung

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\overline{\omega}.$$

Nach Gl. (23) ist nun $\dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\overline{\omega}$ gleich $(\overline{\omega}\nabla)\mathfrak{v}$.

Wenn wir also die Strecke $\overline{\omega}$ als materielle Linie auffassen und mit der Strömung nach P verschoben denken, so deckt sie sich mit dem in P konstruierten Wirbelvektor. Mit anderen Worten: jedes Stück der Wirbellinie bewegt sich wie eine materielle Linie in der Flüssigkeit; an der Wirbellinie liegen stets dieselben materiellen Punkte der Flüssigkeit. (Erster Helmholtzscher Wirbelsatz.) „Der Wirbel haftet an der Materie."

Betrachten wir eine Wirbelröhre oder einen Wirbelstrang mit dem Querschnitt Δf_n und von der Länge ω, so ist das in der Röhre eingeschlossene Volumen $\Delta f_n\omega$, und da die Wirbelröhre stets von denselben materiellen Teilchen gebildet wird, ist offenbar

$$\varrho\,\Delta f_n\omega = \text{konst}$$

während der Gesamtbewegung. Das Wirbelmoment multipliziert mit der Dichte bleibt während der Bewegung unverändert. Bei einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte ist das Wirbelmoment $\Delta f_n \omega$ konstant.

Dieser Satz, welcher auch als der zweite Helmholtzsche Wirbelsatz bezeichnet wird, kann auch als eine Folge des Satzes vom Drehimpuls gedeutet werden. Nehmen wir den Querschnitt des Wirbelstranges angenähert als Kreisfläche mit dem Radius r an, so ist das Trägheitsmoment eines Zylinders von der Grundfläche $r^2\pi$ und Höhe ω gleich $\frac{r^4\pi}{2}\omega$, die Drehgeschwindigkeit gleich $\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$, d. h. nach S. 97, Gl. (20) der Drehimpuls $\frac{r^4\pi\omega^2}{4}$. Nach dem Helmholtzschen Satze ist nun $r^2\pi\omega = \text{konst}$, so daß man sagen kann, daß nach diesem Satze der Drehimpuls während der Bewegung erhalten bleibt. Dies ist eine Folge des Umstandes, daß wir in der Flüssigkeit nur Normaldrucke haben, so daß das Drehmoment der Kräfte auf ein Volumenelement verschwindet. Aus diesem Grunde ist die Gültigkeit des Satzes auf reibungslose Flüssigkeiten beschränkt.

§ 3. Ebene Potentialströmung.

1. Potentialfunktion und Stromfunktion. Eine Flüssigkeitsströmung, bei welcher die Bewegung in parallelen Ebenen in gleicher Weise erfolgt, bezeichnen wir als ebene Flüssigkeitsströmung. Wir wählen eine dieser Ebenen als x, y-Ebene und bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten mit u, v. Ist die Strömung wirbellos, so können wir die Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ einführen, deren Ableitungen

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1}$$

die Geschwindigkeitskomponenten angeben. Wir beschränken uns auf nichtkompressible Flüssigkeiten.

Wir haben für diesen Fall (§ 2, 5) gezeigt, daß sowohl die Potentialfunktion φ, als die Stromfunktion ψ, die mit den Geschwindigkeitskomponenten durch den Ansatz $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ verbunden ist, der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ bzw. $\Delta\psi = 0$ genügt, oder aber daß wir $f = \varphi + i\psi$ als eine Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ auffassen können. Wir nennen f die komplexe Stromfunktion. Jede analytische Funktion f der komplexen Variablen $x + iy$ bestimmt eine ebene Potentialströmung. Der Differentialquotient $\frac{df}{dz}$ ist offenbar (vgl. 1. Bd., S. 97) gleich

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = u - iv. \tag{2}$$

Die komplexe Funktion $w(z) = u - iv$ wollen wir als die komplexe Geschwindigkeitsfunktion bezeichnen. Ihr absoluter Wert ist gleich dem absoluten Werte der Geschwindigkeit; wenn wir einerseits w, andererseits die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als Vektor auftragen, so bildet der w-Vektor das Spiegelbild des Geschwindigkeitsvektors in bezug auf die x-Achse.

Man kann daher die Ermittlung eines ebenen Strömungsbildes stets als eine Abbildungsaufgabe zwischen zweien von den drei komplexen Ebenen $z = x + iy$, $w = u - iv$, $f = \varphi + i\psi$ auffassen.

2. Quelle, Senke und Wirbelfaden. Eine einfache Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$, welche in der Theorie des zweidimensionalen Potentials eine große Rolle spielt, ist die Funktion $\varphi = \log r$ (vgl. 1. Bd., S. 472). Wir können daher vermuten [vgl. 1. Bd., S. 94, (6)], daß diese Potentialfunktion bzw. die komplexe Potentialfunktion $f = C \log z$ einen besonders einfachen Strömungszustand darstellt. Wir setzen

$$f = (A + iB) \log z \tag{3}$$

und untersuchen zunächst $f = A \log z$. Die entsprechende Geschwindigkeitsfunktion lautet

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{A}{z} = A \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

d. h. in Polarkoordinaten

$$u = \frac{A}{r} \cos\vartheta, \quad v = \frac{A}{r} \sin\vartheta. \tag{5}$$

Die Geschwindigkeit liegt offenbar in der radialen Richtung und ist umgekehrt mit der Entfernung proportional. Der Punkt $z = 0$ stellt einen Quellenpunkt (bzw. den Schnittpunkt einer zur Ebene senkrechten Quellenlinie) dar, dessen Ergiebigkeit (Durchflußmenge zwischen zwei parallelen Ebenen im Abstande Eins) $Q = \frac{A}{r} 2\pi r = 2\pi A$ beträgt. Falls $A < 0$ ist, so nennen wir das Gebilde eine Senke. Bilden wir die durchfließende Menge für einen sehr großen Kreis, so nimmt die Geschwindigkeit zwar zu Null ab, die Durchflußmenge bleibt aber endlich. Wir sagen: der Unendlichkeitspunkt entspricht für $Q > 0$ einem Senken-, für $Q < 0$ einem Quellenpunkt.

Die Potentialfunktion $f = Bi \log z$ lautet mit $z = re^{i\vartheta}$

$$f = iB \log r - B\vartheta. \tag{6}$$

Die Stromlinien sind Kreise ($r =$ konst). Die Zirkulation (§ 2, 3) ist offenbar $\Gamma = -2B\pi$. Der Punkt $z = 0$ bildet einen Wirbelfaden. Die Geschwindigkeit hat den absoluten Wert $\frac{\Gamma}{2\pi r}$. Wir bilden für $f = (A + iB) \log z = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \log z$ das Integral $J = \int w dz$ über eine

geschlossene Kurve, welche den Punkt $z = 0$ umschlingt. Man erhält offenbar $J = \Gamma + iQ$. Im allgemeinen liefert der imaginäre Teil des Integrals $\oint w dz$ die Summe der Ergiebigkeiten der innerhalb der Kurve befindlichen Quellen und der Realteil die Summe der Zirkulationen der im Innern befindlichen Wirbelfäden.

3. Strömung um einen festen Körper. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Strömung die ganze x, y-Ebene mit Ausnahme eines einfach zusammenhängenden Gebietes erfüllt. Das letztere soll den Querschnitt eines zylindrischen Körpers darstellen, welcher von der Flüssigkeit umströmt wird. Wir nehmen ferner an, daß die Geschwindigkeitskomponenten im Unendlichen den Werten $u = U$, $v = V$ zustreben. Die Aufgabe kann man auch so deuten, daß wir in einer Flüssigkeit, welche im Unendlichen ruht, einen zylindrischen Körper gleichförmig und geradlinig mit den Geschwindigkeitskomponenten $-U$, $-V$ bewegen. Die oben gekennzeichnete Strömung gibt alsdann die Relativbewegung der Flüssigkeit gegen diesen Körper an.

Wir wollen zunächst die Strömung um einen Kreis mit dem Halbmesser R ermitteln. Zunächst ist es klar, daß wir — ohne die Allgemeinheit der Aufgabe einzuschränken — $V = 0$ setzen, d. h. die Geschwindigkeit im Unendlichen parallel zur x-Achse annehmen können. Betrachten wir zunächst die beiden komplexen Ebenen $z = x + iy$ und $f = \varphi + i\psi$, so haben wir folgende Abbildungsaufgabe zu lösen.

a) Der außerhalb des Kreises mit dem Halbmesser R liegende Teil der z-Ebene muß auf die ganze f-Ebene abgebildet werden.

b) Für $z = \infty$ muß $w = U$ gelten.

Die Abbildungsfunktion lautet, wie man leicht verifizieren kann (vgl. 1. Bd., III, § 2, 4),

$$f_1 = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{7}$$

In der Tat gilt zunächst für den Kreis mit dem Halbmesser R $z = Re^{i\vartheta}$, daher $f_1 = 2UR\cos\vartheta$.

Der Kreis mit dem Halbmesser R gehört mithin zu der Stromlinie $\psi = 0$; die reelle Achse $\psi = 0$ der φ, ψ-Ebene wird abgebildet auf die Strecken $-R < x < R$ der x-Achse und auf die Kreislinie.

Die Geschwindigkeitsfunktion lautet

$$w = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right), \tag{8}$$

mithin gilt für $z = \infty$, $w = U$, wie es gefordert wird.

Die durch (8) dargestellte Strömung ist indessen nicht die einzige, welche den Forderungen genügt, daß der Kreis eine Stromlinie bildet und

die Geschwindigkeit im Unendlichen U beträgt. Bildet man nämlich das Zirkulationsintegral für diese Strömung längs einer Kurve, welche den Kreis in sich schließt, so erhält man als Integral Null; wir dürfen aber zu f_1 eine zweite Funktion f_2 addieren, welche folgenden Bedingungen genügt:

a) Für den Kreis mit dem Halbmesser R soll ebenfalls $\psi = 0$ gelten.

b) Im Unendlichen soll w verschwinden.

c) Das Zirkulationsintegral $\int w\,dz$ soll einen beliebigen reellen Wert Γ haben.

Die gesuchte Funktion f_2 lautet offenbar, falls wir das in 2 Gesagte berücksichtigen:

$$f_2 = \frac{\Gamma}{2\pi i}\log\left(\frac{z}{R}\right), \tag{9}$$

da für

$$|z| = R, \quad f_2 = \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(e^{i\vartheta}) = \frac{\Gamma\vartheta}{2\pi},$$

d. h. $\psi = 0$ wird.

Die vollständige Lösung der Aufgabe lautet daher:

$$f = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log\frac{z}{R}. \tag{10}$$

Wollen wir die Aufgabe so verallgemeinern, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen die Komponenten U, V haben soll, so lautet die entsprechende f-Funktion, wie man leicht einsehen kann:

$$f = (U - iV)z + (U + iV)\frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log\frac{z}{R}. \tag{11}$$

Nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung kann jeder von einer einfach geschlossenen Kurve begrenzte Bereich umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden (1. Bd., S. 559 ff.). Mithin können wir die Aufgabe, die Strömung um einen Körper mit beliebigem Querschnitt zu ermitteln, auf die soeben behandelte Aufgabe zurückführen. Die Ebene, in welcher wir die Strömung ermitteln wollen, soll als die ζ-Ebene bezeichnet werden, die Funktion $z = g(\zeta)$ soll die gegebene Randlinie auf den in der z-Ebene liegenden Kreis abbilden, und zwar so, daß der Außenraum des betreffenden Bereichs in der ζ-Ebene und der Außenraum des Kreises in der z-Ebene, ferner $\zeta = \infty$ und $z = \infty$ einander entsprechen sollen. Alsdann liefert die Stromfunktion $F(\zeta) = \frac{1}{[g'(\zeta)]_\infty} f[g(\zeta)]$ — wobei $g'(\zeta)_\infty$ den Wert der Ableitung der Abbildungsfunktion $z = g(\zeta)$ für $z = \zeta = \infty$ bezeichnet — die gesuchte Strömung in der ζ-Ebene.

4. Die auf den umströmten Körper wirkenden Kräfte und Momente. Wir denken uns die Aufgabe gelöst. Die Funktion $F(\zeta)$ soll die Strömung um den Körper mit gegebener Randlinie darstellen. Wir fragen nach der resultierenden Kraft und nach dem resultierenden Moment, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt.

Es bezeichnen

X, Y die Komponenten der Kraft, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt;

M das Moment derselben in bezug auf den Koordinatenursprung.

Die Größen X, Y, M können wir durch den Druck p ausdrücken, welcher auf die Randlinie wirkt. Wir erhalten mit $\zeta = \xi + i\eta$ die Ausdrücke

$$(12)\quad X = -\oint p\,d\eta, \quad Y = \oint p\,d\xi, \quad M = \oint p(x\,d\xi + y\,d\eta),$$

wobei die Integrale in umgekehrtem Sinne des Uhrzeigers gerechnet sind.

Man könnte nun den Druck p mit Hilfe des Bernoullischen Satzes [§ 2, (15)]

$$(13)\quad \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2+v^2}{2} = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{U^2+V^2}{2}$$

(p_0 der Druck im Unendlichen, ϱ Dichte der Flüssigkeit) in den Ausdrücken (12) durch u und v ausdrücken und die Integrale berechnen. Man gelangt indessen zu besonders anschaulichen Ergebnissen, wenn man zur Berechnung der obigen Größen den Impulssatz [§ 2, (16)] heranzieht.

Zu diesem Zwecke wählen wir eine beliebige geschlossene Kurve, welche die Randlinie umschließt; beziehen wir den Druck p auf die Elemente dieser Linie, so haben wir auf der rechten Seite noch die Komponenten bzw. das Moment der Bewegungsgröße (die Impulskomponenten und den Drehimpuls) hinzuzufügen, welche durch die gewählte geschlossene Linie in der Zeiteinheit durchtritt.

Die Ausdrücke für X, Y, M nehmen dann die Gestalt an:

$$(14)\quad \begin{cases} X = -\oint p\,d\eta - \oint \varrho(u^2\,d\eta - uv\,d\xi), \\ Y = \quad \oint p\,d\xi - \oint \varrho(uv\,d\eta - v^2\,d\xi), \\ M = \quad \oint p(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta) - \oint \varrho[uv(\xi\,d\eta + \eta\,d\xi) \\ \qquad\qquad - v^2\xi\,d\xi - u^2\eta\,d\eta]. \end{cases}$$

Aus (13) erhalten wir für den Druck den Wert

$$\frac{p}{\varrho} - \frac{p_0}{\varrho} = \frac{U^2+V^2}{2} - \frac{u^2+v^2}{2}.$$

Führen wir diesen Wert in die Gl. (14) ein, so ist es zunächst klar, daß die Integrale, die p_0, ferner U^2 und V^2 enthalten, über einen geschlossenen Weg genommen verschwinden. Es bleiben mithin die Ausdrücke

$$(15)\quad \begin{cases} X = \frac{\varrho}{2}\oint[(v^2-u^2)\,d\eta + 2uv\,d\xi], \\ Y = \frac{\varrho}{2}\oint[(v^2-u^2)\,d\xi - 2uv\,d\eta], \\ M = \frac{\varrho}{2}\oint[(v^2-u^2)(\xi\,d\xi - \eta\,d\eta) - 2uv(\eta\,d\xi + \xi\,d\eta)]. \end{cases}$$

Bilden wir die komplexe Größe $R = X - iY$, so sieht man unmittelbar, daß R durch das geschlossene Integral $R = \frac{\varrho i}{2}\oint w^2\,d\zeta$ dargestellt wird.

Man kann sich ferner leicht überzeugen, daß M den reellen Teil des Integrals $\frac{\varrho}{2}\oint \zeta w^2\,d\zeta$ darstellt. Die Ermittlung der Größen X, Y, M erfordert mithin die Berechnung der Residua der beiden Integrale $\int w^2\,d\zeta$ und $\int \zeta w^2\,d\zeta$ (vgl. 1. Bd., III, § 3, 5).

Wir nehmen an, daß die Funktion $w(\zeta)$ in großer Entfernung von der Randlinie eine Entwicklung von der Form

$$(16)\qquad w = U - iV + \frac{A}{\zeta} + \frac{B}{\zeta^2} + \frac{C}{\zeta^3} + \cdots$$

zuläßt. Da im Unendlichen keine Quelle liegt, so muß A rein imaginär sein. Das Zirkulationsintegral über eine geschlossene Linie, welche den Körper umschließt, ist offenbar

$$\oint \frac{A\,d\zeta}{\zeta} = 2\pi i A = \Gamma.$$

Wir können daher schreiben:

$$(17)\qquad w = U - iV + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta} + \frac{B_1 + iB_2}{\zeta^2} + \cdots$$

Führen wir den Ausdruck (17) in die komplexen Formeln für R und M ein, so erhalten wir, da nur Glieder mit $1/\zeta$ etwas zum Integral beitragen:

$$R = \frac{\varrho i}{2}\int w^2\,d\zeta = \frac{\varrho i}{2}\int 2(U - iV)\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta} = i\varrho(U - iV)\Gamma,$$

$$M = \Re\left\{\frac{\varrho}{2}\int \zeta w^2\,d\zeta\right\}^{1}) = \Re\left[\frac{\varrho}{2}\int\left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2(U - iV)B\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]$$
$$= 2\pi\varrho(VB_1 - UB_2)$$

[1]) $\Re\{\}$ bedeutet: „reeller Teil des Klammerausdrucks."

oder

$$(18)\qquad \begin{cases} X = \varrho V \Gamma, \\ Y = -\varrho U \Gamma, \\ M = 2\pi\varrho (V B_1 - U B_2). \end{cases}$$

Wir wollen insbesondere den Ausdruck für R diskutieren. Falls wir R als Vektor auffassen, so stellt der Vektor R den an der x-Achse gespiegelten Kraftvektor dar. Die Formeln sagen daher aus, daß die Kraft stets zu der Geschwindigkeit im Unendlichen senkrecht gerichtet und gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit $\sqrt{U^2 + V^2}$, aus der Zirkulation und der Dichte der Flüssigkeit ist. Diese Beziehung wird oft — obwohl sie schon früher bekannt war — als Joukowskischer Satz bezeichnet[1]).

Die Kraftkomponente in der Richtung der Geschwindigkeit nennt man schlechthin Widerstand, während die zur Geschwindigkeit senkrechte Komponente als Auftrieb bezeichnet wird. Nach dem soeben ausgesprochenen Satz erfährt ein in der Flüssigkeit gleichförmig und geradlinig bewegter Körper keinen Widerstand, hingegen einen Auftrieb (dessen Größe indessen an und für sich ohne weitere Annahme über die Größe der Zirkulation unbestimmt bleibt). Die Theorie der Potentialströmung ist daher insbesondere in solchen Fällen von praktischem Wert, in welchen — wie z. B. bei Tragflächen der Flugmaschinen — der Auftrieb gegen den Widerstand überwiegt.

5. Tragflügel mit unendlicher Spannweite[2]). Wenn die Spannweite eines Tragflügels gegen die Tiefenabmessung groß ist, oder wenn die Strömung um einen flügelartigen Körper (Schaufel) zwischen zwei parallelen Ebenen erfolgt, so kann man — wenigstens für die Mitte des Tragflügels — annehmen, daß die Bewegung der Flüssigkeit von der ebenen Strömung sich wenig unterscheidet. Auf diese Fälle läßt sich daher die Theorie der Potentialströmung mit Erfolg anwenden. Wie wir gesehen haben, bleibt der Wert der Zirkulation zunächst unbestimmt; man gelangt indessen zu den mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Ergebnissen, wenn man nach einem Vorschlag von Joukowski die Zirkulation mit Hilfe der sogenannten „Abflußbedingung“ bestimmt. Die in der Praxis angewandten Tragflügel und Schaufelquerschnitte haben zumeist eine scharfe Hinterkante; läßt man die Zirkulation unbestimmt, so wird die Flüssigkeit um die Hinterkante im allgemeinen mit unendlicher Geschwindigkeit umgelenkt werden. Nur bei einem bestimmten Werte

[1]) W. Kutta, Münch. Ber. 1910, 1911. Eine Verallgemeinerung von M. Lagally, ebenda 1921.

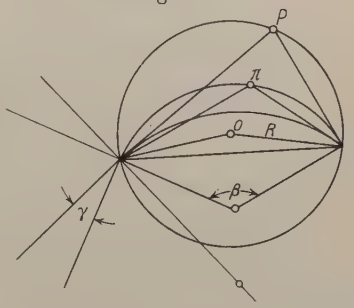
[2]) Vgl. R. v. Mises, Zur Theorie des Tragflügelauftriebes, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff., Heft 21/22, 1917.

der Zirkulation findet glatter Abfluß mit endlicher Geschwindigkeit statt. Wir wollen annehmen, daß in Wirklichkeit gerade diese Zirkulation zustande kommt. Wie man das Zustandekommen dieses Zustandes physikalisch sich vorzustellen hat, soll bei Behandlung der Wirbelbewegung näher dargelegt werden.

Mathematisch können wir diese Bedingung so ausdrücken, daß in dem die Hinterkante darstellenden Punkte der ξ-Ebene $w = u - iv$ nicht unendlich sein darf.

Wir gehen wieder von der Strömung um den Kreis in der $z = x + iy$-Ebene aus. Der Mittelpunkt des Kreises soll im Punkte $x = y = 0$ liegen, der Halbmesser R betragen. Wenn nun in einer ξ-Ebene ein Tragflügelquerschnitt gegeben ist, so besteht die direkte Lösung der Aufgabe darin, diesen Querschnitt auf das Innere des Kreises abzubilden. Es ist indessen einfacher, eine inverse Methode zu befolgen und durch einfache Abbildungsfunktionen von dem Kreise aus tragflügelartige Querschnitte zu erzeugen und für diese Druckverteilung, Auftrieb und Moment zu berechnen. Es zeigt sich, daß man durch ein verhältnismäßig einfaches Verfahren eine große Mannigfaltigkeit von Querschnitten erzeugen kann, und wenn man auch nicht die exakten Ergebnisse für einen vorgegebenen Querschnitt erhält, so kann man trotzdem aus diesen Berechnungen richtige Aufschlüsse von allgemeiner Gültigkeit entnehmen.

Fig. 82.



Der erste Schritt, mit welchem wir der Tragflügelform bedeutend näher kommen, ist die Abbildung des Kreises auf eine Kreissichel.

Wir betrachten einen Kreis, der durch die Punkte $z = \pm 1$ geht (A und B in Fig. 82) und setzen

$$\frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{\varkappa} \tag{19}$$

oder

$$\log \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \varkappa \log \frac{z - 1}{z + 1}. \tag{20}$$

Zunächst ist klar, daß bei dieser Abbildung jeder Kreisbogen, welcher A und B verbindet, in einen anderen durch A und B gelegten Kreisbogen übergeht. Es sei nämlich der Punkt $z = x + iy$ mit P, der Punkt $\xi = \xi + i\eta$ mit Π bezeichnet. Alsdann stellt [1. Bd., S. 94, (6)] der Betrag des Imaginärteiles von $\log \frac{z - 1}{z + 1}$ den Winkel APB, der von

$\log\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ den Winkel $A\,\Pi B$ dar. Da nun dieser Winkel längs eines Kreisbogens konstant ist, geht bei der Abbildung jeder Kreisbogen in einen Kreisbogen über. Es sei der Winkel, den die beiden Kreisbogen miteinander bilden, der „Kantenwinkel" des Kreiszweiecks, mit γ bezeichnet. Falls wir das Innere des Kreiszweiecks auf das Innere eines Vollkreises abbilden wollen, muß nach (20) der äußere Ergänzungswinkel $2\pi-\gamma$ in $\varkappa$ übergehen, so daß gelten muß:

$$2\pi-\gamma=\varkappa\pi$$

oder

$$\varkappa=2-\gamma/\pi. \tag{21}$$

Wir wollen noch den Halbmesser des Kreises berechnen. Wir haben offenbar $\sin\frac{\widehat{AOB}}{2}=\frac{1}{R}$; andererseits ist $AOB=2APB=2\frac{A\,\Pi B}{\varkappa}$. Bezeichnen wir den Zentriwinkel der oberen Begrenzung der Kreissichel mit β, so ist $A\,\Pi B=\pi-\frac{\beta}{2}$ und $\frac{1}{R}=\sin\left(\frac{\pi-\beta/2}{\varkappa}\right)$.

Wir könnten nun zunächst die Strömung um die Kreissichel in der Weise ermitteln, daß wir die Strömung um den Kreis mit dem Halbmesser R ansetzen und dann die Abbildungsfunktion in das Strömungspotential einführen. Die in der Praxis angewandten Querschnittsformen unterscheiden sich indessen vom Kreiszweieck hauptsächlich darin, daß sie keine spitze Vorderkante zeigen. Solche vorn abgerundeten Profile kann man dadurch erzeugen, daß man von der Strömung um einen benachbarten Kreis ausgeht, welcher das Abbild unseres Kreiszweiecks vollständig in sich schließt und es im Punkte B, welcher der Hinterkante entspricht, berührt. Ein solcher Kreis geht bei der Abbildung offenbar in eine Kurve über, welche in B eine spitze Hinterkante mit dem Kantenwinkel γ besitzt; die vordere Spitze des Kreiszweiecks fällt indessen in das Innere des Profils, welches einen abgerundeten Kopf erhält.

Die genaue Rechnung wollen wir für den Sonderfall durchführen, in welchem der Kantenwinkel $\gamma=0$ ist, d. h. die Kreissichel in einen doppelt genommenen Kreisbogen entartet. Dieser Fall wurde zuerst von Joukowski behandelt; die so gewonnenen Profile werden als Joukowskische Profile bezeichnet.

Die Abbildungsfunktion (19) lautet mit $\gamma=0$, $\varkappa=2$

$$\frac{\zeta-1}{\zeta+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \tag{22}$$

oder

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \tag{23}$$

d. h. sie ist identisch mit der Abbildung (1. Bd., III, § 2, 4), welche den Außenraum eines Kreises in die ganze Ebene überführt. In der Tat ist einer der doppelt genommenen Kreisbogen, welche in einen Vollkreis übergehen, die doppelt genommene gerade Strecke AB. Betrachten wir einen Kreisbogen mit dem Zentriwinkel β, so geht dieser in einen Kreis über, dessen Halbmesser durch

$$\frac{1}{R} = \cos\frac{\beta}{4}$$

gegeben wird. Der Mittelpunkt des Kreises liegt daher in dem Punkte

$$z_0 = i \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}.$$

Wir wählen nun einen zweiten Kreis, dessen Halbmesser statt R gleich $R' = R + \varepsilon$ sei, und der den ersten Kreis in B berühren soll. Die Koordinaten des Mittelpunkts O' desselben sind offenbar

$$x_0' = -\varepsilon\cos\frac{\beta}{4},$$

$$y_0' = \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} + \varepsilon\sin\frac{\beta}{4}.$$

Wir führen nun mit dem Punkte O' als Ursprung ein Koordinatensystem $x'y'$ ein, welches gegen das Achsenkreuz xy durch die Transformation

$$x' = x + \varepsilon\cos\frac{\beta}{4},$$

$$y' = y - \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} - \varepsilon\sin\frac{\beta}{4}$$

zusammenhängt und betrachten zunächst die Strömung in der $x'y'$-Ebene. Die Geschwindigkeit im Unendlichen schließe mit der x'-Achse den Winkel α ein. Diesen Winkel, der — da im Unendlichen durch die Abbildung keine Verdrehung entsteht — gleich ist dem Winkel zwischen der Richtung der wirklichen Geschwindigkeit im Unendlichen und der Sehne des „profilerzeugenden Kreisbogens“ AB, wollen wir schlechthin als „Anstellwinkel“ oder Anblasewinkel bezeichnen.

Die komplexe Potentialfunktion lautet analog zu (10) (C eine reelle Konstante)

$$f(z') = C\left(z' e^{-i\alpha} + \frac{R'^2}{z'} e^{i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log z',$$

die Abbildungsfunktionen:

$$z' = z + \varepsilon e^{-\beta/4} - i \operatorname{tg}\frac{\beta}{4},$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Die Geschwindigkeit im Unendlichen soll $U - iV = qe^{-i\alpha}$ sein. Nun ist

$$w = \frac{df}{d\xi} = f'(z')\,\frac{dz'}{dz}\,\frac{dz}{d\xi} = 2\,C e^{-i\alpha},$$

so daß wir erhalten: $C = q/2$.

$$f(z') = \frac{q}{2}\left\{e^{-i\alpha}z' + \frac{R'^2}{z'}\,e^{i\alpha}\right\} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log z', \tag{24}$$

$$z = z' - \varepsilon e^{-\beta i/4} + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{4},\quad \zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{25}$$

$$R' = \frac{1}{\cos\beta/4} + \varepsilon. \tag{26}$$

Diese Gleichungen bestimmen vollkommen die Strömung in der ζ-Ebene, wenn wir für q, α, Γ bestimmte Werte annehmen.

Wie wir bereits auseinandergesetzt haben, wollen wir die Zirkulation Γ durch die Bedingung festlegen, daß die Geschwindigkeit im Punkte B, d. h. für $\zeta = 1$ nicht unendlich wird.

Die Geschwindigkeitsfunktion $w = u - iv$ ergibt sich durch Differentiation:

$$w = \frac{df}{dz'}\,\frac{dz'}{dz}\,\frac{dz}{d\xi}.$$

Da für $z = 1$, $\dfrac{d\xi}{dz} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2z^2}$ Null wird, so kann w nur endlich werden, falls für $z = 1$ die Ableitung $\dfrac{df}{dz'}$ verschwindet. Wir erhalten daher die „Abflußbedingung“ in der Form

$$\frac{df}{dz'} = \frac{q}{2}\left[e^{-i\alpha} - \frac{R'^2}{z'^2}\,e^{i\alpha}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\,\frac{1}{z'} = 0,$$

wobei $z' = 1 + \varepsilon e^{-\beta i/4} - i\,\mathrm{tg}\,\beta/4$ zu setzen ist. Die Zirkulation ergibt sich zu

$$\Gamma = -q\pi i\left(e^{-i\alpha}z' - \frac{R'^2}{z'}\,e^{i\alpha}\right).$$

Nun ist offenbar für den Punkt $B\,(z = 1)$

$$z' = R'\,e^{-\beta/4\,i},$$

so daß wir erhalten

$$\Gamma = -q\pi i\left[R'\,e^{-i(\alpha+\beta/4)} - R'\,e^{i(\alpha+\beta/4)}\right]$$

oder

$$\Gamma = 2\,q\pi R'\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right).$$

Setzen wir den Wert für R' ein, so erhalten wir schließlich

$$\Gamma = 2\pi q\left(\frac{1}{\cos\beta/4} + \varepsilon\right)\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right). \tag{27}$$

Wir sind von einem Kreisbogen ausgegangen, dessen Sehne die Punkte ± 1 verbunden hat. Als Längeneinheit dient daher die halbe Flügeltiefe $t/2$. Für einen Tragflügel von der Tiefe t erhalten wir demgemäß $\Gamma = \pi q t \left(\frac{1}{\cos \beta/4} + \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)$. Dabei ist q der Absolutwert der Anblasegeschwindigkeit, β der Öffnungswinkel des Kreisbogens, α der Anstellwinkel, ε das Verhältnis $\frac{R' - R}{R}$.

Nun ist der Auftrieb nach (18)

$$A = \varrho q \Gamma = \pi \varrho q^2 t \left(\frac{1}{\cos \beta/4} + \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right). \tag{28}$$

Es ist daher der Auftrieb proportional dem Quadrat der Anblasegeschwindigkeit und dem Sinus des Winkels $(\alpha + \beta/4)$, welcher sich von dem Anstellwinkel um den konstanten Betrag $\beta/4$ unterscheidet. Der Winkel β ist offenbar ein Maß für die Krümmung des „profilerzeugenden Kreisbogens", d. h. in guter Annäherung für die Krümmung der Profilmittellinie. Die Größe t ist die Sehnenlänge des Kreisbogens, aber diese unterscheidet sich in den meisten praktischen Fällen (ε und β klein) wenig von der wirklichen Flügeltiefe. Die Größe ε schließlich ist ein Maß für die Verdickung des Profilkopfes. Für $\varepsilon = 0$ geht das Profil in den Kreisbogen über.

In der aerodynamischen Praxis setzt man die Auftriebsformel mit einem dimensionslosen Koeffizienten c_a (dem Auftriebsbeiwert) in der Form an:

$$A = c_a \frac{\varrho q^2}{2} F \tag{29}$$

(F = Flächenmaß der Tragfläche). Da unsere theoretische Formel (28) den Auftrieb für die Längeneinheit des Flügels von der Tiefe t angibt und mithin $F = t$ zu setzen wäre, wird

$$c_a = 2\pi \left(\frac{1}{\cos \beta/4} + \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) \tag{30}$$

oder für kleine β und ε angenähert $c_a \backsimeq 2\pi(\alpha + \beta/4)$. Falls man zur Messung des Auftriebs den Flügel zwischen zwei parallelen Wänden einschließt und so nahezu ebene Strömung erreicht, erhält man Werte für c_a, welche mit dieser Formel gut übereinstimmen.

Die Gestalt des Profils, für welche wir die Strömung ermittelt haben, ist mit dem Kreise nach (23) durch die Abbildungsfunktionen

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

verbunden.

Zur Aufzeichnung der Randlinie des Querschnitts kann man sich der beiden Kreisscharen bedienen, welche bei der Abbildung ineinander

übergehen. Jeder Punkt der z'-Ebene ist als Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt. Falls wir die Kreise in der z'-Ebene und in der ζ-Ebene entsprechend numerieren, können wir den Kreis der z'-Ebene punktweise in die Profilebene übertragen.

In Anwendung der Gl. (18) wollen wir noch das Moment berechnen, welches die Luftkräfte auf den Querschnitt ausüben. Zu diesem Zwecke müssen wir die ersten beiden Glieder der Entwicklung für $\frac{df}{d\zeta}$ in der Nähe des Unendlichkeitspunktes ermitteln.

Wir haben nach (24)

$$w = \frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{dz'}\frac{dz'}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \left\{\frac{q}{2}\left(e^{-i\alpha} - \frac{R'^2 e^{i\alpha}}{z'^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z'}\right\}\frac{1}{\frac{1}{2}(1-1/z^2)}.$$

Es ist zunächst zu bemerken, daß die Koeffizienten der Entwicklung nach absteigenden Potenzen von z oder 2ζ bis zum Gliede mit $1/z^2$ bzw. $1/\zeta^2$ gleich sind. Wir dürfen daher nach z statt ζ entwickeln. Wir erhalten

$$w = qe^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{2}{z'} + qe^{-i\alpha}\frac{1}{z^2} - q\frac{R'^2 e^{i\alpha}}{z'^2}.$$

Mit $z' = z - z_0'$ wird

$$w = qe^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{2z_0'}{z^2} + qe^{-i\alpha}\frac{1}{z^2} - q\frac{R'^2 e^{i\alpha}}{z^2}$$

oder

$$w = qe^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\left[\frac{q}{4}e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma z_0'}{4\pi i} - q\frac{R'^2 e^{i\alpha}}{4}\right].$$

Die Größe in der Klammer sei wie in (17) mit $B = B_1 + iB_2$ bezeichnet. Das Moment ist dann nach (18) gleich

$$M = 2\pi\varrho[VB_1 - UB_2] = -2\pi\varrho\,\Im\{(U - iV)B\}$$
$$= -2\pi\varrho q\,\Im\{Be^{-i\alpha}\},$$

wobei $\Im$ „Imaginärteil von“ bedeutet. Man erhält nach leichter Rechnung (mit $z_0' = r_0' e^{i\vartheta}$)

$$M = -\pi\varrho\frac{q}{2}\left\{q\sin 2\alpha - \frac{\Gamma r_0'\cos(\vartheta - \alpha)}{\pi}\right\}.$$

Da wir als Längeneinheit $t/2$ gewählt haben, so ist das Moment für einen Tragflügel von der Tiefe t

$$(31) \qquad M = -\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha\cdot\frac{\varrho q^2}{2}t^2 + \Gamma\varrho q\frac{r_0'}{2}\cos(\vartheta - \alpha),$$

wobei r_0' die Entfernung des Mittelpunkts O' des „Bildkreises“ K' vom Sehnenmittelpunkt bezeichnet.

Berücksichtigen wir, daß der Auftrieb $A = \Gamma\varrho q$ beträgt, so gelangen wir zu folgender anschaulicher Darstellung des Kraftsystems:

Wir halbieren die Strecke r_0 und bezeichnen den Mittelpunkt M derselben als den „Profilmittelpunkt“.

Das gesamte Kraftsystem, welches auf den Tragflügel wirkt, kann zusammengesetzt werden aus einem reinen Kräftepaar von der Größe $\pi/4 \sin 2\alpha \,.\, \varrho q^2/2 \,.\, t^2$ und der Kraft $A = \Gamma \varrho q$, welche im Profilmittelpunkt wirkt und senkrecht zur Anblaserichtung gerichtet ist.

Das erste Glied ist identisch mit dem Moment, das eine Lamelle von der Breite t in einer Strömung ohne Zirkulation querzustellen trachtet. Das zweite Glied drückt den Einfluß der Zirkulation aus.

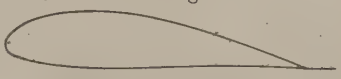
In der Praxis wird das Moment zumeist auf die Vorderkante bezogen. Bezeichnen wir die senkrechte Entfernung der Wirkungslinie des im Profilmittelpunkt angenommenen Auftriebs von der Vorderkante mit n, so ist das Moment in bezug auf die Vorderkante

$$M_v = -\frac{\varrho q^2}{2} t^2 \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha + \Gamma \varrho q n. \tag{32}$$

Wir setzen $M_v = c_m \frac{\varrho q^2}{2} t^2$ und berücksichtigen, daß $\Gamma \varrho q = c_a \frac{\varrho q^2}{2} t$ ist. Alsdann haben wir

$$c_m = -\frac{\pi}{4} \sin 2\alpha + c_a \frac{n}{t}. \tag{33}$$

Fig. 83.



Göttinger Profil 420

Für kleine Winkel und flache Profile ist angenähert $c_a = 2\pi(\alpha + \beta/4)$, daher

$$\frac{\pi}{4} \sin 2\alpha \cong \frac{\pi \alpha}{2} = \frac{c_a}{4} - \frac{\beta \pi}{8}$$

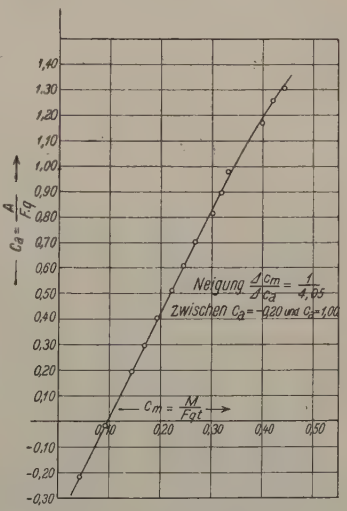
und

$$c_m = c_a \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi \beta}{8}.$$

Da n/t nahezu $\frac{1}{2}$ ist, können wir schreiben

$$c_m = \frac{c_a}{4} + \frac{\pi \beta}{8}.$$

In Fig. 83 sind zusammengehörige gemessene Werte von c_a und c_m eingetragen. Man sieht, daß die Linie entsprechend der Näherungsformel (eine Gerade mit der Neigung $\frac{1}{4}$) sehr gut mit der Erfahrung übereinstimmt.



6. Potentialbewegung mit Unstetigkeitsflächen. Wie wir in 4 [insbesondere Gl. (18)] gesehen haben, liefert die Theorie der Potentialströmung keine Kraft in der Richtung der Anblasegeschwindigkeit, d. h. ein gleichmäßig und geradlinig bewegter Körper erfährt keinen Bewegungswiderstand. Die Erfahrung zeigt, daß der Bewegungswiderstand in Flüssigkeiten mit geringer Reibung, wie Wasser oder Luft, durch geeignete Formgebung des

Körpers, wenn auch nicht auf Null reduziert, so doch sehr vermindert werden kann, und zwar um so mehr, je enger die Strömung sich der Potentialbewegung nähert. Es ist dies insbesondere bei Körpern der Fall, welche einen gestreckten und in Spitze auslaufenden Hinterteil haben; bei diesen Körpern kann es erreicht werden, daß die Potentialströmung fast vollständig sich ausbildet und eine wesentliche Abweichung nur unmittelbar in der Nähe der Hinterkante auftritt. Im allgemeinen tritt jedoch eine Ablösung der Strömung von der Wand ein, und zwar in dem Bereich abnehmender Geschwindigkeit bzw. steigenden Druckes. Wie diese Ablösung als Folge der Oberflächenreibung zustande kommt, soll im folgenden Kapitel erörtert werden; insbesondere wird aber die Ablösung durch ausspringende Ecken hervorgerufen bzw. begünstigt.

Für den Fall, daß die Strömung bis zu einem bestimmten Punkte der Wand folgt und sich dann ablöst, läßt sich eine Strömungsform mit verhältnismäßig einfachen Mitteln angeben, welche dadurch gekennzeichnet ist, daß die Flüssigkeit hinter dem Körper sich relativ zum Körper in Ruhe befindet. Die Stromlinie, welche von dem Ablösungspunkt ausgeht, ist mithin eine Unstetigkeitslinie, an welcher die Geschwindigkeit einen Sprung erleidet. Da in einem in relativer Ruhe befindlichen Flüssigkeitsbereich (mit Vernachlässigung der Schwere) infolge der Gleichgewichtsbedingung konstanter Druck herrscht, so erhalten wir als Bedingung für die freie Grenzfläche der ruhenden Flüssigkeitsmasse, daß der Druck bzw. nach dem Bernoullischen Satz (13) der Absolutbetrag der Geschwindigkeit einen konstanten Wert hat.

Wir wollen wieder annehmen, daß im Unendlichen die Flüssigkeit die Geschwindigkeit U besitzt; ferner wollen wir annehmen, daß die Strömung bis zu den Punkten A und B der Randlinie eines gegebenen Querschnitts folgt und dann sich ablöst, wobei hinter dem Körper ein bis zum Unendlichen erstreckender, in Ruhe sich befindlicher Flüssigkeitsbereich entsteht. Die Stromlinie $\psi = 0$ geht daher vom Unendlichen aus, trifft den Körper in dem sogenannten Staupunkt P, teilt sich am Staupunkt und folgt der Randlinie längs der Strecken PA bzw. PB. In A und B erfolgt die Ablösung, wobei die Stromlinienteile AM und AN bis ins Unendliche reichen.

Die Ebene, in welcher der gegebene Querschnitt enthalten ist, soll die z-Ebene heißen. Da die Grenzen der bewegten Flüssigkeit von vornherein nicht gegeben sind, kommt eine Abbildung zwischen den Ebenen $z = x + iy$ und $f = \varphi + i\psi$ nicht in Betracht. Wir wollen von der f-Ebene ausgehen. Wie Levi-Civitá[1]) gezeigt hat, erhält das Problem eine anschauliche und verhältnismäßig einfache Darstellung, wenn wir die f-Ebene auf das Innere eines Halbkreises abbilden, und zwar so,

[1]) Rend. di Palermo **23**, 1 ff., 1907.

daß die den Stromlinienteilen PA und PB entsprechenden Strecken auf den halben Kreisumfang, die freien Stromlinienteile AM und BM auf je einen Halbmesser abgebildet werden.

Wir wollen zunächst in der f-Ebene die erwähnten Punkte festlegen, und zwar den Staupunkt P in $f = 0$, die Ablösungspunkte A und B in $f = a$ bzw. $f = b$ (wo a und b positive reelle Zahlen sind), den Unendlichkeitspunkt M ins Unendliche. Wir wollen die längs der reellen Achse zwischen $f = 0$ und $f = \infty$ aufgeschlitzte Ebene auf einen Halbkreis in der Hilfsebene $\zeta = \xi + i\eta$ so abbilden, daß A und B in $\zeta = \pm 1$, M in $\zeta = 0$ gelangt. Die Abbildungsfunktion können wir folgendermaßen gewinnen:

Wir denken uns beim Aufschlitzen der f-Ebene das Bild von A auf dem positiven, das von B auf dem negativen Ufer des Schlitzes liegen. Durch die Abbildung $f' = \sqrt{f}$ wird dann die Ebene auf die Halbebene abgebildet, wobei die Punkte M, A, B, P auf der reellen Achse liegen, und zwar gilt für M $f' = \infty$, für A und B $f' = \sqrt{a}$ bzw. $f' = -\sqrt{b}$, für P $f = 0$.

Durch die Transformation

$$f'' = \frac{2f' - (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

gelangen A und B nach $f'' = \pm 1$.

Schließlich gelangen wir durch die Abbildungsfunktion [s. Gl. (23)]

$$f'' = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

zu dem Halbkreis in der ζ-Ebene mit der gewünschten Lage der Punkte.

Wir bilden nun den Logarithmus der Geschwindigkeitsfunktion (2) und setzen

$$i \log w = \omega. \tag{34}$$

Aus der Beziehung (q = Absolutwert der Geschwindigkeit, ϑ Neigungswinkel der Geschwindigkeit gegen die x-Achse)

$$w = qe^{-\vartheta i} = e^{\log q - i\vartheta} = e^{-i\omega}, \quad \omega = \vartheta + i \log q \tag{35}$$

sieht man, daß der reelle Teil der Funktion den Neigungswinkel ω der Geschwindigkeit, der Imaginärteil den Logarithmus des Absolutbetrages der Geschwindigkeit darstellt.

Die beiden Größen ϑ und $\log q$ sind, als Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Funktion, harmonische Funktionen der beiden Variablen ξ und η. Wenn es gelingt, diese zu ermitteln, so ist die Aufgabe gelöst. Da die Strecke $\eta = 0$, $-1 < \xi < 1$ die beiden freien Grenzen darstellt, so gilt für diese Strecke die Randbedingung $\log q = \text{konst.}$

Welche Randbedingungen gelten nun für den Halbkreis?

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, daß die Teile der Randlinie PA und PB durch gerade Strecken gebildet werden. Alsdann ist der Neigungswinkel ϑ streckenweise konstant, so daß wir die folgenden Randbedingungen erhalten:

$$\begin{array}{lll} \text{längs des Kreisbogens } BP \ldots & \vartheta = \vartheta_1, \\ \text{„ „ „ } PA \ldots & \vartheta = \vartheta_2, \\ \text{„ „ Durchmessers } AB \ldots & \log q = \text{konst.} \end{array} \tag{36}$$

Da aus $\frac{\partial}{\partial s}(\log q) = 0$ wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Bedingung $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$ folgt, so können wir die Aufgabe in folgender Weise fassen:

Es ist eine Funktion $\vartheta(\xi, \eta)$ so zu bestimmen, daß im Innern des Halbkreises $\Delta \vartheta = 0$ gilt und längs des Kreisbogens ϑ, längs des Durchmessers $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ gegeben ist.

Für diesen Spezialfall (ebene Begrenzung des Widerstandskörpers) können wir auch die Abbildungsmethode mit Erfolg anwenden. Betrachten wir die ω-Ebene, so ist klar, daß den freien Grenzen gerade Stücke $\log q = \text{konst}$, den ebenen Wänden ebenfalls gerade Stücke $\vartheta = \text{konst}$ entsprechen. Der Bereich, den wir — um die Beziehung $\omega = g(\zeta)$ zu erhalten — auf den Halbkreis abzubilden haben, ist mithin durch zueinander senkrechte gerade Strecken begrenzt. Die Anwendung der Schwarzschen Integralformel 1. Bd., S. 553 ff. führt daher in verhältnismäßig einfacher Weise zur Ermittlung der in **3** definierten Abbildungsfunktion $g(\zeta)$.

Wir wollen die Rechnung für den Fall einer ebenen Platte von der Länge t durchführen, welcher unter dem Winkel α angeblasen wird, wobei die Strömung im Unendlichen wieder in der x-Richtung mit der Geschwindigkeit U erfolgen soll. Die Lage des Staupunktes ist zunächst nicht bekannt; gegeben sind jedoch nach (36) die Werte $\vartheta_1 = \pi - \alpha$, $\vartheta_2 = -\alpha$.

Wir setzen für den Einheitskreis in der ζ-Ebene

$$\zeta = e^{i\sigma},$$

lassen dem Staupunkt P den Wert σ_0 entsprechen, und untersuchen das Verhalten von ω in der Nähe von P. Zunächst ist zu bemerken, daß $\log q$ im Staupunkt $-\infty$ wird, während der Wert von ϑ um 2π springt. Diesen Bedingungen genügt offenbar die Funktion

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \log \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{\zeta - e^{-i\sigma_0}}, \tag{37}$$

indem der Realteil von ω_0 für

$$\sigma > \sigma_0, \quad \vartheta = \sigma_0 - \pi,$$
$$\sigma < \sigma_0, \quad \vartheta = \sigma_0$$

beträgt.

Wir setzen daher $\sigma_0 = \pi - \alpha$, wodurch die Bedingungen (36)

$$\sigma < \sigma_0 \text{ (Bogen } AP) \quad \vartheta = -\alpha,$$
$$\sigma > \sigma_0 \text{ (Bogen } PB) \quad \vartheta = \pi - \alpha$$

erfüllt werden.

Längs des Durchmessers AB ist der Imaginärteil von ω gegeben, und zwar beträgt er $\log U$. Der Imaginärteil von ω_0 verschwindet augenscheinlich für Punkte auf der reellen Achse, da unter dem Logarithmuszeichen die Absolutwerte von Zähler und Nenner gleich werden.

Die gesuchte Funktion ω lautet daher

$$\omega = i \log U + \omega_0 = i \log U + \frac{i}{2} \log \frac{\xi - e^{i\sigma_0}}{\xi - e^{-i\sigma_0}}. \tag{38}$$

Um die Abbildung zwischen den Ebenen ω und ξ vollständig festzulegen, müssen wir die Konstanten a und b berechnen. Zunächst sei bemerkt, daß das Verhältnis $\frac{b}{a}$ bereits durch σ_0 gegeben ist. Für den Staupunkt gilt nämlich $f = f' = 0$, folglich $f'' = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$; andererseits ist

$$f'' = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\sigma_0} + e^{-i\sigma_0}) = \cos\sigma_0.$$

Es muß daher gelten:

$$\cos\sigma_0 = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Wir wollen $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} = c$ setzen; dann ist die Abbildung offenbar statt durch a und b durch c und σ_0 bestimmt, indem die Formeln

$$f' = \sqrt{f}, \quad f'' = \frac{f'}{c} + \cos\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \tag{39}$$

für die früheren auftreten. Die Konstante σ_0 ist — wie wir oben gesehen haben — durch den Anstellwinkel α bestimmt; die zweite Konstante c ist durch die Länge l der Platte festgelegt.

In der Tat können wir für ein Element einer beliebigen Stromlinie schreiben:

$$ds = \frac{df}{q}.$$

Für den Kreisbogen gilt insbesondere wegen (39) und $\zeta = e^{i\sigma}$:

$$f = f'^2 = c^2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)^2,$$
$$df = -c^2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma,$$

ferner nach (38), (35)

$$\log q = \log U + 3\left\{\frac{i}{2}\log\frac{e^{i\sigma} - e^{i\sigma_0}}{e^{i\sigma} - e^{-i\sigma_0}}\right\}. \tag{40}$$

Man erhält durch leichte Umrechnung aus (40)

$$q = U\frac{\sin\dfrac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\sin\dfrac{\sigma_0 + \sigma}{2}}. \tag{41}$$

Wir wollen die Summe der beiden Strecken AP und PB ausrechnen. Es ist offenbar das Integral $\int ds = \int \frac{df}{q}$ von A bis B, d. h. von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \pi$ zu erstrecken und wir erhalten

$$\left\{\begin{aligned} l &= -c^2\int_0^{\pi}\frac{(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma}{U\sin\dfrac{\sigma_0 - \sigma}{2}}\sin\frac{\sigma_0 + \sigma}{2} \\ &= \frac{2c^2}{U}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\sigma + \sigma_0}{2}\sin\sigma\, d\sigma = \frac{2c^2}{U}\left(1 + \frac{\pi}{4}\sin\sigma_0\right). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Zur Berechnung der Kraft, welche auf die Lamelle wirkt, berücksichtigen wir die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit:

$$p + \frac{\varrho q^2}{2} = p_0 + \frac{\varrho U^2}{2},$$

wobei p_0 den Druck im Unendlichen bezeichnet. Es ist daher

$$p - p_0 = \frac{\varrho}{2}(U^2 - q^2) = \frac{\varrho}{2}U^2\left[1 - \frac{\sin^2\dfrac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma_0 + \sigma}{2}}\right].$$

Auf der Rückseite der Lamelle (im „Kielwasser“) herrscht der Druck p_0, so daß die auf die Lamelle wirkende Kraft P (bezogen auf einen Streifen von der Breite Eins) durch folgende Formel gegeben wird:

$$P = \int_0^l (p - p_0)\, ds = \frac{\varrho U^2}{2}\int_0^l\left\{1 - \frac{\sin^2\dfrac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\sin^2\dfrac{\sigma_0 + \sigma}{2}}\right\} ds$$

oder mit

$$(43)\qquad \begin{cases} ds = \dfrac{2c^2}{U}\sin^2\dfrac{\sigma_0+\sigma}{2}\sin\sigma\, d\sigma, \\ P = \varrho U c^2 \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2\sigma\sin\sigma_0\, d\sigma = c^2\varrho U\frac{\pi}{2}\sin\sigma_0. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir die Beziehung (42), so erhalten wir schließlich

$$(44)\qquad \frac{P}{l} = \frac{\varrho U^2}{2}\,\frac{\frac{\pi}{2}\sin\sigma_0}{1+\frac{\pi}{4}\sin\sigma_0}.$$

Der der Geschwindigkeit U entsprechende „Staudruck“ beträgt $\frac{\varrho U^2}{2}$.

Man setzt allgemein (F = Fläche der Lamelle)

$$(45)\qquad \frac{P}{F} = c_P\frac{\varrho U^2}{2}$$

und bezeichnet c_P als den Beiwert der Kraft P; er ist Funktion des Anstellwinkels $\alpha = \pi - \sigma_0$.

Die Formeln (45), (44) liefern offenbar den Wert

$$(46)\qquad c_P = \frac{\frac{\pi}{2}\sin\alpha}{1+\frac{\pi}{4}\sin\alpha}.$$

Für $\alpha = 90^0$ (senkrecht getroffene Lamelle) ist

$$(47)\qquad c_P = \frac{\pi}{2+\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{\pi+4} \simeq 0{,}879.$$

Die auf eine Lamelle wirklich auftretende Kraft ist bedeutend größer, weil im Kielwasser in Wirklichkeit nicht der Druck p_0 herrscht, sondern infolge der Wirbelbildung hinter dem Körper eine erhebliche Druckverminderung entsteht.

Rechnen wir den Auftrieb, d. h. die Komponente senkrecht zur Anblaserichtung aus, so erhalten wir offenbar

$$(48)\qquad A = P\cos\alpha = \frac{\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{1+\frac{\pi}{4}\sin\alpha}\,\frac{\varrho U^2}{2}l$$

oder mit der Bezeichnung von (29)

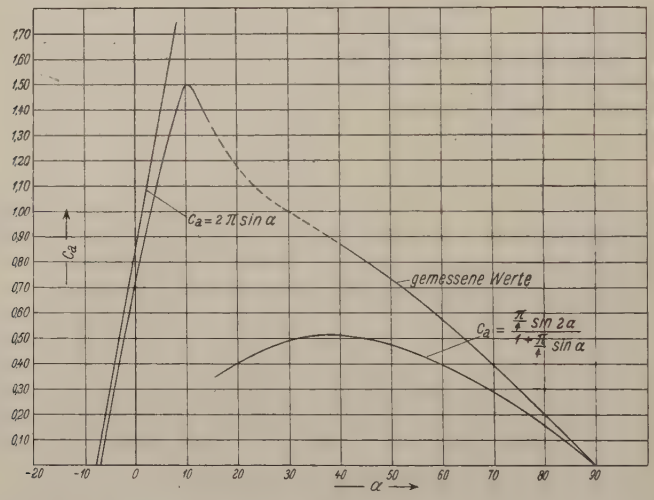
$$c_a = \frac{\frac{\pi}{4} \sin 2\alpha}{1 + \frac{\pi}{4} \sin \alpha}. \tag{49}$$

Nach der Zirkulationstheorie erhielten wir (für $\beta = 0$, d. h. bei verschwindender Krümmung) aus (30) annähernd

$$c_a = 2\pi \sin \alpha. \tag{50}$$

In Fig. 84 ist c_a nach beiden Annahmen eingezeichnet, ferner die wirklich beobachteten Werte. Man sieht immerhin, daß die Art der

Fig. 84.



Abhängigkeit des Beiwertes von dem Anstellwinkel für kleine Winkel der Zirkulationstheorie, für größere Winkel der Unstetigkeitstheorie folgt. Der Wechsel in der Strömungsart tritt ein, sobald der Flüssigkeitsstrahl sich von der Tragfläche (Lamelle) ablöst. Allerdings befindet sich hinter der Tragfläche keine ruhende Flüssigkeitsmenge, wie die hier dargestellte Theorie annimmt, sondern ein Wirbelraum, über dessen Struktur wir später noch etwas sprechen werden.

7. Die Theorie der vena contracta. Die Theorie der ebenen Potentialströmung mit Unstetigkeitsflächen kann mit Erfolg auf die Erscheinungen der Strahlbildung angewendet werden, z. B. beim Ausfluß einer Flüssigkeit durch eine schlitzartige Öffnung. Wir wollen annehmen, daß die Flüssigkeit durch zwei bis ins Unendliche reichende ebene Wände AB und $A'B'$ begrenzt ist und aus dem links von diesen Wänden liegenden Raumteil durch den Schlitz BB' in den von Luft

erfüllten rechts liegenden Raumteil austreten kann. Die Punkte A, A' sollen in so großer Entfernung vom Schlitz liegen, daß die Flüssigkeit dort als ruhend angesehen werden kann. Die Strömung soll in parallelen Ebenen in identischer Weise erfolgen; die Schwere der Flüssigkeit wollen wir vernachlässigen. Längs den Stromlinien BC und $B'C$, welche den Strahl begrenzen, herrscht offenbar der Luftdruck, den wir als konstant annehmen können. Dabei ist C der unendlich ferne Punkt der z-Ebene, in dem die beiden den Strahl begrenzenden Stromlinien einander treffen. Alsdann muß der Absolutwert der Geschwindigkeit längs der Strecken BC und $B'C$ auf Grund des Bernoullischen Gesetzes (13) ebenfalls konstanten Wert haben. Wir haben daher lediglich dieselben Bedingungen wie in 6: gegebene Richtung der Geschwindigkeit längs der festen Wände AB und $A'B'$ und konstanten Absolutwert derselben an den freien Grenzen. Der Unterschied besteht vor allem darin, daß die strömende Flüssigkeitsmenge in dem jetzt behandelten Falle eine endliche ist.

Infolgedessen entspricht dem von Flüssigkeit erfüllten Teil der $z = x + iy$-Ebene nicht die ganze f-Ebene, sondern nur ein mit der φ-Achse paralleler Streifen derselben, z. B. der Streifen zwischen $\psi = 0$ und $\psi = Q$, wobei Q die in der Zeiteinheit durch die Längeneinheit des Schlitzes ausfließende Flüssigkeitsmenge bedeutet. Nun könnten wir in genau derselben Weise wie in 6. verfahren und diesen Streifen auf den Halbkreis in der Hilfsebene abbilden. Dieses Verfahren hätte den Vorteil, daß wir nicht an die Bedingung ebener Wände gebunden sind, sondern die Strömung bei Ausfluß aus einem Gefäß mit beliebig gestalteten Wänden ermitteln können. In dem speziellen und wichtigsten Falle der ebenen Wände führt indessen die folgende Methode vielleicht etwas einfacher zum Ziele.

Wir betrachten die $w = u - iv$-Ebene. Den einem beliebigen Punkte x, y bzw. φ, ψ entsprechenden Punkt u, v erhalten wir dadurch, daß wir die im Punkte x, y auftretende Geschwindigkeit in der w-Ebene vektoriell auftragen und um die Horizontalachse ($v = 0$) spiegeln. Das Abbild in der w-Ebene stellt daher eine Art Vektordiagramm für die Strömungsgeschwindigkeit dar. Da die Geschwindigkeit im Punkte A bzw. A' gleich Null ist, so fällt das Abbild dieser beiden Punkte in den Nullpunkt. Den Wänden AB und $A'B'$ entsprechen radiale Gerade, deren Richtung durch die Richtung der Geschwindigkeit längs der Wände bestimmt ist. Den freien Strahloberflächen BC und $B'C$ entspricht offenbar wegen der Konstanz des Absolutwertes der Geschwindigkeit ein Kreisbogen, wobei die Lage von C zunächst unbestimmt ist.

Das Abbild in der w-Ebene ist mithin ein Kreissektor, das Abbild in der f-Ebene ein Streifen. Die Aufgabe ist im wesentlichen ge-

löst, wenn wir die Abbildungsfunktion zwischen Streifen und Kreissektor aufstellen. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall, daß die beiden Wände AB und $A'B'$ in eine Gerade fallen: es ist dies der Fall des Ausflusses durch einen Schlitz in einer unendlich ausgedehnten ebenen Wand. Ohne die Allgemeinheit wieder zu beschränken, können wir die Richtung der ebenen Wand mit der y-Achse zusammenfallen lassen. Das Abbild der Strömung in der w-Ebene ist alsdann der Halbkreis $ABCB'A$. Der Punkt C liegt — wie man aus Symmetriegründen gleich einsieht — auf der u-Achse. Wenn wir die „Ausflußgeschwindigkeit", d. h. die Strahlgeschwindigkeit im Unendlichen mit c bezeichnen, so liegt C im Punkte $u = c$, $v = 0$ auf dem Halbkreis, der also den Radius c hat.

Da das Potential f nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, können wir das Abbild des Punktes B' in der f-Ebene in den Nullpunkt legen. Das Abbild von B fällt dann in den Punkt 0, Q.

Wir bilden nun den Streifen $A \overset{B'}{\underset{B}{\quad}} C$ auf den Halbkreis $ABCB'A$ ab.

Durch $f' = e^{f\frac{\pi}{Q}}$ wird der Streifen zunächst auf die Halbebene abgebildet. In der Tat geht die reelle Achse $\psi = 0$ in den positiven Teil der reellen Achse ψ' über, während der Geraden $\psi = Q$, wegen $f = \varphi + Qi$, $e^{\pi i} = -1$, der negative Teil derselben Achse entspricht. Die Punkte B und B' fallen in $f' = 1$ bzw. $f' = -1$. Der Punkt A fällt in den Nullpunkt.

Wir setzen andererseits

$$w' = \frac{w}{c} e^{\frac{\pi i}{2}} = i \frac{w}{c}.$$

Durch diese Abbildung geht der Halbkreis in die Hälfte des Einheitskreises über, und zwar mit 90^0 verdreht, so daß B und B' in die Punkte $+1$ bzw. -1 zu liegen kommen. Die Abbildung zwischen f' und w' wird schließlich durch

$$f' = \frac{2w'}{1 + w'^2}$$

vermittelt, so daß wir zusammenfassend schreiben können:

$$(51) \qquad f = \frac{Q}{\pi} \log f' = \frac{Q}{\pi} \log \frac{2w'}{1 + w'^2} = \frac{Q}{\pi} \log \frac{2i \frac{w}{c}}{1 - \frac{w^2}{c^2}}.$$

Von physikalischem Interesse ist die Größe von Q, wenn wir b, d. h. die Breite des Schlitzes angeben.

Die Asymptoten der Strahloberfläche teilen die Strecke b in drei Teile: der mittlere Teil ist offenbar $\frac{Q}{c}$, die beiden anderen Teile sind gleich und gegeben durch die Differenz δ der Ordinaten y_B und y_C. Wir erhalten daher die Größe δ, wenn wir den Betrag des Imaginärteiles des Integrals $\int_C^B dz$ ausrechnen. Nun können wir schreiben:

$$(52) \qquad \int_C^B dz = \int_C^B \frac{dz}{df} df = \int_C^B \frac{df}{w} = \int_C^B \frac{1}{w} \frac{df}{dw} dw.$$

Aus Formel (51) folgt

$$(53) \qquad df = \frac{Q}{\pi} \frac{1}{w} \frac{1 + \frac{w^2}{c^2}}{1 - \frac{w^2}{c^2}} dw.$$

Längs der freien Grenze ist $w = ce^{i\vartheta}$, also $\frac{dw}{w} = i d\vartheta$ und

$$df = \frac{Q}{\pi} \frac{1 + e^{2i\vartheta}}{1 - e^{2i\vartheta}} i d\vartheta$$

und nach (52)

$$\int_C^B dz = \frac{Q}{\pi c} \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\operatorname{cotg} \vartheta d\vartheta}{e^{i\vartheta}}.$$

Der Betrag des Imaginärteiles ist offenbar

$$(54) \qquad \delta = \int_C^B dy = \frac{Q}{\pi c} \int_{-\pi/2}^{0} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{Q}{\pi c}.$$

Die Breite des Schlitzes ist mithin

$$b = \frac{Q}{c} + 2\delta = \frac{2 + \pi}{\pi} \frac{Q}{c}$$

oder die Ausflußmenge für die Längeneinheit des Schlitzes von der Breite b

$$(55) \qquad Q = \frac{\pi}{2 + \pi} bc.$$

Der Beiwert $\frac{\pi}{2 + \pi}$ gibt das Verhältnis der Strahlbreite in großer Entfernung von der Öffnung zur Breite der Öffnung an; er wird als Kontraktionsbeiwert bezeichnet. Der berechnete Wert $\mu = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0{,}612$ steht in guter Übereinstimmung mit den beobachteten Werten.

Nach derselben Methode läßt sich eine große Menge von Aufgaben erledigen. Der Fall der sogenannten unvollkommenen Kontraktion ergibt sich, wenn man als Begrenzung zunächst zwei parallele Wände annimmt, an welche dann eine senkrechte oder schief gerichtete Gefäßwand sich anschließt. Es läßt sich auch der Stoß eines Strahles gegen feste Wände, ferner der Zusammenstoß freier Strahlen unschwer berechnen.

8. Stationäre Wellen. Wir denken uns den Längsschnitt eines unendlich langen Kanals mit horizontaler Sohlenfläche; diese soll mit der x-Achse zusammenfallen. Wir fragen, ob man einen Bewegungszustand derart finden kann, daß die Gestalt der Oberfläche unverändert bleibt, wobei sie sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit U in der x-Richtung fortbewegt, während die Hauptmasse der Flüssigkeit ruht. Einen solchen Bewegungszustand kann man in einen stationären verwandeln, wenn man das Koordinatensystem, auf welches die Bewegung bezogen wird, mit der Geschwindigkeit U bewegt denkt. Beziehen wir alles auf ein solches Koordinatensystem x, y, in dem die Oberfläche eine ruhende Welle bildet, als ganzes aber mit der Geschwindigkeit $-U$ strömt, so können wir die Frage folgendermaßen stellen: Gibt es stationäre Bewegungen, bei denen die Linie $y = 0$ eine feste Grenze (die Sohle) bildet, und welche Gestalt nimmt dabei die freie Oberfläche der Flüssigkeit an?

Die Bedingung der freien Oberfläche lautet

$$p = p_0, \tag{56}$$

wobei p_0 den atmosphärischen Druck bezeichnen soll. Andererseits gilt bei Berücksichtigung der Schwere für stationäre Strömung nach (15) die Gleichung

$$p = \text{konst} - \frac{\varrho q^2}{2} - \varrho g y, \tag{57}$$

wobei q den Absolutwert der Geschwindigkeit bezeichnet.

Die Aufgabe ist: eine Potentialströmung zu finden, die einerseits $y = 0$ als Stromlinie enthält, andererseits für die freie Oberfläche (welche ebenfalls einer Stromlinie entspricht) die Bedingung (56) befriedigt.

Wir bezeichnen die komplexe Stromfunktion mit $f = \varphi + i\psi$, der Sohlenlinie soll $\psi = 0$, der freien Oberfläche $\psi = c$ entsprechen. Es muß daher für

$$\begin{aligned} \psi &= 0, & y &= 0, \\ \psi &= c, & q^2 + 2gy &= \text{konst} \end{aligned}$$

gelten.

Wir differenzieren die letzte Bedingung nach φ längs der Stromlinie $\psi = c$ und erhalten

$$q\frac{dq}{d\varphi} + g\frac{dy}{d\varphi} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{q}\sin\vartheta,$$

falls wir mit ϑ den Neigungswinkel der Stromlinie bezeichnen. Berücksichtigen wir, daß nach (35) $\omega = \vartheta + i\log q$ eine komplexe Funktion von $f = \varphi + i\psi$ ist, so können wir wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial \varphi}$ durch $-\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}$ ersetzen und erhalten

$$-q^2\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + \frac{g}{q}\sin\vartheta = 0.$$

Für kleine Wellen ist der Winkel ϑ klein und $q = U(1+\varepsilon)$, wobei ε klein gegen Eins ist. Entwickeln wir nach ϑ und ε und vernachlässigen Glieder höherer Ordnung, so erhalten wir für die freie Oberfläche $\psi = c$ die Bedingung

$$-U^2\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + \frac{g}{U}\vartheta = 0. \tag{58}$$

Suchen wir nach periodischen Wellen, so muß ϑ periodisch in φ sein. Wir machen daher den Ansatz:

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos(\mu\varphi)\,\mathrm{Sin}(\mu\psi), \tag{59}$$

(Sin = sinus hyperb.), wodurch die Bedingung für $\psi = 0$ bereits erfüllt ist. Die Bedingung (58) für die freie Oberfläche liefert:

$$\mu\,\mathrm{Cos}(\mu c) - \frac{\mathrm{Sin}(\mu c)\,g}{U^3} = 0$$

oder

$$\frac{1}{\mu c}Tg\,\mu c = \frac{U^3}{gc}. \tag{60}$$

Bezeichnen wir die mittlere Höhe des Wasserspiegels mit h, die Wellenlänge (die Differenz der x-Werte zwischen zwei Werten φ und $\varphi + \frac{2\pi}{\mu}$) mit λ, so ist mit derselben Annäherung, mit der die ganze Rechnung geführt wird (weil nach § 3, **1** annähernd $-U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, also $\psi = -Uy$),

$$Uh = c, \qquad U\lambda = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Wir erhalten daher $\mu c = 2\pi\frac{h}{\lambda}$ und die Gl. (60) lautet:

$$\frac{\lambda}{2\pi} Tg\left(2\pi\frac{h}{\lambda}\right) = \frac{U^2}{g}.$$

Diese Gleichung gibt offenbar die Geschwindigkeit U an, mit welcher eine kleine Welle von der Länge λ in einem unendlich breiten Kanal bei einer mittleren Spiegelhöhe h fortschreitet. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit beträgt also

$$U = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} Tg\left(2\pi\frac{h}{\lambda}\right)}. \tag{61}$$

Für sehr tiefe Kanäle ist $Tg\left(2\pi\frac{h}{\lambda}\right) \sim 1$ und man erhält

$$U = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{62}$$

Ist dagegen die Tiefe des Wassers klein gegen die Wellenlänge (lange Wellen), so erhält man

$$U = \sqrt{gh}. \tag{63}$$

T. Levi-Civitá [1]) hat zuerst nachgewiesen, daß das exakte Problem ebenfalls Lösungen besitzt. Annäherungsmethoden haben schon früher Stokes und Airy angegeben, neuerdings nach den Methoden von T. Levi-Civitá Cisotti [2]), Struik [3]) und Weinstein [4]).

Es ist beobachtet worden, daß außer den periodischen Wellen sogenannte Einzelwellen auftreten; eine einzige Erhöhung kann ebenfalls in unveränderlicher Gestalt auf der Wasseroberfläche fortschreiten. Lord Rayleigh hat eine annähernde Berechnung der Form dieser Einzelwelle angegeben.

Bei Wellen mit kleiner Wellenlänge ist es notwendig, die Kapillarität zu berücksichtigen. Die Oberflächenbedingung lautet in diesem Falle (T = Kapillarspannung)

$$p + \frac{\varrho q^2}{2} + \varrho g y = \frac{T}{R},$$

wobei $\frac{1}{R}$ die Krümmung der Oberfläche darstellt (positiv, wenn die Oberfläche von unten gesehen konkav ist).

---

[1]) Math. Ann. **85**, 256 ff., 1922; **93**, 1925. Proc. of I. intern. Congr. f. appl. Mech. Delft 1924, S. 129 ff. Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik. Berlin 1924.

[2]) Rend. Ac. d. Linc. 5. ser., **27**, 1918; **28**, 1919; **29**, 1920; **32**, 1923.

[3]) Ebenda 6. ser., **1**, 1925.

[4]) Ebenda 6. ser., **3**, 1926.

Die Krümmung $\frac{1}{R}$ ist offenbar gleich der Änderung des Winkels ϑ pro Längeneinheit längs der Stromlinie, und zwar gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\vartheta}{d\varphi}q.$$

Durch Differentiation erhalten wir die ergänzte Oberflächenbedingung

$$-q^2\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} + \frac{g\sin\vartheta}{q} - \frac{T}{\varrho}\left(q\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial q}{\partial\varphi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right) = 0.$$

Für kleine Wellen lautet die Gleichung

$$-U^2\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} + \frac{g}{U}\vartheta - \frac{TU}{\varrho}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{64}$$

Setzen wir die Lösung in der Form

$$\vartheta = \vartheta_0\cos(\mu\varphi)\,Sin(\mu\psi)$$

an, so erhalten wir aus (64) für $\psi = c$

$$-\mu\,Cos(\mu c) + Sin(\mu c)\left(\frac{g}{U^3} + \frac{T}{\varrho U}\mu^2\right) = 0$$

oder mit $c = Uh$, $U\lambda = \frac{2\pi}{\mu}$

$$\frac{U^2}{g} = \left[1 + \frac{T}{\varrho g}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right]\frac{\lambda}{2\pi}\,Tg\,2\pi\frac{h}{\lambda}. \tag{65}$$

Wir wollen insbesondere den Fall $h = \infty$ (sehr tiefe Kanäle) diskutieren.

Die Fortschreitungsgeschwindigkeit ist für sehr kleine Wellenlängen

$$U = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}, \tag{66}$$

für sehr große

$$U = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{67}$$

Dazwischen hat U einen Kleinstwert, und zwar für

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{T}{\varrho g}}.$$

Der entsprechende Kleinstwert von U beträgt

$$U_{\min} = \sqrt[4]{\frac{4gT}{\varrho}}. \tag{68}$$

Wenn man einen eingetauchten Körper in der Flüssigkeit bewegt, so beobachtet man, daß erst bei einer gewissen Mindestgeschwindigkeit

stationäre Wellen auftreten. Diese Grenzgeschwindigkeit entspricht der Minimalgeschwindigkeit der fortschreitenden periodischen Wellen. Sie nimmt mit der vierten Wurzel aus der Oberflächenspannung zu.

9. Geschwindigkeit einer Wellengruppe. Um die Gleichungen der Oberflächenwellen in der Gestalt anzuschreiben, wie sie für Darstellung von Wellen üblich ist, müssen wir nur beachten, daß wir wegen der angenommenen Kleinheit von ϑ in Gl. (59) für φ und ψ die Werte einsetzen können, die sie für die Strömung der Hauptmasse der Flüssigkeit haben. Da dies eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit $-U$ ist, wenn wir das System x, y zugrunde legen, in dem die Gesamtströmung stationär ist, haben wir $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -U$ und daher nach § 3, **1**: $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -U$, also $\varphi = -Ux$, $\psi = -Uy$ einzusetzen. Dann wird aus (59)

$$\vartheta = -\vartheta_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\lambda} y. \tag{69}$$

Gehen wir dann wieder zu dem Koordinatensystem zurück, in dem die Welle sich mit der Geschwindigkeit U fortpflanzt, ist an Stelle von x jetzt $x - Ut$ zu setzen und aus (69) wird

$$\vartheta = -\vartheta_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - Ut) \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\lambda} y. \tag{70}$$

Wir wollen jetzt die komplexe Darstellung der Welle anwenden, wie sie in der Theorie der elektromagnetischen Wellen XII, § 1, **3** eingeführt wurde. Wenn wir die Bezeichnung der Gl. (13) von XII, § 1 benutzen, nur mit dem Unterschied, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle jetzt U (anstatt c) heißt und $-\vartheta_0 \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\lambda} y = A$ setzen, können wir die Welle (70) in der komplexen Darstellung

$$\vartheta = A e^{ikx} e^{-ikUt} \tag{71}$$

anschreiben. Eine Formel ganz derselben Gestalt gilt auch für die Erhebung η eines Wellenpunktes über das mittlere Flüssigkeitsniveau, weil für kleine ϑ ja $\frac{d\eta}{dx} = \vartheta$ gilt.

Wir betrachten nun nicht eine einzelne Welle von bestimmter Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ und Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sondern eine ganze Gruppe von Wellen verschiedener Wellenlänge, aus denen wir uns durch Superposition die resultierende Welle berechnen wollen. Dabei soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in bestimmter Weise von der Wellenlänge abhängen, es soll eine „Dispersion“ der Wellen bestehen,

und die Dispersionsformel $U = U(k)$ soll uns bekannt sein. Wenn wir dann die einzelnen Wellen durch den Index j unterscheiden, wird

$$\eta = \sum_j A_j e^{ik_j x} e^{-ik_j U_j t}. \tag{72}$$

Wir nehmen nun weiter an, daß alle Wellen der Gruppe Wellenlängen, also auch Geschwindigkeiten haben, die nicht sehr von einem bestimmten Werte $\lambda = 2\pi/k$ bzw. U verschieden sind. Dann können wir

$$k_j = k + \delta k_j, \quad k_j U_j = kU + \frac{d(kU)}{dk}\delta k_j \tag{73}$$

setzen, wobei δk_j sehr klein gegen k ist. Aus (73) und (72) folgt:

$$\eta = A e^{ik(x-Ut)}, \quad A = \sum_j A_j e^{t\delta k_j\left(x - \frac{d(kU)}{dk}t\right)}. \tag{74}$$

Durch die Superposition der Wellen unserer Gruppe entsteht also eine neue Welle, deren Amplitude A aber nicht mehr konstant ist. Wegen der Kleinheit der δk_j gegenüber k ist A nur sehr langsam veränderlich, bleibt insbesondere während vieler Schwingungen der Welle, von der wir ausgingen, noch annähernd konstant. Wir können also die resultierende Wirkung der Wellengruppe nach (74) so auffassen, daß sich die resultierende Amplitude A, die wir wegen ihrer annähernden Konstanz während vieler Schwingungen identifizieren können, nach der zweiten Gl. (74) selbst wellenartig fortpflanzt, und zwar mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$G = \frac{d(kU)}{dk} = U + k\frac{dU}{dk} = U - \lambda\frac{dU}{d\lambda}, \tag{75}$$

die wir die Gruppengeschwindigkeit unserer Wellen nennen. Wo es keine streng monochromatischen Wellen (d. h. Wellen von einer einzelnen bestimmten Wellenlänge) gibt, wird uns immer diese Gruppengeschwindigkeit die wirkliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Wellenberges darstellen. Die Größe U bezeichnete man im Gegensatz zu G häufig als Phasengeschwindigkeit.

Wenn wir als Beispiel die Oberflächenwellen in einem Kanal betrachten, so hängt nach (61) ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit U in der Tat von der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ab. Wenn wir diese „Dispersionsformel“ in der Gestalt

$$U = \sqrt{\frac{g}{k}\operatorname{Tg} kh} \tag{76}$$

anschreiben, so folgt[1]) aus (75) für die Gruppengeschwindigkeit

$$G = \frac{U}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{Sin} 2kh}\right). \tag{77}$$

[1]) Nach den Differentiationsformeln für Hyperbelfunktionen 1. Bd., I, § 1, (11′).

G ist also von der Phasengeschwindigkeit U verschieden. Besonders einfach wird der Ausdruck für G, wenn wir annehmen, daß die Wellenlänge λ im Vergleich zur Tiefe h des Kanals sehr klein oder sehr groß ist. Im ersten Falle ist kh sehr groß, im zweiten Falle sehr klein gegen die Einheit. Aus (77) ergibt sich also für sehr kurze Wellen, weil der Sinhyp. für große Argumente wie die Exponentialfunktion wächst,

$$G = \tfrac{1}{2} U, \tag{78}$$

für sehr lange Wellen hingegen, weil der Sinhyp. für kleine Argumente gleich dem Argument wird,

$$G = U. \tag{79}$$

Die physikalische Bedeutung der Größe G liegt darin, daß sie, wie Reynolds[1]) und Rayleigh[2]) gezeigt haben, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungsenergie längs des Kanals darstellt.

§ 4. Räumliche Potentialbewegung.

1. Methode der Quellen und Senken. Eine räumliche Potentialströmung ist durch die Potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ bestimmt, deren Ableitungen die drei Geschwindigkeitskomponenten liefern:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Im Falle einer nicht kompressiblen Flüssigkeit gehorcht die Potentialfunktion [wegen § 2, (2)] der Gleichung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Man kann nun räumliche Potentialströmungen dadurch erzeugen, daß man einfache Lösungen dieser Gleichung superponiert. Infolge der Linearität der Gl. (1) ist die Summe von Lösungen ebenfalls eine Lösung der Gleichung. Wir wollen uns zunächst auf stationäre Bewegungen beschränken

Eine einfache Lösung ist vor allem die gleichförmige Parallelströmung. Lassen wir die Strömungsrichtung mit der x-Richtung zusammenfallen, so ist das entsprechende Potential $\Phi = Ux$.

Eine zweite einfache Lösung ist die sogenannte Quellen- bzw. Senkenströmung, bei welcher die Geschwindigkeit nur von der Entfernung von dem sogenannten Quellen- bzw. Senkenpunkt abhängig und in der Richtung des von diesem Punkte gezogenen Fahrstrahles liegt. Bei der Quelle ist der Sinn der Geschwindigkeit vom Quellpunkt aus nach

[1]) Nature 1877 und Scient. Papers, vol. I, p. 198 ff.

[2]) Phil. Mag. **1**, 257 ff., 1876 und Scient. Papers, vol. I, p. 251 ff.; Proc. of Lond., Math. Soc. **9**, 21 ff., 1877 und Scient. Papers, vol. I, p. 322 ff.

außen, bei der Senke gegen den Senkenpunkt gerichtet. Das entsprechende Potential lautet

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} \tag{2}$$

(r Entfernung vom Quellen- bzw. Senkenpunkt). Q ist die Ergiebigkeit der Quelle bzw. der Senke, d. h. das Flüssigkeitsvolumen, welches durch jede Kugeloberfläche durchfließt, und so im Punkte $r = 0$ hervorquillt bzw. verschwindet.

Superponiert man eine Quellen- und eine Senkenströmung gleicher Ergiebigkeit, wobei die Mittelpunkte etwa auf der x-Achse in $x = \pm\varepsilon$ angenommen werden sollen, so erhält man eine Strömung, welche um die x-Achse Rotationssymmetrie besitzt. Das Potential lautet offenbar

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-\varepsilon)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\varepsilon)^2+y^2+z^2}}\right\}. \tag{3}$$

Wir wollen ε zu Null abnehmen, gleichzeitig jedoch Q so wachsen lassen, daß $2Q\varepsilon$ einem endlichen Grenzwert M zustrebt. Entwickeln wir Φ nach Potenzen von ε, so erhalten wir

$$\Phi = \frac{Q\varepsilon}{4\pi}\,\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \text{höhere Glieder.}$$

Als Grenzwert für $\varepsilon = 0$ erhalten wir somit

$$\Phi_1 = \frac{M}{4\pi}\,\frac{x}{r^3}, \tag{4}$$

falls r den Abstand von dem Punkte bezeichnet, in welchen wir die Quelle und Senke zusammenrücken ließen. Man sieht, daß wir Φ auch schreiben können:

$$\Phi_1 = -\frac{M}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{5}$$

In dieser Form sieht man unmittelbar, daß $\Phi_1(x, y, z)$ eine Potentialfunktion ist[1]). Das Gebilde, welches Φ_1 als Potentialfunktion ergibt, nennen wir eine Doppelquelle (Quellensenkenpaar) (1. Bd., S. 470 f., Fig. 59).

Bei der Doppelquelle ist die Flüssigkeitsmenge, die durch eine um den Mittelpunkt gelegte geschlossene Fläche strömt, gleich Null.

---

[1]) Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man Lösungen der Potentialgleichung von der Form $\frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}$, wobei $P_n(\cos\vartheta)$ das Legendresche Polynom n-ter Ordnung von $\cos\vartheta = \frac{x}{r}$ ist (1. Bd., S. 310 ff.).

Lassen wir hingegen den Abstand der Quelle und der Senke und gleichzeitig die Ergiebigkeit ins Unendliche wachsen, und zwar so, daß $\frac{Q}{\varepsilon^2}$ einem Grenzwert sich nähert, so bekommen wir durch Entwicklung von (3) nach Potenzen von $1/\varepsilon$ als Grenzgebilde die Parallelströmung, und zwar

$$\Phi = \lim_{\varepsilon = \infty} \frac{Q}{2\pi\varepsilon^2} x = U x. \tag{6}$$

Die Superposition der Parallelströmung mit einer Doppelquelle im Punkte $x = y = z = 0$ liefert

$$\Phi = U x + \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3}. \tag{7}$$

Die Gl. (7) liefert, wie sich zeigen läßt, eine Strömung um eine Kugel (vgl. 1. Bd., S. 583). Entsprechend der Rotationssymmetrie um die x-Achse ist es praktisch, Polarkoordinaten r, ϑ und φ einzuführen. Die Potentialfunktion lautet alsdann:

$$\Phi = U r \cos\vartheta + \frac{M}{4\pi} \frac{\cos\vartheta}{r^2}. \tag{8}$$

Die Geschwindigkeiten in der radialen Richtung und senkrecht zum Radius sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U - \dfrac{M}{2\pi r^3}\right)\cos\vartheta, \\ v_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\left(U + \dfrac{M}{4\pi r^3}\right)\sin\vartheta. \end{cases} \tag{9}$$

Wählt man $M = 2\pi R^3 U$, so verschwindet für $r = R$ die radiale Geschwindigkeit v_r, so daß die Potentialfunktion nach Gl. (7) oder (8) die Strömung um eine Kugel vom Halbmesser R darstellt.

Die Geschwindigkeit an der Wand längs des Meridiankreises lautet

$$v_\vartheta = -\tfrac{3}{2} U \sin\vartheta. \tag{10}$$

Die Maximalgeschwindigkeit, welche für $\vartheta = \pi/2$ auftritt, beträgt mithin das Anderthalbfache der Geschwindigkeit im Unendlichen.

Ordnet man eine Reihe von Quellen und Senken auf der x-Achse so an, daß die Gesamtergiebigkeit gleich Null ist, so erhält man durch Superposition einer Parallelströmung in der x-Richtung im allgemeinen die Strömung um einen Umdrehungskörper. Andererseits kann man einen Umdrehungskörper (etwa einen Luftschiffkörper) als gegeben annehmen und die Belegung der x-Achse bzw. der innerhalb des Umdrehungskörpers liegenden Strecke derselben suchen, die zusammen mit der Parallelströmung die gegebene Oberfläche als Stromfläche ergibt.

Für eine rotationssymmetrische Strömung kann man ähnlich wie für eine ebene Strömung eine Stromfunktion ψ einführen, und zwar durch den Ansatz

$$v_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v_x = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \tag{11}$$

wobei ϱ und x Zylinderkoordinaten bezeichnen.

Die Kontinuitätsgleichung lautet nämlich in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho v_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x) = 0, \tag{12}$$

so daß man unmittelbar sieht, daß der Ansatz (11) die Kontinuitätsgleichung identisch befriedigt. Ordnen wir den Wert $\psi = 0$ der Stromlinie längs der Symmetrieachse zu, so gibt der Wert $2\pi\psi$ das Flüssigkeitsvolumen an, welches durch einen beliebigen Querschnitt der durch die Fläche $\psi = \text{konst}$ gebildeten Stromflächenröhre durchfließt.

Die zu einer Potentialfunktion Φ gehörende Stromfunktion ψ läßt sich einfach ermitteln. So lautet z. B. die Stromfunktion der Parallelströmung (6)

$$\psi = \frac{U}{2\pi}\varrho^2\pi. \tag{13}$$

Die Stromfunktion einer Quelle erhalten wir am einfachsten durch die Bedingung, daß durch eine Kegelfläche mit dem Öffnungswinkel ϑ das Flüssigkeitsvolumen $2\pi\psi$ durchfließen muß. Die Oberfläche der Kugelkalotte der Einheitskugel ist offenbar $2\pi(1-\cos\vartheta)$, so daß wir setzen müssen

$$\frac{2\pi\psi}{Q} = \frac{2\pi(1-\cos\vartheta)}{4\pi}$$

oder

$$\psi = \frac{Q}{4\pi}(1-\cos\vartheta),$$

bzw. in Zylinderkoordinaten ausgedrückt

$$\psi = \frac{Q}{4\pi}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{\varrho^2 + x^2}}\right). \tag{14}$$

Wir belegen die Strecke $0 \leqq \xi \leqq l$ der x-Achse mit stetig verteilten Quellen, und zwar mit der Intensitätsdichte $q(\xi)$ pro Längeneinheit. Die entsprechende Stromfunktion lautet:

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_0^l \left[q(\xi)\,d\xi - \frac{(x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \varrho^2}}\right], \tag{15}$$

oder mit Rücksicht darauf, daß die Gesamtintensität der Quellen verschwinden muß $\left(\int_0^l q(\xi)\,d\xi = 0\right)$:

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_0^l \frac{(\xi - x)\,q(\xi)\,d\xi}{[(x-\xi)^2 + \varrho^2]^{1/2}}. \tag{16}$$

Die Bedingung, daß die Oberfläche $\varrho = \varrho(x)$ umströmt wird, d. h. zur Stromfläche $\psi = 0$ gehört, lautet mithin, da im Unendlichen die Strömung eine Parallelströmung wird, wegen (13):

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^l \frac{q(\xi)(\xi - x)\,d\xi}{[(x-\xi)^2 + \varrho^2]^{1/2}} = U\,\frac{\varrho^2}{2\pi}, \tag{17}$$

wobei ϱ als gegebene Funktion von x anzusehen ist. Die Lösung der Integralgleichung (17) („erster Art" im Sinne von Bd. 1, S. 385) liefert die Quellenverteilung längs der x-Achse und damit nach (16) die Strömung um den gegebenen Umdrehungskörper.

Ist die Geschwindigkeit im Unendlichen (die Anblasegeschwindigkeit) nicht parallel zur Symmetrieachse, hat sie vielmehr die Komponenten U und W nach den x- und z-Richtungen, so kann man die Strömung aus den beiden Strömungszuständen, welche der zur Achse parallelen Anblasegeschwindigkeit U und der senkrechten Anblasegeschwindigkeit W entsprechen, durch Superposition zusammensetzen. Den ersten Fall haben wir durch die Methode der Quellen behandelt; man kann den zweiten Fall dadurch erledigen, daß man längs der x-Achse im Innern des Rotationskörpers Doppelquellen anordnet, deren Achse mit der z-Achse zusammenfällt. Man kann leicht beweisen, daß man durch Anordnung solcher Doppelquellen und Kombination der so erzeugten Strömung mit einer Parallelströmung in der z-Richtung stets eine Rotationsfläche als umströmte Oberfläche erhält.

Die Bedingung, daß eine Rotationsfläche mit der Meridianlinie $\varrho = \varrho(x)$ (ϱ, x, φ Zylinderkoordinaten, wo der oberen Hälfte der x-Ebene der Wert $\varphi = 0$ entsprechen soll) eine Stromfläche ist, lautet

$$\frac{v_\varrho}{v_x} = \frac{d\varrho}{dx}, \tag{18}$$

und zwar muß diese Gleichung für beliebige Werte von φ gelten. Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten, welche von der Doppelquellenbewegung herrühren, mit w_ϱ, w_x, w_φ, die Geschwindigkeit der Parallelströmung mit W, so ist offenbar

$$v_\varrho = W\cos\varphi + w_\varrho, \quad v_x = w_x, \quad v_\varphi = -W\sin\varphi. \tag{19}$$

Die Bedingung (18) lautet daher

$$\frac{W\cos\varphi + w_\varrho}{w_x} = \frac{d\varrho}{dx}. \tag{18a}$$

Die Bedingung ist offenbar erfüllt, wenn w_ϱ und w_x die Gestalt

$$w_\varrho = w_{\varrho_0}\cos\varphi, \qquad w_x = w_{x_0}\cos\varphi \tag{20}$$

haben, wobei w_{ϱ_0} und w_{x_0} die Werte für $\varphi = 0$ sind.

Nun ist das Potential einer Doppelquelle, falls ihre Achse parallel zur z-Achse liegt, nach (3) und (8)

$$\Phi = \frac{M}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{\varrho^2 + x^2} \tag{21}$$

(ϱ und x sind vom Quellenpunkt gerechnet). Es gilt somit zunächst für eine einzelne Doppelquelle:

$$\begin{cases} w_\varrho = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varrho} = -\dfrac{M}{2\pi}\dfrac{\varrho\cos\varphi}{(\varrho^2+x^2)^2} = w_{\varrho_0}\cos\varphi, \\ w_x = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\dfrac{M}{2\pi}\dfrac{x\cos\varphi}{(\varrho^2+x^2)^2} = w_{x_0}\cos\varphi. \end{cases} \tag{22}$$

Dieselbe Beziehung gilt auch bei Superposition mehrerer Doppelquellen bzw. bei stetiger Belegung der x-Achse.

Wird die x-Achse in ihrer ganzen Länge mit Doppelquellen gleicher Verteilungsdichte, etwa von der Intensität μ pro Längeneinheit belegt, so erhalten wir, wie man leicht zeigen kann, die Strömung um einen unendlich langen Zylinder, der senkrecht zur Achse angeströmt wird. Wir erhalten für das Potential nach (21) den Ausdruck

$$\Phi = \frac{\mu}{4\pi}\cos\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\varrho^2 + (x-\xi)^2} = -\frac{\mu}{4\varrho}\cos\varphi \tag{23}$$

und für die Geschwindigkeit nach (22)

$$w_\varrho = \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} = \frac{\mu\cos\varphi}{4\varrho^2}. \tag{24}$$

Setzen wir $\mu = -4a^2W$, so ist offenbar für die Zylinderfläche $\varrho = a$

$$w_\varrho + W\cos\varphi = 0.$$

Bei veränderlicher Belegungsdichte längs der Strecke $0 \leqq \xi \leqq l$ ist

$$\Phi = \frac{\cos\varphi}{4\pi}\int_0^l \frac{\mu(\xi)\,d\xi}{\varrho^2 + (x-\xi)^2} \tag{25}$$

und die Bedingung, daß die Linie $\varrho = \varrho(x)$ Meridianlinie einer Stromfläche ist, lautet nach (18a)

$$W\cos\varphi + w_\varrho - w_x\frac{d\varrho}{dx} = 0$$

oder nach (22) und (25)

$$(26) \qquad \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{d\varrho}{dx}\int_0^l \frac{\mu(\xi)(\xi-x)\,d\xi}{[\varrho^2+(x-\xi)^2]^{\frac{3}{2}}} + \varrho\int_0^l \frac{\mu(\xi)\,d\xi}{[\varrho^2+(x-\xi)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\} = W.$$

Die Lösung dieser Integralgleichung liefert die Doppelquellenbewegung bzw. die Strömung um den senkrecht angeströmten Umdrehungskörper.

Die beiden Integralgleichungen (17) und (26) lassen sich in praktischen Fällen, insbesondere für längliche Körper sehr gut angenähert lösen, indem man z. B. die Belegung für gleiche Teilstrecken streckenweise konstant annimmt und die Integration für solche Strecken ausführt. Man erhält ein System linearer Gleichungen für die Belegungen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, welche den Strömungszustand mit guter Annäherung angeben.

Die Rechnung dient in erster Linie zur Ermittlung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern bei axialer und schiefer Anblasung. Die ermittelten Druckwerte, die durch die Bernoullische Beziehung bestimmt werden, sind in guter Übereinstimmung mit den an Modellen gemessenen Werten. Die Abweichung ist nur am Heck des Luftschiffkörpers erheblich, da infolge des Reibungseinflusses Wirbelablösung entsteht und die Strömung wesentlich modifiziert wird.

Die ermittelte Druckverteilung liefert für den Fall der axialen Anströmung die resultierende Kraft Null und das resultierende Moment Null. Für den Fall der schiefen Anblasung erhalten wir zwar keine resultierende Kraft, indessen ein Drehmoment, welches das Luftschiff zur Anblaserichtung querzu stellen bestrebt ist. Das Moment ist proportional dem Produkt UW; die Ermittlung dieses Moments werden wir im nächsten Punkte von einem allgemeinen Standpunkt aus besprechen.

Die Theorie der Potentialströmungen liefert daher weder eine Erklärung für den Formwiderstand von Luftschiffkörpern, noch für den sogenannten dynamischen Auftrieb (senkrechte Kraft im Falle schiefen Anblasens). Beide sind durch Auftreten von Wirbeln bedingt, welche bisher außer acht gelassen worden sind.

2. Bewegung eines festen Körpers durch eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit[1]). Die Bewegung eines festen Körpers sei durch die Geschwindigkeit eines Punktes, den wir als Ursprungspunkt eines mit dem Körper verbundenen „körperfesten" Koordinatensystems x_1, x_2, x_3 wählen, und durch die Drehgeschwindigkeit dieses Koordinatensystems relativ zu einem ruhenden System gekennzeichnet. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes ist alsdann gegeben durch $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{x})$, falls $\mathfrak{u}$ die Ge-

[1]) Die verwendeten Sätze aus der Theorie der Bewegungen starrer Körper findet man in Kap. III, § 1.

schwindigkeit des Ursprungspunktes, $\bar{\omega}$ die vektoriell genommene Drehgeschwindigkeit, $\mathfrak{r}$ den Fahrstrahl vom Ursprungspunkt bis zum betreffenden Punkte bedeutet [1. Bd., S. 96, (15)]. Der augenblickliche Strömungszustand der Flüssigkeit ist dann durch folgende Bedingungen festgelegt.

Es bezeichne $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ das Geschwindigkeitspotential im Augenblick t, so muß

a) überall außerhalb des Körpers $\Delta\varphi = 0$ gelten;

b) im Unendlichen soll die Funktion φ mit ihren Ableitungen verschwinden, und zwar soll φ stärker als $\frac{1}{r}$ verschwinden;

c) auf der Oberfläche des Körpers muß die senkrechte Komponente der Strömungsgeschwindigkeit mit der senkrechten Komponente von $\mathfrak{v}$ übereinstimmen, d. h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \{\mathfrak{u} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{r})\} \cdot \mathfrak{n} \tag{27}$$

gelten, falls $\mathfrak{n}$ den senkrecht zum Flächenelement nach außen orientierten Einheitsvektor mit den Komponenten n_1, n_2, n_3 bedeutet.

Wir setzen

$$\varphi = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \varphi_4 \omega_1 + \varphi_5 \omega_2 + \varphi_6 \omega_3, \tag{28}$$

wobei u_1, u_2, u_3 bzw. ω_1, ω_2, ω_3 die Komponenten der beiden Vektoren $\mathfrak{u}$ bzw. $\bar{\omega}$ bedeuten, und zwar zerlegt nach den Achsenrichtungen des körperfesten Koordinatensystems. Die sechs Funktionen $\varphi_1 \dots \varphi_6$ sollen so gewählt werden, daß sie den Bedingungen a) und b) genügen. Die Bedingung c) lautet, falls wir die rechte Seite in Komponenten schreiben:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 + (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) n_1 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) n_2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) n_3$$

oder anders geordnet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 + \omega_1 (x_2 n_3 - x_3 n_2) + \omega_2 (x_3 n_1 - x_1 n_3) + \omega_3 (x_1 n_2 - x_2 n_1). \tag{29}$$

Die sechs Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$ müssen daher in den Oberflächenpunkten folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = n_1, & \dfrac{\partial\varphi_4}{\partial n} = x_2 n_3 - x_3 n_2, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} = n_2, & \dfrac{\partial\varphi_5}{\partial n} = x_3 n_1 - x_1 n_3, \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial n} = n_3, & \dfrac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x_1 n_2 - x_2 n_1. \end{cases} \tag{30}$$

Damit ist die Strömung, welche der bewegte Körper erzeugt, vollständig festgelegt. Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ sind ganz bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3, welche nur von der Körperform abhängen. Die Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\overline{\omega}$ können von der Zeit beliebig abhängen.

Von besonderem Interesse ist die Frage: Welche Kräfte und Momente werden von der Flüssigkeit auf den bewegten Körper ausgeübt? Zur Beantwortung dieser Frage ziehen wir den Impulssatz (§ 2, 7) heran. Wir betrachten ein abgeschlossenes Gebiet, welches wir z. B. durch eine Kugel vom Halbmesser R begrenzt denken. Nach dem Impulssatz ist die resultierende Kraft, welche vom Körper auf die Flüssigkeit ausgeübt wird, gleich der Summe folgender Kraftgrößen:

1. der Resultierenden der an der äußeren Begrenzungsfläche wirkenden Drucke;
2. der zeitlichen Änderung der im Gebiet befindlichen Bewegungsgröße;
3. des Überschusses des durch die Begrenzungsfläche einströmenden Impulses gegenüber dem ausströmenden.

Man sieht zunächst unmittelbar, daß der unter 3. erwähnte Betrag für die äußere Begrenzungsfläche wegen der Bedingung b) verschwindend klein wird, sobald R sehr groß wird. Da φ stärker als $\frac{1}{r}$ und somit die Geschwindigkeitskomponenten stärker als $\frac{1}{r^2}$ gegen Null gehen, ist die durch die Flächeneinheit durchströmende Impulsmenge kleiner als von der Größenordnung $\frac{1}{R^4}$. Das Oberflächenintegral über die Kugelfläche liefert daher für $R = \infty$ Null.

Es verbleiben also folgende Beträge:

1. Die Resultierende der Drucke beträgt, falls das Flächenelement auf der Kugeloberfläche mit dO bezeichnet wird, $\int p\mathfrak{n}dO$, wobei $\mathfrak{n}$ den senkrecht zur Oberfläche positiv nach dem Innern des Gebietes gerichteten Einheitsvektor darstellt. Nun ist nach § 2, (22) für eine Potentialströmung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} = \text{konst},$$

so daß, wenn p_0 den Druck im Unendlichen, q den Absolutwert der Geschwindigkeit bedeutet,

$$p = p_0 - \frac{\varrho q^2}{2} - \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{31}$$

2. Die Impulsmenge innerhalb des betrachteten Bereiches ist offenbar (mit dV als Volumenelement)

$$\mathfrak{g} = \varrho \int \operatorname{grad} \varphi \, dV.$$

Nach dem Gaußschen Satze läßt sich dieses Volumenintegral als Differenz zweier Oberflächenintegrale ausdrücken, und zwar ist

$$\mathfrak{g} = \varrho \int \varphi \mathfrak{n} \, dO - \varrho \int \varphi \mathfrak{n} \, do = \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2,$$

wobei das zweite Integral über die Oberfläche (mit dem Element do) des festen Körpers zu nehmen ist.

Die Änderung der beiden Integrale $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ wollen wir getrennt berechnen. Da die äußere Begrenzung fest gewählt wurde, ist die Änderung des ersten Anteiles in der Zeiteinheit

$$\varrho \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathfrak{n} \, dO.$$

Die Summe der Resultierenden der Drucke und der Anderung des Impulsanteiles $\mathfrak{g}_1$ liefert daher nach (31)

$$\int p \mathfrak{n} \, dO + \varrho \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathfrak{n} \, dO = \int p_0 \mathfrak{n} \, dO - \frac{\varrho}{2} \int q^2 \mathfrak{n} \, dO.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist offenbar Null, weil ein allseitig gleicher Druck keine Resultierende ergeben kann; im zweiten Gliede nimmt der Integrand mindestens so stark wie $\frac{1}{r^4}$ ab, so daß bei wachsendem R dieser Betrag ebenfalls zu Null geht.

Es bleibt also nur die zeitliche Änderung der Größe

$$\mathfrak{g} = -\varrho \int \varphi \mathfrak{n} \, do. \tag{32}$$

Das Ergebnis kann man in anschaulicher Weise so ausdrücken: die Bewegung des festen Körpers findet so statt, als wenn in jedem Punkte seiner Oberfläche eine Bewegungsgröße vom Betrage $\varrho\varphi$ pro Flächeneinheit senkrecht zur Oberfläche nach dem Innern des festen Körpers gerichtet angeheftet wäre. Dies bedeutet also eine scheinbare Vergrößerung der Trägheit des festen Körpers. Falls der Körper Beschleunigungen erfährt, hat die Kraft, welche den Körper durch die Flüssigkeit bewegen soll, nicht nur die der Masse des Körpers entsprechende Trägheitskraft, sondern auch die aus der Strömung resultierende Impulsänderung zu überwinden.

Man kann nun leicht zeigen, daß das Moment, welches auf den Körper ausgeübt werden muß, um eine Bewegung zu erzwingen, gleich der Änderung des entsprechenden Dralles (Drehimpulses) ist, den man dadurch erhält, daß man wiederum die Größe $\varrho\varphi$ als Impuls an

den Körper angeheftet denkt und das Moment der so verteilten Bewegungsgröße berechnet.

Zu diesem Zwecke wenden wir den Satz vom Drall an. Das Koordinatensystem x, y, z soll im Augenblick t mit dem körperfesten System x_1, x_2, x_3 zusammenfallen, indessen im Raume fest bleiben. Die Momente, welche auf den Körper ausgeübt werden, beziehen wir auf den Ursprungspunkt dieses Koordinatensystems. Das Moment ist offenbar gleich der Summe folgender Beträge:

1. Moment der Drucke an der äußeren Begrenzungsfläche (im Falle einer Kugel gleich Null).
2. Änderung des Moments der im Kontrollraum befindlichen Impulsmenge.
3. Moment der durch die äußere Begrenzungsfläche austretenden Impulsmenge.

Man kann mit der gleichen Beweisführung wie oben zeigen, daß mit $R = \infty$ der Betrag 3. gegen Null geht. Der Drall der gesamten Bewegungsgröße innerhalb O ist gleich

$$\mathfrak{i} = \varrho \int (\operatorname{grad} \varphi \times \mathfrak{r})\, dV. \tag{33}$$

Der Vektor $\mathfrak{r}$ ist der Fahrstrahl vom raumfesten Koordinatenursprung gerechnet. Man zeigt leicht durch partielle Integration[1]), daß das Volumenintegral ebenfalls durch die Differenz zweier Oberflächenintegrale ausgedrückt wird:

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 - \mathfrak{i}_2 = \varrho \int (\varphi \mathfrak{n} \times \mathfrak{r})\, dO - \varrho \int (\varphi \mathfrak{n} \times \mathfrak{r})\, do.$$

Durch dieselbe Beweisführung wie oben erhält man das Resultat, daß, wenn R ins Unendliche wächst, schließlich nur die negativ genommene Änderung des Drallbeitrages $\mathfrak{i}_2 = \varrho \int (\varphi \mathfrak{n} \times \mathfrak{r})\, do$ als maßgebend für das Moment übrigbleibt.

Hiermit ist die obige Behauptung erwiesen.

Bezeichnen wir die Komponenten dieses zusätzlichen Impulses bzw. Dralls mit g_1, g_2, g_3 bzw. i_1, i_2, i_3, so gilt offenbar

$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= \int \varphi n_1\, do, & i_1 &= \int \varphi (n_2 x_3 - n_3 x_2)\, do, \\ g_2 &= \int \varphi n_2\, do, & i_2 &= \int \varphi (n_3 x_1 - n_1 x_3)\, do, \\ g_3 &= \int \varphi n_3\, do, & i_3 &= \int \varphi (n_1 x_2 - n_2 x_1)\, do. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Unter Berücksichtigung des Ansatzes (28) erscheint jede der obigen Impulskomponenten als lineare Funktion der sechs Größen u_1, u_2, u_3, ω_1, ω_2, ω_3. Die Beiwerte (Koeffizienten) bilden ein Schema von 36 Größen.

---

[1]) Zunächst ist offenbar $\operatorname{grad} \varphi \times \mathfrak{r} = \nabla \varphi \times \mathfrak{r} = \operatorname{rot} (\varphi \mathfrak{r})$, dann nach Bd. 1, S. 71, Gl. (30) $\int\limits_{(V)} \operatorname{rot} (\varphi \mathfrak{r})\, dV = \int\limits_{(O)+(o)} (\mathfrak{n} \times \varphi \mathfrak{r})\, dO = \int\limits_{(O)+(o)} (\varphi \mathfrak{n} \times \mathfrak{r})\, dO.$

Schreiben wir das Koeffizientenschema in der Form

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{61} & \cdots & \alpha_{66} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die Komponenten n_1, n_2, n_3, $(\text{rot } \mathfrak{n})_1$, $(\text{rot } \mathfrak{n})_2$, $(\text{rot } \mathfrak{n})_3$ mit $n_1 n_2 \dots n_6$, so haben wir allgemein wegen (34) und (28)

$$\alpha_{\iota\varkappa} = \varrho \int n_\iota \varphi_\varkappa \, do. \tag{35}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß $\alpha_{\iota\varkappa} = \alpha_{\varkappa\iota}$ ist. Die Funktionen $\varphi_1 \dots \varphi_6$ sind nämlich so bestimmt, daß auf der Oberfläche $\frac{\partial \varphi_\iota}{\partial n} = n_\iota$ ist. Wir können daher auch schreiben:

$$\alpha_{\iota\varkappa} = \varrho \int \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial n} \varphi_\varkappa \, do.$$

Nun gilt nach dem Greenschen Satze für zwei beliebige Potentiale

$$\int \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial n} \varphi_\varkappa \, do - \int \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial n} \varphi_\iota \, do = 0,$$

so daß daraus $\alpha_{\iota\varkappa} = \alpha_{\varkappa\iota}$ folgt. Damit wird die Anzahl der Koeffizienten auf 21 reduziert. Das Koeffizientenschema ist „symmetrisch".

Die Impulskomponenten g_1, g_2, g_3, i_1, i_2, i_3 wollen wir vorübergehend mit $g_1 \dots g_6$, ferner die Geschwindigkeitskomponenten u_1, u_2, u_3, ω_1, ω_2, ω_3 mit $u_1 \dots u_6$ bezeichnen. Wir schreiben dann allgemein

$$g_\iota = \sum_{k=1}^{6} \alpha_{\iota\varkappa} u_\varkappa. \tag{36}$$

Denken wir uns einen starren Körper mit den Impulskomponenten g_1, g_2, g_3, i_1, i_2, i_3, welche wir auf das körperfeste Koordinatensystem beziehen wollen, und wirken auf den Körper die Kräfte und Momente k_1, k_2, k_3, d_1, d_2, d_3, welche wir ebenfalls auf das System x_1, x_2, x_3 beziehen, so gelten nach Sätzen der Dynamik für die Bewegung folgende Gleichungen[1]):

$$\begin{cases} \mathfrak{k} = \dfrac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \mathfrak{g}), \\ \mathfrak{d} = \dfrac{\partial \mathfrak{i}}{\partial t} + (\mathfrak{u} \times \mathfrak{g}) + (\bar{\omega} \times \mathfrak{i}). \end{cases} \tag{37}$$

[1]) Vgl. III, § 1, (24), (21). Doch ist in letzterer Gleichung, da $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{i}$ auf einen willkürlichen Bezugspunkt bezogen sind, nach III, § 1, (13) $\mathfrak{d} + m(\dot{\mathfrak{x}} \times \dot{\mathfrak{s}})$ zu setzen, woraus wegen $m\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{g}$, $\dot{\mathfrak{s}} = \mathfrak{u}$ unsere zweite Gl. (37) folgt.

Diese Gleichungen ergeben, falls wir für die Komponenten $g_1, g_2 \dots i_3$ die Ausdrücke (36) einführen, ohne Schwierigkeit die Kräfte und Momente, welche auf den Körper außer den der eigenen Masse entsprechenden Trägheitskräften ausgeübt werden müssen, um eine bestimmte Bewegung hervorzurufen, oder aber die Kräfte und die Momente, die von der Flüssigkeit bei einer bestimmten Bewegung auf den Körper ausgeübt werden.

3. Kräfte, die auf einen Umdrehungskörper wirken. Der für die Praxis wichtigste Fall ist die Bewegung eines Umdrehungskörpers (z. B. eines Luftschiffkörpers) durch die Flüssigkeit.

Nimmt man zunächst an, daß die drei Ebenen x_1, x_2, x_3 Symmetrieebenen des Körpers sind, so müssen aus Symmetriegründen alle Koeffizienten α_{ik} verschwinden, die zwei verschiedene Indizes haben. Es bleiben daher folgende Ausdrücke für die Impulskomponenten übrig:

$$\text{(38)} \qquad \begin{cases} g_1 = \alpha_1 u_1, & i_1 = \alpha_4 \omega_1, \\ g_2 = \alpha_2 u_2, & i_2 = \alpha_5 \omega_2, \\ g_3 = \alpha_3 u_3, & i_3 = \alpha_6 \omega_3. \end{cases}$$

Bei der Rotationssymmetrie um die x_1-Achse muß außerdem offenbar $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_5 = \alpha_6$ gelten; ferner sieht man unmittelbar ein, daß $\alpha_4 = 0$ ist, da die Drehung um die Längsachse (bei reibungsloser Flüssigkeit) offenbar keinerlei Strömung hervorzurufen vermag. Setzen wir

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \beta, \quad \alpha_5 = \alpha_6 = \gamma,$$

so haben wir schließlich

$$\text{(39)} \qquad \begin{cases} g_1 = \alpha u_1, & i_1 = 0, \\ g_2 = \beta u_2, & i_2 = \gamma \omega_2, \\ g_3 = \beta u_3, & i_3 = \gamma \omega_3. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Ausdrücken für die Impulse infolge der eigenen Trägheit des starren Körpers, so kann man folgendes sagen: es erscheint sowohl die Masse des Körpers als das Trägheitsmoment um die Querachse vergrößert; die scheinbare Vergrößerung der Masse ist indessen verschieden nach den Achsenrichtungen im Körper: es gibt sozusagen eine longitudinale und eine transversale Massenvergrößerung.

Die Kraftkomponenten haben nach (37), (39) folgenden Betrag:

$$\text{(40)} \qquad \begin{cases} k_1 = \alpha \dfrac{du_1}{dt} + \beta(\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2), & d_1 = 0, \\ k_2 = \beta \dfrac{du_2}{dt} + \alpha \omega_3 u_1 - \beta \omega_1 u_3, & d_2 = \gamma \dfrac{d\omega_2}{dt} + (\alpha - \beta) u_3 u_1 - \gamma \omega_1 \omega_3, \\ k_3 = \beta \dfrac{du_3}{dt} + \beta \omega_1 u_2 - \alpha \omega_2 u_1, & d_3 = \gamma \dfrac{d\omega_3}{dt} + (\beta - \alpha) u_2 u_1 - \gamma \omega_1 \omega_2. \end{cases}$$

Wir wollen eine sogenannte stationäre Bewegung untersuchen, d. h. wir nehmen an, daß u_1, u_2, u_3, ω_1, ω_2, ω_3 konstant sind. Wir beschränken uns auf eine Bewegung parallel zur x_1, x_2-Ebene, setzen daher $u_3 = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Es verbleiben die Ausdrücke für die Kraftkomponenten:

$$(41) \qquad \begin{cases} k_1 = -\beta\omega_3 u_2, & d_1 = 0, \\ k_2 = \alpha\omega_3 u_1, & d_2 = 0, \\ k_3 = 0, & d_3 = (\beta - \alpha) u_1 u_2. \end{cases}$$

Nehmen wir z. B. an, daß ein Luftschiffkörper eine sogenannte stationäre Kurvenfahrt vollführt, so daß sein Schwerpunkt (den wir auf der x_1-Achse annehmen) eine Kurve beschreibt, und daß die Längsachse mit der Tangente dieser Bahn den konstanten Winkel ϑ einschließt. Alsdann ist (U = Fahrgeschwindigkeit)

$$(42) \qquad u_1 = U\cos\vartheta, \qquad u_2 = U\sin\vartheta.$$

Die Drehgeschwindigkeit ω_3 ist wegen Konstanz des Winkels offenbar $\omega_3 = \frac{U}{R}$ (R der Krümmungshalbmesser der Schwerpunktsbahn), so daß wir erhalten

$$(43) \quad k_1 = -\beta\frac{U^2}{R}\sin\vartheta, \quad k_2 = \alpha\frac{U^2}{R}\cos\vartheta, \quad d_3 = D = (\beta - \alpha) U^2 \sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Wir zerlegen die Kräfte k_1, k_2 in die tangentiale und normale Richtung:

$$(44) \qquad \begin{cases} T = k_1\cos\vartheta + k_2\sin\vartheta = (\alpha - \beta)\frac{U^2}{R}\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ N = -k_1\sin\vartheta + k_2\cos\vartheta = (\alpha\cos^2\vartheta + \beta\sin^2\vartheta)\frac{U^2}{R}, \\ D = (\beta - \alpha) U^2 \sin\vartheta\cos\vartheta. \end{cases}$$

Zunächst stellt man fest, daß eine scheinbare Vergrößerung der Zentrifugalkraft mU^2/R auftritt; die entsprechende scheinbare Masse hat den Betrag $(\alpha\cos^2\vartheta + \beta\sin^2\vartheta)$. Für kleine Winkel ist dies angenähert gleich der „longitudinalen" Masse der „mitgeschleppten" Flüssigkeitsmenge. Fernerhin erhält man ein Moment vom Betrage $U^2(\beta - \alpha)\sin\vartheta\cos\vartheta$. Für verlängerte Rotationskörper ist $\beta > \alpha$, so daß das Moment den Körper quer zur Bahn zu stellen bestrebt ist; es verschwindet für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die Symmetrieachse in der Bahntangente oder senkrecht dazu liegt.

Außerdem erhalten wir eine Kraft in der Richtung der Bahntangente. Dies ist folgendermaßen zu erklären: Das Kraftsystem k_1, k_2, D bzw. T, N, D liefert diejenigen Kräfte, welche man ausüben muß, um die Bewegung aufrechtzuerhalten. Übt man nun ständig

ein Moment in der Weise aus, daß der Winkel ϑ gegen die Wirkung des Momentes, welches den Körper quer zu stellen bestrebt ist, konstant gehalten wird, so leistet man, je nach dem Krümmungssinn der Bahn, entweder Arbeit, oder es wird Arbeit verzehrt. Da bei einer reibungslosen Flüssigkeit die Energie erhalten bleibt, würde durch die Arbeitszuführung bzw. Arbeitsentnahme der Körper beschleunigt bzw. gebremst werden. Dem wirkt die Kraft T entgegen.

4. Die Trägheitskonstanten des Rotationsellipsoids. Wir wollen als wichtigstes Beispiel die Trägheitskonstanten des in der unbegrenzten Flüssigkeit bewegten Rotationsellipsoids berechnen.

Hierzu müssen wir die drei Potentialfunktionen φ_1, φ_2, φ_5 ermitteln, die einer Translation des Ellipsoids in der Richtung der Längsachse, der Querachse und einer Drehung um die Querachse entspricht. Wir wollen uns dabei auf verlängerte Ellipsoide beschränken.

Wir führen durch folgende Beziehungen Ellipsoidkoordinaten ϑ, λ, ω ein, die mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch folgende Beziehungen zusammenhängen:

$$(45)\quad x_1 = k\cos\vartheta\,\mathrm{Cos}\,\lambda,\quad x_2 = k\sin\vartheta\,\mathrm{Sin}\,\lambda\cos\omega,\quad x_3 = k\sin\vartheta\,\mathrm{Sin}\,\lambda\sin\omega.$$

Der geometrische Ort der Punkte, für die ϑ = konst gilt, ist offenbar

$$(46)\qquad \left(\frac{x_1}{k\cos\vartheta}\right)^2 - \frac{x_2^2 + x_3^2}{(k\sin\vartheta)^2} = 1,$$

d. h. die Flächen ϑ = konst werden durch konfokale Rotationshyperboloide gebildet, deren Brennpunkte auf der x_1-Achse in dem Abstand $\pm k$ vom Nullpunkt liegen.

Die Flächen λ = konst sind Ellipsoide mit der Gleichung

$$(47)\qquad \left(\frac{x_1}{k\,\mathrm{Cos}\,\lambda}\right)^2 + \left(\frac{x_2^2 + x_3^2}{k\,\mathrm{Sin}\,\lambda}\right)^2 = 1,$$

d. h. konfokale Rotationsellipsoide mit denselben Brennpunkten.

Wir drücken die Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ in den neuen Koordinaten aus, wobei der Kürze halber $\cos\vartheta = \mu$, $\mathrm{Cos}\,\lambda = \xi$ gesetzt werden soll. Nach Gl. (39), 1. Bd., S. 24 erhalten wir

$$(48)\quad \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\xi^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right\} + \frac{\xi^2-\mu^2}{(1-\mu^2)(\xi^2-1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0.$$

Wir wollen nun die drei Aufgaben nacheinander lösen:

a) Bei der Translation parallel zur x_1-Achse ist die Potentialfunktion φ_1 unabhängig von ω, so daß die Gleichung sich zu

$$(49)\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(\xi^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right\} = 0$$

vereinfacht. Die Randbedingung für φ_1 lautet nach (30)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = n_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi}.$$

Nach den Ansätzen (45) ist $\frac{\partial x_1}{\partial \xi} = k\mu$, so daß wir der Bedingung $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = k\mu$ genügen müssen.

Wir versuchen es mit dem Ansatz

$$\varphi_1 = \mu Z(\xi) \tag{50}$$

und erhalten für die Funktion $Z(\xi)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\sqrt{\xi^2-1}\,\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right\} - 2Z(\xi) = 0$$

oder

$$(1-\xi^2)\frac{d^2Z}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dZ}{d\xi} + 2Z = 0, \tag{51}$$

d. h. die Gleichung der ersten Kugelfunktion [vgl. 1. Bd., S. 310, Gl. (16)]. Die Gleichung hat zwei unabhängige Integrale, nämlich $Z(\xi) = A\xi$ und $Z(\xi) = B\left[\frac{1}{2}\xi\log\frac{\xi+1}{\xi-1} - 1\right]$ (sogenannte Legendresche Funktion zweiter Art, vgl. 1. Bd., S. 321). Da φ_1 für $\xi = \infty$ mit seinen Ableitungen verschwinden muß, kommt für uns nur das zweite Integral in Betracht.

Ist das Ellipsoid durch $\xi = \xi_0$ gegeben, so muß für $\xi = \xi_0$ $\frac{dZ}{d\xi} = k$ betragen. Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{dZ}{d\xi} = B\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\xi+1}{\xi-1} + \frac{\xi}{\xi^2-1}\right\},$$

so daß wir schließlich für φ_1 erhalten

$$\varphi_1 = \frac{k}{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1}}\left\{\frac{1}{2}\xi\log\frac{\xi+1}{\xi-1} - 1\right\}\cdot\mu. \tag{52}$$

Um den Trägheitsfaktor zu ermitteln, haben wir das Oberflächenintegral $\varrho\int\varphi_1 n_1 do$ zu berechnen, d. h. das Integral

$$\varrho\,\frac{\frac{1}{2}\xi_0\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{1}{\xi_0}}{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1}}\int k\mu n_1 do.$$

Berücksichtigen wir, daß $k\mu\zeta = x_1$ ist und das Integral $\int x n_1 do$ das Volumen V des Ellipsoids ergibt, so erhalten wir schließlich nach (35)

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{1}{\xi_0}}{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1}} V\varrho. \tag{53}$$

Die scheinbare Masse des Ellipsoids ist daher gleich der Masse der verdrängten Flüssigkeitsmenge multipliziert mit dem Faktor

$$k_1 = \frac{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{1}{\xi_0}}{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1}}. \tag{54}$$

Die Halbachsen des Ellipsoids sind $a = k\xi$ und $b = c = k\sqrt{\xi^2-1}$, so daß wir auch schreiben können:

$$k_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - 1}{\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{a^2}{b^2}}. \tag{55}$$

b) Bewegt sich das Ellipsoid senkrecht zur Symmetrieachse, so lautet die Randbedingung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{\partial x_2}{\partial\xi} = k\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\cos\omega.$$

Setzen wir $\varphi_2 = Z(\xi)M(\mu)\cos\omega$, so kann man leicht nachweisen, daß die Funktionen $Z(\xi)$ bzw. $M(\mu)$ die den Legendreschen Funktionen zugeordneten Funktionen $Q_n^{(1)}(\xi)$ bzw. $P_n^{(1)}(\mu)$ sind (vgl. 1. Bd., S. 318). Dabei ist $Q_n^{(1)}(\xi)$ einer Legendreschen Funktion zweiter Art zugeordnet (vgl. 1. Bd., S. 321 f.).

Setzen wir $n = 1$, so ist

$$\varphi_2 = C\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\xi^2-1}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{\xi}{\xi^2-1}\right\}\cos\omega, \tag{56}$$

und man sieht, daß die Randbedingung erfüllt ist, wenn man setzt

$$C = \frac{k}{\frac{1}{2}\log\frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{\xi_0^2-2}{\xi_0(\xi_0^2-1)}}. \tag{57}$$

Für die Trägheitskonstante setzen wir $\beta = k_2\varrho V$, wobei k_2 eine von dem Achsenverhältnis abhängige reine Zahl ist.

c) Für den Fall der Rotation um die x_2-Achse lautet die Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi} = x_3 \frac{\partial x_1}{\partial \xi} - x_1 \frac{\partial x_3}{\partial \xi}.$$

Man kann sich überzeugen, daß man die Randbedingung erfüllen kann durch den Ansatz

$$\varphi_5 = C P_2^{(1)}(\mu) Q_2^{(1)}(\xi) \cos \omega. \tag{58}$$

Die Trägheitskonstante ergibt sich zu

$$\gamma = k_3 J, \tag{59}$$

wobei J das Trägheitsmoment der verdrängten Flüssigkeitsmenge und k_3 ein Zahlenfaktor ist.

Für langgezogene Ellipsoide geht α gegen Null, β gegen ϱV und γ gegen J. Die folgende Tabelle zeigt die Werte für k_1, k_2, k_3 in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k_3
1	0,5	0,5	0
2	0,209	0,702	0,240
4	0,082	0,860	0,608
6	0,045	0,918	0,764
8	0,029	0,945	0,840
10	0,021	0,960	0,883
∞	0,000	1,000	1,000

Die Trägheitskonstanten einer Kugel können wir ermitteln, wenn wir sie als Grenzfall des Rotationsellipsoids betrachten. Wir wollen indessen die scheinbare Masse auf einem direkten Wege berechnen.

Die Potentialfunktion φ lautet im Falle einer Kugel (r und ϑ Polarkoordinaten)

$$\varphi = -A \frac{\cos \vartheta}{r^2}.$$

Die Randbedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = n_1 = \cos \vartheta$ liefert

$$A = \frac{1}{2} r_0^3,$$

d. h.

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^2} \cos \vartheta. \tag{60}$$

Das Integral

$$\alpha = \varrho \int \varphi n_1 do$$

ergibt (für $r = r_0$)

$$\alpha = \tfrac{1}{2} r_0 \varrho \int_0^{\pi} 2\pi r_0^2 \sin\vartheta d\vartheta \cos^2\vartheta = \tfrac{2}{3} r_0^3 \pi \varrho. \tag{61}$$

Die scheinbare Masse der Kugel ist gleich der halben Masse der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Für den Fall der durch die Flüssigkeit senkrecht zu ihrer Ebene bewegten Platte erhalten wir (r = Halbmesser der Platte)

$$\alpha = \tfrac{8}{3} r^3 \varrho, \tag{62}$$

d. h. den $4/\pi$fachen Wert der Trägheitskonstante der Kugel gleichen Halbmessers.

Lehrbücher.

G. Kirchhoff, Mechanik. Leipzig 1876.
H. Lamb, Hydrodynamics. 5. Ed. Cambridge 1924. Deutsche Übersetzung der 3. Aufl., besorgt von J. Friedel. Leipzig 1907.
W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900.
M. Lagally, Ideale Flüssigkeiten (im Handbuch der Physik von Geiger und Scheel, Bd. VII). Berlin 1927.
Th. v. Kármán und T. Levi Civitá, Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (gehalten in Innsbruck 1922). Berlin 1924.
R. Fuchs und L. Hopf, Aerodynamik. Berlin 1922.
U. Cisotti, Idromeccanica piana. Milano, I, 1921; II, 1922.
W. H. Besant and A. S. Ramsey, A Treatise on Hydromechanics. London I, 1919; II, 1920.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Flüssigkeitsbewegung mit Reibung.

§ 1. Aufstellung der Grundgleichungen.

Im vorigen Kapitel wurde die Theorie der reibungsfreien Flüssigkeiten behandelt. Diese Theorie hat den Vorteil, von mathematischem Gesichtspunkt besonders einfach zu sein. Andererseits geben aber alle wirklichen Flüssigkeiten je nach dem Bewegungszustand mehr oder weniger deutlich die Wirkung einer inneren Reibung zu erkennen. Nur bei den Gleichgewichtsproblemen (S. 734) verschwindet der Einfluß der inneren Reibung vollständig (vgl. die einleitenden Worte des XX. Kap.).

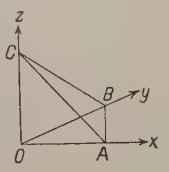
Während auf einen geradlinig gleichförmig, durch eine ideale Flüssigkeit bewegten Körper von dieser keine Kräfte ausgeübt werden,

verursacht auch die kleinste Reibung hinter einem schnell bewegten Körper Wirbel und damit sowohl den Widerstand wie den Auftrieb (im räumlichen, d. h. dreidimensionalen Falle vgl. S. 798). Damit ist die wichtigste Aufgabe der Theorie der Reibung angedeutet. Wegen der großen mathematischen Schwierigkeiten ist diese Aufgabe bisher nur in erster Annäherung gelöst.

1. Ein Satz über die Spannungen. Eine ausführlichere Analyse der Spannungen ist in XVII, § 2 enthalten. Daher können wir uns hier mit einigen ergänzenden Bemerkungen begnügen.

Um die Spannungen in einem Punkte O der Flüssigkeit zu untersuchen, denken wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem $(x\,y\,z)$ mit dem Ursprung in dem fraglichen Punkte. A ist ein Punkt auf der x-Achse, B auf der y-Achse und C auf der z-Achse. Die Strecken OA, OB, OC sollen sehr klein sein.

Fig. 85.



Wir betrachten (Fig. 85) die Flüssigkeitsmenge, die in einem gewissen Augenblick innerhalb des Tetraeders $OABC$ liegt. Es wird angenommen, daß die Wirkung der umgebenden Flüssigkeit durch Oberflächenkräfte ersetzt werden kann. Durch das Oberflächenelement ABC wirkt z. B. die umgebende Flüssigkeit auf unsere Flüssigkeitsmenge mit der Kraft $\mathfrak{t}^{(\nu)}\,dF$, wobei dF den Flächeninhalt von ABC bedeutet. ν ist die Richtung der äußeren Normalen des fraglichen Flächenelementes. Die Spannung $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ ist also gleich der Kraft pro Flächeneinheit.

Durch die yz-Ebene wirkt die Flüssigkeit der rechten Seite, wo x positiv ist, auf die der linken Seite mit einer Spannung, die $\mathfrak{t}^{(x)}$ genannt werden soll. Nach dem Newtonschen Prinzip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung wirkt durch OBC die Flüssigkeit links auf diejenige rechts mit der Kraft $-\mathfrak{t}^{(x)} \cdot \triangle OBC = -\mathfrak{t}^{(x)}\,dF\cos(\nu\,x)$.

In welcher Weise hängt $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ von der Normalenrichtung ν ab? Um diese Frage beantworten zu können, stellen wir die Bewegungsgleichung unserer kleinen Flüssigkeitsmenge auf. Wenn ihre Masse gleich dm und die Beschleunigung des Schwerpunktes $\mathfrak{v}$ ist, so ist $\mathfrak{v}\,dm$ gleich der Resultierenden der Kräfte. Diese sind teils Massenkräfte (z. B. die Schwerkraft), die mit $\mathfrak{R}\,dm$ bezeichnet werden können, teils die oben erwähnten Oberflächenkräfte. Die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes ist also:

$$\mathfrak{v}\,dm = \mathfrak{R}\,dm + \mathfrak{t}^{(\nu)}\,dF - \mathfrak{t}^{(x)}\,dF\cos(\nu\,x) - \mathfrak{t}^{(y)}\,dF\cos(\nu\,y) - \mathfrak{t}^{(z)}\,dF\cos(\nu\,z).$$

Nun ist ein Flächenelement, wie dF, klein von zweiter Ordnung (also z. B. wie $dx\,.\,dy$) und ein Massenelement wie dm klein von dritter

Ordnung (also wie $dx.dy.dz$), wenn wir die Kantenlängen des betrachteten Tetraeders als klein von erster Ordnung ansehen. Wir dividieren durch dF und beachten, daß bei immer weiter gehender Verkleinerung des Tetraeders der Quotient dm/dF sich der Null nähert. So erhalten wir die Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{t}^{(\nu)} = \mathfrak{t}^{(x)} \cos(\nu\, x) + \mathfrak{t}^{(y)} \cos(\nu\, y) + \mathfrak{t}^{(z)} \cos(\nu\, z).$$

Diese ist mit der entsprechenden Gleichung der Elastizitätstheorie identisch [S. 601, (1)]. Dort wurde ein ruhender elastischer Körper untersucht, hier eine Flüssigkeit in beschleunigter Bewegung. In der obigen Analyse des Spannungstensors fiel aber die Wirkung der Beschleunigung heraus.

Auch bei dem Beweise der Symmetrie des Spannungstensors (S. 602 f.) fallen die Massenkräfte aus denselben Gründen heraus. Deshalb bleibt die ganze Untersuchung des Spannungstensors in XVII, § 2 (S. 600 bis 606) auch für reibende Flüssigkeiten unverändert gültig.

Für eine ruhende Flüssigkeit läßt sich die obige Gleichung vereinfachen. Senkrecht auf die Fläche ABC wirkt dann nur der hydrostatische Druck p. Weil dieser die entgegengesetzte Richtung des Einheitsvektors $\bar{\nu}$ in der Normalenrichtung hat, ist die Druckkraft gleich $-p\bar{\nu}\,dF$. Da also $\mathfrak{t}^{(\nu)}dF = -p\bar{\nu}dF$ ist, so kann man die Gl. (1) durch die folgende einfachere Gleichung ersetzen:

$$(2) \qquad \mathfrak{t}^{(\nu)} = -p\bar{\nu}.$$

2. Das Gesetz von Poiseuille. Die innere Reibung einer Flüssigkeit äußert sich in einem Widerstand gegen Formänderungen, und zwar hängt der Widerstand von der Geschwindigkeit ab, mit welcher die Formänderungen vor sich gehen. Es tritt keine Kraft auf, welche die ursprüngliche Form des Flüssigkeitselementes wiederherzustellen strebt, wie es bei den elastischen Körpern der Fall ist.

Um dies in Formeln ausdrücken zu können, betrachten wir zunächst einen einfachen und experimentell wohlbekannten Fall, nämlich die Strömung durch ein enges Rohr. Von den speziellen Verhältnissen in der Nähe der Enden sehen wir ab.

Die Geschwindigkeit der strömenden Flüssigkeit ist überall der Rohrachse parallel. Alle Teilchen mit gleichem Abstand von der Rohrachse haben gleich große Geschwindigkeit u. Man kann sich die Flüssigkeit durch koaxiale Zylinderflächen in dünne Lamellen (laminæ) geteilt denken, innerhalb deren die Geschwindigkeit überall dieselbe ist. Deshalb werden diese und ähnliche Bewegungen „laminar“ genannt.

Wie groß ist die mitführende Kraft, die jede Lamelle auf die angrenzende ausübt? Newton nahm an, daß diese proportional der

Oberfläche und dem Geschwindigkeitsgradienten sei. Auf die Lamelle mit dem Halbmesser r übt also die nach innen angrenzende Lamelle folgende Kraft aus:

$$K = \mu . 2\pi r l \left(-\frac{du}{dr}\right).$$

l ist die Länge desjenigen mittleren Teiles des Rohres, für den wir uns gerade interessieren. Das Minuszeichen rührt daher, daß du/dr selbst negativ ist.

μ ist der Koeffizient der inneren Reibung. Von diesem nahm Newton an, daß er vom Druck unabhängig sei.

Unsere Lamelle, deren Dicke Δr sei, übt ihrerseits auf die nach außen angrenzende Lamelle die Kraft

$$K_{r+\Delta r} = \left[\mu . 2\pi r l \left(-\frac{du}{dr}\right)\right]_{r+\Delta r}$$

aus. Da die Beschleunigung gleich Null ist, halten diese Kräfte dem Druckunterschied $p_l - p_0$ zwischen den Grundflächen das Gleichgewicht. In Formel:

$$(p_l - p_0) . 2\pi r \Delta r = \mu . 2\pi l \left[\left(-r\frac{du}{dr}\right)_{r+\Delta r} + \left(r\frac{du}{dr}\right)_r\right].$$

Nach Division durch Δr und Grenzübergang $\Delta r \to 0$ nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$(p_l - p_0) 2\pi r = -2\pi\mu l \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right).$$

Diese Gleichung läßt sich sogleich integrieren:

$$(p_l - p_0) . \pi r^2 = -2\pi\mu l r \frac{du}{dr},$$

$$u = \frac{p_l - p_0}{4\mu l}(a^2 - r^2).$$

Dabei ist die Integrationskonstante so gewählt, daß u an der Rohrwand ($r = a$) gleich Null wird. In den meisten Fällen haftet nämlich die Flüssigkeit an den Wänden. Sie gleitet nicht, auch wenn die Flüssigkeit die Wand nicht benetzen sollte.

Die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch das Rohr fließt, ist

$$\int_0^a u . 2\pi r\, dr = \frac{\pi a^4}{8\mu l}(p_l - p_0).$$

Das ist das Gesetz von Poiseuille. Es ist in zahlreichen Versuchen geprüft und bestätigt worden. Es bleibt auch bei hohen Geschwindigkeiten gültig, wenn nur die Strömung laminar bleibt.

Die oben erwähnte Annahme von Newton ist also experimentell bestätigt. Sie ist aber nur in den einfachsten Fällen anwendbar. Um eine Verallgemeinerung zu erleichtern, geben wir der Annahme die folgende Form: Wenn wir senkrecht auf die (der x-Achse parallelen) Lamellen in der Richtung der steigenden Geschwindigkeit eine z-Achse legen, so ist die mitführende (den Lamellen parallele) Kraft pro Flächeneinheit gleich

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{3}$$

3. Die Bezeichnungen. Im folgenden werden die Koordinaten x_1, x_2, x_3 statt x, y, z genannt, weil dadurch Abkürzungen erzielt werden können. Die Komponenten der Geschwindigkeit werden demgemäß u_1, u_2, u_3 genannt. Die Kontinuitätsgleichung [S. 750, Gl. (2)] wird also

$$\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{statt} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

geschrieben. Kommen in demselben Gliede zwei verschiedene Indizes vor, so stellt es eine Komponente eines Tensors dar. Die Komponenten eines Tensors können also in der Form p_{ij} geschrieben werden. Die Matrix sieht so aus [vgl. 1. Bd., S. 77, (4)]:

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}. \end{matrix}$$

Die Komponenten des Einheitstensors (1. Bd., S. 82) werden δ_{ij} genannt. δ_{ij} ist also gleich Null, wenn $i \neq j$, und gleich 1, wenn $i = j$ ist.

4. Die Beziehungen zwischen den Spannungen und der Deformationsgeschwindigkeit. Durch einen beliebigen Punkt im Innern der Flüssigkeit werde ein Flächenelement dF mit der Normalen $\bar{\nu}$ gelegt. Die Gl. (1), welche die Kraft $\mathfrak{t}^{(\nu)} dF$ festlegt, welche auf dF wirkt, hat dieselbe Form wie (1) auf S. 77 im ersten Bande, mit Hilfe deren der Tensorbegriff erklärt wurde. Die Vektoren $\mathfrak{t}^{(x)}$, $\mathfrak{t}^{(y)}$, $\mathfrak{t}^{(z)}$ legen deshalb einen Tensor fest, den Spannungstensor, dessen Komponenten wir mit τ_{ij} bezeichnen. Werden ferner die Komponenten $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ von $\bar{\nu}$ mit n_1, n_2, n_3 bezeichnet, so erscheint (1) in der Gestalt

$$\tau_{nj} = \sum_i \tau_{ij} n_i \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{1a}$$

wobei τ_{nj} die j-Komponente des Vektors $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ bedeutet. Die τ_{ij} variieren im allgemeinen von Punkt zu Punkt und sind auch von der Zeit abhängig.

Der Tensor (def $\mathfrak{v}$) der Deformationsgeschwindigkeiten hat nach S. 751 die Matrix (vgl. 1. Bd., S. 86):

$$\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), & \frac{\partial w}{\partial z}. \end{matrix}$$

In unserer abgekürzten Schreibweise sind die Komponenten des Deformationstensors $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$.

Wie der Spannungstensor von dem Druck und der Deformationsgeschwindigkeit abhängt, haben wir in speziellen Fällen gesehen [Gl. (2) und (3)]. Wir suchen nun ein allgemeines physikalisches Gesetz, welches diese Spezialfälle enthält. Dieses Gesetz kann nicht von der Lage des Koordinatensystems abhängen, denn die Lage des Koordinatensystems hat keinen physikalischen Sinn. Das Koordinatensystem ist nur zur Erleichterung der mathematischen Rechnungen eingeführt. Da die Tensoren unabhängig vom Koordinatensystem eine physikalische Bedeutung haben (1. Bd., S. 77), so muß das gesuchte Gesetz die Form einer Gleichung zwischen Tensoren haben. Der einfachste Ansatz, den wir machen können, ist folgender:

$$(4) \qquad \tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Denn nach S. 78 im ersten Bande besagt diese Gleichung, daß eine gleichlautende Beziehung zwischen den Tensoren selbst besteht: $T = -pE + 2\mu\,\mathrm{def}\,\mathfrak{v}$. Das Umgekehrte gilt auch. Daraus folgt, daß die Gleichung (4) ihre Form beibehält, wenn wir die Tensoren in bezug auf ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem in Komponenten auflösen. Beiläufig sei bemerkt, daß man dies auch mittels der Formeln (6) S. 604 und (15) S. 609 hätte beweisen können, denn die Gl. (15) gelten auch für eine Flüssigkeit, wenn u, v, w als die Komponenten einer Geschwindigkeit statt als die einer Verschiebung aufgefaßt werden.

Daß die Gl. (3) als Spezialfall in (4) enthalten ist, folgt, wenn man das Koordinatensystem so legt, daß alle Ableitungen $\partial u/\partial x$ usw. gleich Null sind, außer $\partial u/\partial z$. Wir werden jetzt sehen, daß (4) die Gl. (2) als Spezialfall enthält. Mit Indizesbezeichnungen geschrieben lautet die Gl. (2) so: $\tau_{nj} = -pn_j$, oder nach (1a) und der Erklärung des Einheitstensors δ_{ij} so: $\sum_i \tau_{ij} n_i = -\sum_i p\,\delta_{ij} n_i$. Im statischen Falle ist der Deformationstensor gleich Null. Dann fällt das

letzte Glied in (4) weg. Deshalb enthält (4) als Spezialfall die Gleichung $\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}$, gültig für eine ruhende oder gleichförmig rotierende Flüssigkeit. Diese stimmt aber mit der eben angeführten Gleichung überein.

Bemerkung. Als eine Verallgemeinerung von (2) und (3) erhielten wir die Gl. (4). Mit Hilfe der im 1. Bd., S. 85 angeführten Invarianten könnte man (2) und (3) auch in anderer Weise verallgemeinern, so daß man statt (4) andere Gleichungen erhielte, welche allen unseren bisher aufgestellten Anforderungen Genüge leisteten. Zunächst scheint aber (4) die einzige Verallgemeinerung zu sein, welche die Rechnungen nicht allzu kompliziert macht. Soviel wir wissen, erhält man aus (4) eine genügende Erklärung der bis jetzt ausgeführten Messungen (verschiedene Versuche mit Kugeln in langsamer Bewegung usw.).

5. Die vollständigen Differentialgleichungen. Der S. 757 ff. aufgestellte Impulssatz soll mit kleinen Änderungen nochmals abgeleitet werden.

In einer strömenden Flüssigkeit betrachten wir ein beliebiges Raumgebiet V. Der Impuls der in V enthaltenen Flüssigkeitsmenge hat die Komponenten J_1, J_2, J_3. Wir berechnen den Zuwachs ΔJ_j während der kleinen Zeit von t bis $t + \Delta t$. Der Impuls verändert sich erstens, weil Kräfte auf unsere Flüssigkeitsmenge wirken. Diese sind teils Volumenkräfte, wie z. B. die Schwerkraft, deren resultierende j-Komponente gleich $\iiint X_j\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ ist, teils nehmen wir an, daß die Wirkung der umgebenden Flüssigkeit (oder festen Wände) durch die oben erwähnten Spannungen ersetzt werden kann. Die an der Oberfläche F von V angreifenden Spannungen haben eine Resultierende, deren j-Komponente gleich $\iint \sum_i \tau_{ij} n_i\,dF$ ist [vgl. (1 a)]. n_i sind die Richtungskosinusse des äußeren Normales auf die Fläche.

Zweitens transportiert die Flüssigkeit bei ihrer Strömung Impuls durch die Grenzfläche. Durch das Flächenelement dF strömt das Flüssigkeitsvolumen $\sum_i u_i n_i . dF . \Delta t$ aus, denn $\sum_i u_i n_i$ ist die Geschwindigkeitskomponente in der Normalenrichtung. Dieses Flüssigkeitsvolumen führt aus V hinaus einen Impuls mit der j-Komponente $\sum_i \varrho\, u_j . u_i n_i . dF . \Delta t$, wenn ϱ die Massendichte der Flüssigkeit bedeutet.

Für die gesamte Änderung der j-Komponente des Impulses pro Zeiteinheit erhalten wir nach dem oben Gesagten den Ausdruck

$$\lim \frac{\Delta J_j}{\Delta t} = \iiint X_j\,dV + \iint \sum_i \tau_{ij} n_i\,dF - \iint \sum_i u_j \varrho\, u_i n_i\,dF.$$

Andererseits hat der Impuls der Flüssigkeitsmenge, die sich in V befindet, die j-Komponente $J_j = \iiint \varrho\, u_j\, dV$. Dieser Ausdruck soll in die obige Gleichung eingesetzt werden. Gleichzeitig formen wir die beiden Oberflächenintegrale mittels der Gl. (27) des 1. Bd., S. 23 um, wobei $n_1 = -\cos\alpha$, $n_2 = -\cos\beta$, $n_3 = -\cos\gamma$ zu setzen ist. Wir erhalten

$$\iiint \left[\frac{\partial(\varrho\, u_j)}{\partial t} - X_j - \sum_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial(u_j \varrho\, u_i)}{\partial x_i}\right] dV = 0.$$

Diese Gleichung besteht, wie immer auch das Integrationsgebiet gewählt werden mag. Deshalb muß der Integrand selbst gleich Null sein:

$$\frac{\partial(\varrho\, u_j)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial(\varrho\, u_j u_i)}{\partial x_i} = X_j + \sum_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Wir nehmen nun an, daß die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist. Dann ist die Dichte ϱ eine Konstante. Ferner gilt nach S. 814 die Kontinuitätsgleichung $\sum_i \partial u_i/\partial x_i = 0$. Mit Hilfe von (4) erhält man nun

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} &= -\sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i}\delta_{ij} + \mu \sum_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \mu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j,\end{aligned}$$

wobei Δ die Bedeutung $\sum_i \partial^2/\partial x_i^2 \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ hat.

Ferner ist

$$\sum_i \frac{\partial(\varrho\, u_j u_i)}{\partial x_i} = \varrho\, u_j \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_i \varrho\, u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_i \varrho\, u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Durch Einsetzung in (5) und Hinzufügung der Kontinuitätsgleichung erhalten wir

die vollständigen Bewegungsgleichungen einer reibenden unzusammendrückbaren Flüssigkeit:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_i \varrho\, u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j + X_j \quad (j = 1, 2, 3); \tag{6}$$

$$\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{7}$$

Diese enthalten die Gleichungen für ideale Flüssigkeiten S. 756 (12′) als Spezialfälle ($\mu = 0$), wie man durch Übertragung in die alte Schreibweise findet.

6. Die Spannungskomponenten an der Oberfläche eines ruhenden Körpers. Nach (1 a) und (4) sind die Komponenten des auf ein Flächenelement mit der Normalen n_i wirkenden Spannungsvektors gleich

$$\tau_{nj} = -\sum_i p\,\delta_{ij}\,n_i + \mu \sum_i n_i\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Wenn t_1 und t_2 zwei zueinander senkrechte Tangenten in einem Punkte der Oberfläche sind und n die Normale ist, so können t_1, t_2, n als ein rechtwinkliges Achsenkreuz angewandt werden. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \cos(t_1 x_j)\frac{\partial}{\partial t_1} + \cos(t_2 x_j)\frac{\partial}{\partial t_2} + \cos(n x_j)\frac{\partial}{\partial n}.$$

Nach einer Bemerkung unter 2 gleitet die Flüssigkeit nicht an der Oberfläche des starren Körpers. Daher sind die u_i dort gleich Null. Daraus folgt aber $\partial u_i/\partial t_1 = \partial u_i/\partial t_2 = 0$ und also aus der obigen Gleichung $\partial/\partial x_j = n_j\,\partial/\partial n$, wobei $\cos(n x_j)$ wie gewöhnlich durch n_j ersetzt wurde. Durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung findet man also

$$\sum_i n_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_i \left(n_i \frac{\partial}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u_i$$

$$= \sum_i \left(n_i n_j \frac{\partial}{\partial n} - n_j n_i \frac{\partial}{\partial n}\right) u_i = 0.$$

Weiter findet man $\sum_i n_i\,\partial u_j/\partial x_i = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\,\partial u_j/\partial n = \partial u_j/\partial n$. Also gilt an der Oberfläche eines ruhenden festen Körpers[1]):

$$(8)\quad \tau_{nj} = -p n_j + \mu \frac{\partial u_j}{\partial n} \quad \text{oder} \quad \tau_{nj} = -p n_j + \mu \sum_i n_i\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

Bemerkung 1. Diese Ausdrücke bleiben natürlich auch dann gültig, wenn der Körper eine konstante Translationsbewegung hat; denn dieser Fall ist mit dem Fall eines ruhenden Körpers in einem Flüssigkeitsstrom identisch.

Bemerkung 2. Alle unsere Rechnungen beziehen sich auf isotrope Flüssigkeiten. Ist Isotropie nicht vorhanden, d. h. ist die Reibung in verschiedenen Richtungen verschieden, so gilt (8) auch nicht. Eine wichtige Ausnahme bilden in vielen Fällen die Schmiermittel. Die meistens langgestreckten Moleküle ordnen sich in Schichten an, wie die Röntgenanalyse zeigt[2]). Diese Schichten gleiten übereinander etwa wie Spielkarten. Für solche Phänomene ist natürlich unsere mathematische Analyse ungültig.

---

[1]) Faxén, Ark. f. mat., astr. o. fys. 20 A, Nr. 8, 1927.

[2]) Trillat, Compt. rend. 1926, S. 843; vgl. ferner Stanton, Friction. London 1923.

7. Die linearisierten Differentialgleichungen. Wenn

$$q = p + \frac{\varrho}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2), \qquad Y_j = X_j + \varrho \sum_i u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} u_j\right)$$

gesetzt wird, so erscheinen die Gl. (6) in der Form

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j + Y_j \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Diese Gleichungen sind an sich nicht einfacher als (6). Nun sind diese Differentialgleichungen so gebaut, daß sie nur in gewissen Spezialfällen vollständig integriert werden können (§ 4). Daher hat man versucht, durch verschiedene Vereinfachungen integrable Differentialgleichungen zu erhalten, aus denen man eine Lösung erhalten könnte, welche die wirklichen Verhältnisse angenähert darstellt. Eine solche Vereinfachung war die Streichung der μ enthaltenden Glieder. Diese führt auf die im vorigen Kapitel enthaltene Theorie der idealen Flüssigkeiten.

Eine andere Vereinfachung besteht darin, die quadratischen Glieder zu streichen, so daß die Differentialgleichungen linear werden. Man braucht aber nicht alle quadratischen Glieder zu streichen. Wenn man z. B. den Einfluß der Wirbelkomponenten $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ vernachlässigt, so kann man X_j statt Y_j in den Gl. (9) schreiben. Man erhält dann das System

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j + X_j, \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{10}$$

Bei der gleichförmigen Translationsbewegung eines Körpers kann man ein bewegtes Koordinatensystem y_1, y_2, y_3 verwenden, dessen y_1-Achse der Translationsgeschwindigkeit parallel ist. Wenn die ruhende x_1-Achse auch dieselbe Richtung hat, so gilt $y_1 = x_1 - Ut$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, wobei U die Translationsgeschwindigkeit ist. Ferner gilt

$$\frac{\partial u_j(y_1 + Ut, y_2, y_3, t)}{\partial t} = U \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + \frac{\partial u_j(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t}.$$

Setzt man dies in (10) ein, so erhält man für die u_j, q als Funktionen von t, y_1, y_2, y_3 das linearisierte Gleichungssystem [1]):

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} - \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial y_1} = -\frac{\partial q}{\partial y_j} + \mu \Delta u_j + X_j, \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial y_i} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{11}$$

In diesen Gleichungen sind diejenigen Glieder beibehalten, welche bei langsamer Bewegung die wichtigsten sind, und die übrigen gestrichen. Aber auch für das Studium der schnellen Bewegungen haben diese

[1]) C. W. Oseen, Ark. f. mat., astr. o. fys., Bd. 6, Nr. 29, 1910.

Gleichungen eine grundlegende Bedeutung (s. ferner § 6). u_j sind die Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf das ruhende System. In bezug auf das bewegte System sind sie gleich $u_1 - U$, u_2, u_3.

§ 2. Fundamentalintegrale der linearisierten Differentialgleichungen.

Was ein Fundamentalintegral ist, wurde im 1. Bd., S. 650 ff. erklärt. Hier wird das Wort in einem verallgemeinerten Sinne benutzt, denn wir haben es hier nicht nur mit einer partiellen Differentialgleichung zu tun, sondern mit einem System von vier solchen. Die allgemeine Methode, ein Fundamentalintegral aufzusuchen (1. Bd., S. 652 ff.), eignet sich bei diesen Differentialgleichungen sehr gut. Der Kürze wegen ziehen wir es jedoch hier vor, die Fundamentalintegrale mittels spezieller Kunstgriffe zu finden.

1. Die linearisierten Gleichungen in Stokes' Form. Wenn die Begrenzungsflächen der Flüssigkeit ruhend sind, so ist ein ruhendes Koordinatensystem das natürlichste. Dann haben die linearisierten Differentialgleichungen die Form (10) in § 1, 7. Wenn u_1, u_2, u_3 von der Zeit unabhängig sind, nennt man die Bewegung stationär (vgl. S. 750). Dann sind die zeitlichen Ableitungen in (10) gleich Null. Ferner vernachlässigen wir $\varrho(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ gegen p. Diese Vernachlässigung hat nur den Zweck, die linearisierten Gleichungen auf die geläufige Form zu bringen, worin p statt q vorkommt. Die Differentialgleichungen werden aber dadurch nicht einfacher. Auf diese Weise erhalten wir die Stokesschen Gleichungen für die langsame stationäre Bewegung einer Flüssigkeit:

$$(1) \qquad \frac{\partial p}{\partial x_j} - \mu \Delta u_j = X_j, \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \cdot \quad (j = 1, 2, 3).$$

Um die Rechnungen nicht unnötig zu komplizieren, nehmen wir an, daß die X_j nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden und daß sie überall eindeutig differenzierbar sind. X_j ist das Analogon der Funktion $\varphi(x, y, z)$ im 1. Bd., S. 651, Gl. (22). Nun soll das Analogon zu der dortigen Gl. (21) aufgesucht werden.

Differenziert man die erste der Gl. (1) in bezug auf x_j und summiert in bezug auf j, so erhält man

$$\Delta p - \mu \Delta \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \Delta p = \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial x_j}.$$

Nach der Poissonschen Formel [1. Bd., S. 476, (15), S. 470, (3)] ist dasjenige Integral dieser Gleichung, welches in unendlicher Ferne verschwindet, gleich

$$(2) \qquad p(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial \xi_j} \cdot \frac{1}{r} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3.$$

Dabei ist $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$. Der Integrationsbereich ist beliebig. Doch wird unten bei der partiellen Integration die Annahme gemacht, daß die X_i an den Grenzen des Integrationsgebietes gleich Null sind. Diese Annahme hat aber keine wesentliche Bedeutung. Die Gl. (1) erhalten nun die folgende Form:

$$\Delta u_j = -\frac{1}{\mu} X_j - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x_j} \iiint \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \cdot \frac{1}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Da $\Delta r = 2/r$ ist, erhält man nach einer neuen Anwendung der Poissonschen Formel:

$$u_j(x_1, x_2, x_3) = \iiint \frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{2X_j}{r} - \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Durch drei partielle Integrationen (1. Bd., S. 13) erhält man das Analogon zu 1. Bd., S. 651, Gl. (21):

$$(3) \quad \begin{cases} u_j(x_1, x_2, x_3) = \iiint \sum_i t_{ji}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \\ p(x_1, x_2, x_3) = \iiint \sum_i p_i(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{cases}$$

Dabei ist

$$(4) \qquad t_{ji} = \frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{2\delta_{ji}}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} \right], \quad p_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r}.$$

Gl. (3) stellt innerhalb des Integrationsgebiets eine der unendlich vielen Lösungen der Gl. (1) dar. Die übrigen erhält man, wenn man zu (3) beliebige Lösungen der den Gl. (1) entsprechenden homogenen Gleichungen hinzuaddiert, d. h. Lösungen von

$$(5) \qquad \frac{\partial p}{\partial x_j} - \mu \Delta u_j = 0, \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Die Gl. (3) und (4) sind von H. A. Lorentz gefunden (Abhandlungen, S. 32, Teubner 1907).

2. Die linearisierten Gleichungen für den Fall, daß das Koordinatensystem eine konstante Translationsgeschwindigkeit hat. Wenn die zeitlichen Ableitungen in § 1, (11) gleich Null sind, nennt man die Bewegung stationär in bezug auf das bewegte Koordinatensystem. Vernachlässigt man ferner den Unterschied zwischen q und p, erhält man die Gleichungen

$$(6) \qquad -\varrho U \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + \frac{\partial p}{\partial y_j} - \mu \Delta u_j = X_j, \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial y_i} = 0.$$

Auf dieselbe Weise wie oben erhält man für p den Ausdruck (2). Nach der Poissonschen Formel gilt

$$X_j = -\frac{1}{4\pi} \Delta \iiint X_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{1}{r} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3, \tag{7}$$

wobei $r^2 = (y_1 - \xi_1)^2 + (y_2 - \xi_2)^2 + (y_3 - \xi_3)^2$ ist. Trägt man beides in (6) ein, so wird man vor die Aufgabe gestellt, die Gleichungen

$$-2\sigma \frac{\partial u_j}{\partial y_1} - \Delta u_j = \frac{-\Delta}{4\pi\mu} \iiint \frac{X_j}{r} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3$$
$$+ \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y_j} \iiint \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \frac{1}{r} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

zu integrieren. Dabei wurde $\varrho U / 2\mu = \sigma$ gesetzt. Die einzige Funktion von y_1, y_2, y_3, welche auf der rechten Seite vorkommt, ist $1/r$. Wenn man eine passende Lösung der Gleichung $2\sigma \partial \Phi / \partial y_1 + \Delta \Phi = 2/r$ findet, so erkennt man durch Differentiation, daß

$$\left\{ \begin{aligned} u_j &= \frac{\Delta}{8\pi\mu} \iiint X_j \Phi \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \\ &\quad - \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y_j} \iiint \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \Phi \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \end{aligned} \right. \tag{8}$$

eine Lösung der oben stehenden Gleichung darstellt. Dabei wird vorausgesetzt, daß Φ so gewählt worden ist, daß die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauscht werden kann. Wir versuchen die Funktion Φ so zu bestimmen, daß sie nur von $\zeta = |\sigma| r + \sigma(y_1 - \xi_1)$ abhängt. Da

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y_1} = \frac{|\sigma|}{\sigma} \frac{\xi}{r}, \quad \sum_j \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y_j} \right)^2 = \frac{2|\sigma|\zeta}{r}, \quad \Delta \zeta = \frac{2|\sigma|}{r}$$

ist, so findet man für Φ die Gleichung

$$\zeta \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} + (1 + \zeta) \frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{1}{|\sigma|}.$$

Diese Gleichung läßt sich auch in der Form

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta e^{\zeta} \frac{d\Phi}{d\zeta} \right) = \frac{e^{\zeta}}{|\sigma|}$$

schreiben. Sie gibt integriert

$$\Phi = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1 + c e^{-\alpha}}{\alpha} \, d\alpha,$$

wobei c und ζ_0 Integrationskonstanten sind. Wie man durch Nachprüfung findet, wird die oben erwähnte Vertauschung von Differentiation und Integration ermöglicht, wenn man $c = -1$ setzt. Der Wert von ζ_0 ist belanglos. Wir wählen den einfachen Wert $\zeta_0 = 0$.

In dem letzten Integral in (8) nehmen wir eine partielle Integration vor. Nach Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration nimmt alsdann (8) die Form (3) an, wenn ψ in (3) x_1, x_2, x_3 durch y_1, y_2, y_3 ersetzt werden und

$$(9) \qquad t_{ji} = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\delta_{ji}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j \partial y_i}\right), \quad p_i = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{r},$$

$$(10) \qquad \Phi = \frac{1}{|\sigma|}\int_0^{|\sigma| r + \sigma(y_1-\xi_1)} \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha$$

gesetzt wird. Diese sind also die Fundamentallösungen. Sie sind 1910 von Oseen gefunden. Wenn $|\sigma|$ gegen Null konvergiert, nähert sich Φ dem Werte $r + \sigma(y_1-\xi_1)/|\sigma|$ und Gl. (9) geht wegen $\Delta r = 2/r$ in (4) über.

3. Die linearisierten Gleichungen der ebenen Bewegung, wenn das Koordinatensystem eine konstante Translationsgeschwindigkeit hat. Die Rechnungen werden auf dieselbe Weise wie oben durchgeführt. Man wird zu der Gleichung geführt:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_2^2} + 2\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} = 2\frac{\partial}{\partial y_k}\lg r \qquad (k = 1, 2).$$

Die partiellen Lösungen $\sigma\Phi = \lg r$ bzw. $\sigma\Phi = \operatorname{arctg}(y_2-\xi_2)/(y_1-\xi_1)$ sind im Ursprung allzu singulär, um die oben erwähnten Umformungen zu gestatten. Deshalb müssen wir eine zweckmäßige Lösung der homogenen Differentialgleichung addieren. Diese entsteht, wenn man die linke Seite der Differentialgleichung gleich Null setzt. Sie geht durch die Substitution $\Phi = f(r)\, e^{-\sigma(y_1-\xi_1)}$ in $f'' + f'/r - \sigma^2 f = 0$ über. Die Methode im 1. Bd., VIII, § 3, 8 zeigt, daß diese Differentialgleichung die Lösung

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-|\sigma| r \cos h\, t}\, dt = K_0(|\sigma| r) = \frac{i\pi}{2} H_0^1(i|\sigma| r)$$

besitzt. Das letzte Glied zeigt den Zusammenhang mit den Hankelschen Funktionen. Die weiteren Rechnungen übergehend, geben wir sogleich die Fundamentalintegrale an:

$$(12) \quad \begin{cases} t_{11} = \dfrac{1}{2\pi\mu} K_0(|\sigma| r) e^{-\sigma(y_1-\xi_1)} + \dfrac{1}{4\pi\mu\sigma}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\log r + K_0(|\sigma| r) e^{-\sigma(y_1-\xi_1)}\right), \\ t_{12} = t_{21} = \dfrac{1}{4\pi\mu\sigma}\dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(\log r + K_0(|\sigma| r)\, e^{-\sigma(y_1-\xi_1)}\right), \\ t_{22} = -\dfrac{1}{4\pi\mu\sigma}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\log r + K_0(|\sigma| r)\, e^{-\sigma(y_1-\xi_1)}\right), \\ p_1 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\log r, \qquad p_2 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y_2}\log r. \end{cases}$$

4. Die Bewegung eines starren Körpers. Wenn ein starrer Körper eine konstante Translationsgeschwindigkeit u_0 durch die Flüssigkeit hat, so läßt sich die Bewegung der Flüssigkeit mittels Formeln angeben, die den Gl. (3) ähnlich sind. Man denke sich nur den Körper durch Flüssigkeit ersetzt, welche dieselbe Translationsgeschwindigkeit wie der Körper hat. Die Wirkung der Körperoberfläche wird durch eingeprägte Kräfte τ_{ni} ersetzt, welche dieselbe Größe wie die Spannungen an der Körperoberfläche haben. Wenn keine anderen äußeren Kräfte X_i wirken und wenn die Flüssigkeit sonst unbegrenzt ist, so gilt

$$(13) \qquad u_j(y_1, y_2, y_3) = \iint \sum_i t_{ji}\tau_{ni}\, dF, \qquad p = \iint \sum_i p_i \tau_{ni}\, dF.$$

Es wird über die Körperoberfläche integriert. Liegt der Punkt (y_1, y_2, y_3) innerhalb des Körpers, so geben diese Integrale die Geschwindigkeit des Körpers, also $u_1 = u_0$, $u_2 = u_3 = 0$. Ferner wird $p = 0$. Liegt der Punkt außerhalb des Körpers, so erhält man natürlich die Geschwindigkeit und den Druck der Flüssigkeit. — Dieser Satz hat hier die Form einer plausiblen Hypothese. Er läßt sich aber auch beweisen[1]).

5. Die allgemeinsten linearisierten Differentialgleichungen. Diese haben, wenn wir nochmals den Unterschied zwischen q und p vernachlässigen, nach § 1, (10) die Form

$$(14) \qquad \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \mu \Delta u_j = X_j, \qquad \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Auch hier wird für p der Ausdruck (2) gefunden. Wird dieser in die obigen Gleichungen eingesetzt, und wird für X_j der Ausdruck (7) angewandt, so werden wir vor die Aufgabe gestellt, die Differentialgleichungen

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} - \mu \Delta u_j = -\frac{1}{4\pi} \Delta \iiint X_j \frac{1}{r}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \iiint \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \frac{1}{r}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

zu integrieren. Da X_j und $\partial X_i/\partial \xi_i$ hier von ξ_1, ξ_2, ξ_3, t, aber nicht von x_1, x_2, x_3 abhängen, so können wir nach der unter 2 angewandten Methode mit der Differentialgleichung

$$(15) \qquad \varrho \frac{\partial F}{\partial t} - \mu \Delta F = \frac{f(t)}{r}$$

---

[1]) H. Faxén, Ark. f. mat., astr. o. fys., Bd. 20 A, Nr. 8, 1927.

beginnen[1]). Wir nehmen nun an, daß F nur von r und t abhängen kann. Dann ist $\Delta F = (1/r)\,\partial^2(rF)/\partial r^2$. Daher erscheint (15) in der Form

$$\varrho\frac{\partial(rF)}{\partial t} - \mu\,\frac{\partial^2(rF)}{\partial r^2} = f(t). \tag{15a}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\mu\varrho\pi}}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,r\,\Phi(r, t-\tau)\,d\tau,$$

wobei

$$\Phi = \frac{1}{r}\int_0^r e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{t-\tau}} \tag{16}$$

ist. Denn man findet zunächst

$$\varrho\frac{\partial(r\Phi)}{\partial t} = \int_0^r\left[\frac{\varrho^2\alpha^2}{4\mu(t-\tau)^{5/2}} - \frac{\varrho}{2(t-\tau)^{3/2}}\right]e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}\,d\alpha$$

$$= -\frac{\varrho r\,e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{2(t-\tau)^{3/2}} = \mu\,\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2}.$$

Bei der Berechnung von $\varrho\,\partial\psi/\partial t - \mu\,\partial^2\psi/\partial r^2$ heben sich also die Ableitungen des Integranden weg und es bleibt nur (vgl. 1. Bd., S. 26) die Ableitung in bezug auf die obere Integrationsgrenze übrig. Daher ist

$$\varrho\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mu\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\varrho\,r\,f(t)}{\sqrt{\mu\varrho\pi}}\lim_{\tau\to t}\Phi(r, t-\tau).$$

Durch Einführung einer neuen Veränderlichen findet man

$$\Phi = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\int_0^{r\sqrt{\varrho/4\mu(t-\tau)}} e^{-\beta^2}\,d\beta.$$

Wegen $\int_0^\infty e^{-\beta^2}\,d\beta = \sqrt{\pi}/2$ ist $\lim_{\tau\to t}\Phi = \sqrt{\mu\pi/\varrho}/r$. Man sieht nun, daß ψ die Differentialgleichung (15a) erfüllt. Wir haben also eine Lösung $F = \psi/r$ der Gl. (15) gefunden. Gehen wir mit dieser in die Differentialgleichung für u_j ein, so läßt sich diese sogleich integrieren:

$$u_j = -\Delta\iiint\frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}}\int_{t_0}^{t} X_j\,\Phi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial x_j}\iiint\frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}}\int_{t_0}^{t}\sum_i\frac{\partial X_i}{\partial\xi_i}\,\Phi\,d\tau.$$

[1]) Die Gl. (15) tritt auch in der Theorie der Wärmeleitung auf [vgl. S. 181, (12)], wenn zeitlich veränderliche Wärmequellen vorhanden sind.

Da wir angenommen haben, daß die X_i an den Grenzen des Integrationsgebietes verschwinden, so erhält man nach einer partiellen Integration und nach anderen erlaubten Umformungen

$$(17) \qquad u_j(x_1 x_2 x_3) = \iiint d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \int_{t_0}^{t} \sum_i t_{ji} X_i(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \tau) d\tau,$$

wobei

$$(18) \qquad t_{ji} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}} \left(\delta_{ji} \Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}\right)$$

ist. p wird, wie gesagt, durch die Gl. (2) oder besser die letzte der Gl. (3) gegeben. Diese Fundamentalintegrale wurden 1906 von Oseen gefunden.

Im zweidimensionalen Falle sind die Verhältnisse ähnlich. Man hat nur für Φ und t_{ji}

$$\Phi = \log r + \int_r^\infty e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}} \frac{d\alpha}{\alpha}, \qquad t_{ji} = -\frac{1}{2\pi\varrho}\left(\delta_{ji}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_i}\right).$$

§ 3. Die Stokessche Widerstandsformel und verwandte Formeln.

1. Die Strömung um eine kleine Kugel. Wenn die Kugel eine konstante Translationsbewegung mit kleiner Geschwindigkeit hat, so ist die Strömung um die Kugel stationär. Dann sind die zeitlichen Ableitungen der u_1, u_2, u_3 in den Differentialgleichungen § 1, (6) gleich Null. Die x_1-Achse wird in die Richtung der Geschwindigkeit U der Kugel gelegt. Ist U sehr klein, werden u_1, u_2, u_3 und ihre Ableitungen auch sehr klein. Deshalb können die Produkte derselben schon in den Differentialgleichungen vernachlässigt werden. So erhalten wir [vgl. § 2, (5)] nach Stokes:

$$(1) \qquad \mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichungen sollen folgende Randbedingungen berücksichtigt werden. An der Kugeloberfläche $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ soll $u_1 = U$, $u_2 = u_3 = 0$ sein. In unendlicher Entfernung sollen $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ sein. Beiläufig sei bemerkt, daß diese Randbedingungen eigentlich zu einer konstanten Strömung um eine ruhende Kugel gehören, wobei die Flüssigkeit die Kugeloberfläche durchdringen soll. Es wird also angenommen, daß diese Strömung in der umgebenden Flüssigkeit in erster Annäherung dieselbe ist, als wenn die undurchdringliche Kugel sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt.

In § 2, (3), (4) besitzen wir schon Lösungen der obigen Differentialgleichungen. Setzen wir $i = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, so haben wir bis auf einen Faktor:

$$t_{j1} = \frac{2\,\delta_{j1}}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_1} = \frac{\delta_{j1}}{r} + \frac{x_j x_1}{r^3}, \qquad p_1 = -2\,\mu \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r}.$$

Sie sind als Spezialfall in § 2, (3), (4) enthalten, wenn wir die Kraft nur in der x_1-Richtung wirken lassen ($X_2 = X_3 = 0$), das Wirkungsgebiet von X_1 aber so auf die engste Umgebung von $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ konzentrieren, daß $\iiint X_1\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = 1$ bleibt trotz der Kleinheit des Integrationsgebietes. Daß diese t_{j1} und p_1 Lösungen der Gl. (1) sind, wenn sie für u_j und p eingetragen werden, sieht man auch folgenderweise ein. Wegen der Kontinuitätsbedingung kann man als allgemeinen Ansatz bei allen homogenen linearisierten Differentialgleichungen

$$u_{jk} = \delta_{jk} \Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}$$

setzen, wie auch aus § 2, (9), (18) hervorgeht, wenn wir in § 2, (3) nur die Kraftkomponente X_k als von Null verschieden ansehen, ihr Wirkungsgebiet auf $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ zusammenziehen und $\iiint X_k\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = 1$ setzen. Dieser Ansatz für die u_j genügt den Gl. (1), wenn

$$\Delta\Delta\Phi = 0, \qquad p = p_k = -\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta\Phi$$

ist. Diese Gleichungen werden durch $\Phi = 1/r$, $p = 0$ befriedigt [vgl. 1. Bd., S. 471, Gl. (5)]. Das ergibt:

$$u_{j1} = \frac{\delta_{j1}}{r^3} - \frac{3\,x_j x_k}{r^5}, \qquad p = 0.$$

Da $\Delta r = 2/r$ ist, so kann man auch $\Phi = r$ setzen. Dann erhält man eben die t_{j1}, p_1 (vgl. die Bemerkung am Schlusse von § 2, **2**).

Aus diesen zwei verschiedenen Lösungen bilden wir die neue Lösung der Gl. (1):

$$u_j = A_1 t_{j1} + A_2 u_{j1}, \qquad p = A_1 p_1,$$

worin A_1 und A_2 Konstanten sind. Zur Bestimmung dieser Konstanten geben die Randbedingungen $u_1 = U$, $u_2 = u_3 = 0$ an der Kugeloberfläche die Beziehungen

$$\frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^3} = U, \qquad \frac{A_1}{a} - \frac{3\,A_2}{a^3} = 0.$$

Sie ergeben:

$$A_1 = \frac{3}{4}\,aU, \qquad A_2 = \frac{1}{4}\,a^3 U.$$

Die Formeln

$$(2)\qquad \begin{cases} u_j = \dfrac{3}{4}\, a\, U \left\{ \left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{a^2}{3\, r^3} \right) \delta_{j1} + \dfrac{x_1\, x_j}{r^3} \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2} \right) \right\}, \\ p = -\dfrac{3}{2}\, a\, U\, \mu\, \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

enthalten also die Lösung unseres Problems.

Die x_j-Komponente der Kraft, welche die Flüssigkeit auf ein Flächenelement dF der Kugel ausübt, ist nach § 1, (8) gleich

$$[-p n_j + \mu\, \partial u_j / \partial n]\, dF.$$

Dabei sind n_1, n_2, n_3 die Komponenten eines nach außen gezogenen Einheitsvektors senkrecht auf dF. Da $n_j = x_j/r$ und $\partial/\partial n = \partial/\partial r$ ist, so hat die Resultierende dieser Kräfte die Komponenten

$$-\int\int \left[p \frac{x_j}{r} - \mu \frac{\partial u_j}{\partial r} \right]_{r=a} dF = -\frac{3}{2}\, a\, U\, \mu \int\int \frac{x_1}{r^3} \cdot \frac{x_j}{r}\, dF$$

$$-\frac{3}{4}\, a\, U\, \mu\, \delta_{j1} \int\int \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{r^4} \right) dF - \frac{3}{4}\, a\, U\, \mu \int\int \left(\frac{1}{r^4} - \frac{3\, a^2}{r^6} \right) x_1\, x_j\, dF$$

$$= -\frac{3}{2}\, a U\, \mu \left(\frac{4\pi}{3}\, \delta_{j1} + \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 2\, \delta_{j1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 2\, \delta_{j1} \right) = -6\, \pi\, \mu\, a U\, \delta_{j1}.$$

Die Resultierende ist also der Bewegungsrichtung der Kugel entgegengesetzt gerichtet. Sie bildet den Widerstand, den die Kugel bei ihrer Bewegung zu überwinden hat.

Wir erhalten also:

Das Stokessche Widerstandsgesetz. Eine kleine Kugel, die sich in einer reibenden Flüssigkeit in langsamer Translationsbewegung befindet, erfährt den Widerstand $W = 6\, \pi\, \mu\, a\, U$.

2. Genauere Berechnung der Strömung um eine Kugel. Wünscht man die Strömung genauer zu berechnen, so ist es natürlich, von den linearisierten Differentialgleichungen in der Form [vgl. § 2, (6)]

$$(3)\qquad -\varrho\, U \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + \frac{\partial p}{\partial y_j} - \mu\, \Delta u_j = 0, \quad \sum \frac{\partial u_j}{\partial y_j} = 0$$

auszugehen[1]), statt von denen in der Stokesschen Form (1). Denn in diesen Gleichungen sind gerade die Vereinfachungen gemacht, welche bei einem Koordinatensystem mit gleichförmiger Translationsbewegung die zweckmäßigsten sind. Der Ursprung des Koordinatensystems soll nämlich im Mittelpunkt der Kugel liegen, und die y_1-Achse soll der

[1]) C. W. Oseen, a. a. O.

Bewegungsrichtung parallel sein. Typische Lösungen von (3) sind die in § 2, **2** abgeleiteten Fundamentalintegrale

$$t_{j1} = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\delta_{j1}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j \partial y_1}\right), \quad p_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{1}{r},$$

$$\Phi = \frac{1}{|\sigma|}\int_0^{|\sigma| r + \sigma(y_1 - \xi_1)} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha.$$

Andere Lösungen sind

$$u_j^* = \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_1}\frac{1}{r}, \quad p^* = \varrho U \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\frac{1}{r}.$$

Wir setzen wieder $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ und bilden in derselben Weise wie oben eine Lösung unserer Differentialgleichungen

$$u_j = A_1 t_{j1} + A_2 u_j^*, \quad p = A_1 p_1 + A_2 p^*.$$

Um die Grenzbedingungen $u_1 - U = u_2 = u_3 = 0$ an der Kugeloberfläche erfüllen zu können, muß man angenäherte Werte für diese Geschwindigkeitskomponenten für kleine r berechnen. Man findet

$$\Phi = \frac{1}{|\sigma|}\int_0^{|\sigma| r + \sigma y_1} \left(1 - \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} - \cdots\right) d\alpha$$

$$= r + \frac{\sigma}{|\sigma|}\, y_1 - \frac{1}{4}\left\{|\sigma|(r^2 + y_1^2) + 2\sigma r y_1\right\} + \cdots$$

Das Glied $\sigma y_1/|\sigma|$ fällt bei der Bildung von t_{j1} weg. r ist das Hauptglied. Die eingeklammerten Glieder sind Korrektionsglieder. Diese zerfallen in zwei Arten, indem einige von ihnen gleichzeitig mit U ihre Vorzeichen umkehren, weil $\sigma = \varrho U/2\mu$ ist, während die anderen bei Umkehrung des Vorzeichens von U unverändert bleiben. Nur die letzteren Glieder können einen Einfluß auf den Widerstand haben, weil dieser gleichzeitig mit U sein Vorzeichen wechselt. (Die Koeffizienten A_1 und A_2 wechseln nämlich auch ihr Vorzeichen gleichzeitig mit U.) Wir vernachlässigen daher die Glieder der ersten Art und erhalten

$$\Phi = r - \frac{|\sigma|}{4}(r^2 + y_1^2) + \cdots$$

Aus diesem Ausdruck für Φ und aus dem oben angeführten Wert von u_j^* folgt für kleine Werte von r:

$$t_{j1} = \frac{\delta_{j1}}{8\pi\mu}\left(\frac{1}{r} - |\sigma|\right) + \frac{y_1 y_j}{8\pi\mu r^3} + \cdots, \quad u_j^* = -\frac{\delta_{j1}}{r^3} + \frac{3\, y_1 y_j}{r^5}.$$

Wegen der Grenzbedingungen $u_1 - U = u_2 = u_3 = 0$ für $r = a$ müssen die Konstanten A_1 und A_2 die Bedingungen

$$\frac{A_1}{8\pi\mu}\left(\frac{1}{a} - |\sigma|\right) - \frac{A_2}{a^3} = U, \quad \frac{A_1}{8\pi\mu} + \frac{3\, A_2}{a^2} = 0$$

erfüllen. Folglich:

$$\frac{A_1}{8\pi\mu} = \frac{3aU}{4\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}, \quad A_2 = -\frac{a^3U}{4\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}.$$

Da man mit den Methoden von § 2, **2**

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r}e^{-|\sigma|r-\sigma y_1}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} = \frac{1}{\sigma r}\left(1-e^{-|\sigma|r-\sigma y_1}\right)$$

findet, so erhalten wir für die Komponenten der Geschwindigkeit und den Druck die endgültigen Ausdrücke

$$(4)\qquad \begin{cases} u_j = \dfrac{3aU\delta_{j1}}{4\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}\left\{\dfrac{2}{r}e^{-|\sigma|r-\sigma y_1}+\dfrac{a^2}{3r^3}\right\} \\ \qquad -\dfrac{3aU}{4\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_j}\dfrac{1-e^{-|\sigma|r-\sigma y_1}}{\sigma r}+\dfrac{a^2\,y_1\,y_j}{r^5}\right\}, \\ p = -\dfrac{3a\mu U}{2\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_1}\dfrac{1}{r}+\dfrac{\sigma a^2}{3}\dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}\dfrac{1}{r}\right\}. \end{cases}$$

Wenn man nochmals diejenigen Glieder wegläßt, welche unverändert bleiben, wenn U das Vorzeichen wechselt, erhält man für kleine Werte von r:

$$u_j = \frac{3aU}{4\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}\left\{\left[\frac{1}{r}-|\sigma|+\frac{a^2}{3r^3}\right]\delta_{j1}+\frac{y_1y_j}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right\},$$

$$p = -\frac{3\mu aU}{2\left(1-\frac{3}{4}a|\sigma|\right)}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{1}{r}.$$

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, wird auf genau dieselbe Weise wie unter **1** aus diesen Ausdrücken berechnet. Der einzige Unterschied besteht darin, daß hier der Faktor $(1-3a|\sigma|/4)$ im Nenner neu hinzukommt. Der Widerstand wird also[1])

$$(5a)\qquad W = \frac{6\pi\mu aU}{1-\frac{3}{4}a|\sigma|}.$$

[1]) C. W. Oseen, Ark. f. mat., astr. o. fys. **9**, Nr. 16, 1913.

Da wir bei unserer Berechnung Glieder von der Größenordnung $\sigma^2 a^2$ neben 1 vernachlässigt haben, können wir den Widerstand auch schreiben:

$$W = 6\pi\mu a U\left(1+\frac{3}{4}a|\sigma|\right). \tag{5b}$$

3. Translation eines dünnen Kreiszylinders in einer zähen Flüssigkeit. Man muß bei diesem Problem schon in der ersten Annäherung die linearisierten Differentialgleichungen in der genaueren Form

$$\mu\Delta u_j + \varrho U\frac{\partial u_j}{\partial y_1} - \frac{\partial p}{\partial y_j} = 0, \qquad \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial y_j} = 0$$

den Rechnungen zugrunde legen. Die Randbedingungen sind: in unendlicher Ferne $u_j = 0$; auf der Zylinderoberfläche $r^2 = y_1^2 + y_2^2 = a^2$ soll $u_1 = U$, $u_2 = 0$ sein. Aus § 2, **3** entnehmen wir folgende Lösung dieser Differentialgleichungen:

$$u_1^{(1)} = 4\pi\mu t_{11} = 2K_0(|\sigma|r)e^{-\sigma y_1} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y_1}[\log r + K_0(|\sigma|r)e^{-\sigma y_1}],$$

$$u_2^{(1)} = 4\pi\mu t_{21} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y_2}[\log r + K_0(|\sigma|r)e^{-\sigma y_1}],$$

$$p^{(1)} = 2\mu\frac{\partial}{\partial y_1}\log r.$$

Wegen $\Delta\log r = 0$ ist

$$u_j^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_j}\log r, \qquad p^{(2)} = \varrho U\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\log r$$

eine andere Lösung der Differentialgleichungen. Für kleine Werte von r gilt

$$K_0(|\sigma|r) = -\log\frac{\gamma|\sigma|r}{2}\left(1+\frac{\sigma^2 r^2}{2^2}+\cdots\right)+\frac{\sigma^2 r^2}{2^2}-\cdots,$$

wobei $\gamma = 1{,}7811\ldots$ ist. Folglich:

$$u_j^{(1)} = -\delta_{1j}\log\frac{\gamma|\sigma|r}{2} + \frac{y_1 y_j}{r^2} + \cdots, \qquad u_j^{(2)} = \frac{\delta_{1j}}{r^2} - \frac{2y_1 y_j}{r^4}.$$

Aus diesen beiden Partiallösungen erhalten wir die allgemeinere Lösung

$$u_j = A_1 u_j^{(1)} + A_2 u_j^{(2)}, \qquad p = A_1 p^{(1)} + A_2 p^{(2)}$$

der Differentialgleichungen. Zur Bestimmung der Konstanten A_1 und A_2 erhalten wir aus der Randbedingung $u_1 = U$, $u_2 = 0$ an der Zylinderoberfläche mit Hilfe der oben stehenden Annäherungswerte

$$-A_1\log\frac{\gamma|\sigma|a}{2} + \frac{A_2}{a^2} = U, \qquad A_1 - \frac{2A_2}{a^2} = 0.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$A_1 = \frac{U}{\frac{1}{2} + \log \frac{2}{\gamma|\sigma|a}}, \qquad A_2 = \frac{a^2 U}{2\left(\frac{1}{2} + \log \frac{2}{\gamma|\sigma|a}\right)}.$$

Für die Strömung in der Umgebung des Zylinders erhalten wir die angenäherten Ausdrücke

$$u_1 = A_1 \left(\log \frac{2}{\gamma|\sigma|r} + \frac{a^2}{2r^2} + (r^2 - a^2)\frac{y_1^2}{r^4}\right),$$

$$u_2 = A_1 (r^2 - a^2)\frac{y_1 y_2}{r^4},$$

$$p = 2\mu A_1 \left[\frac{y_1}{r^2} + \frac{\sigma a^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y_1^2}{r^4}\right)\right].$$

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Zylinder ausübt, hat pro Längeneinheit des Zylinders die y_1-Komponente [vgl. § 1, (8)]:

$$\int \left[-\frac{p y_1}{a} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial n}\right] ds,$$

wobei s die Bogenlänge der Schnittkurve des Zylinders mit der $y_1 y_2$-Ebene ist. Mit Hilfe der obigen angenäherten Ausdrücke erhält man

$$-\int \frac{p y_1}{a} ds = -2\pi\mu A_1, \qquad \mu \int \frac{\partial u_1}{\partial n} ds = \mu \int \frac{\partial u_1}{\partial r} ds = -2\pi\mu A_1.$$

Auf dieselbe Weise ersieht man, daß die y_2-Komponente der resultierenden Kraft gleich Null ist, was man schon aus Symmetriegründen schließen konnte. Die Resultierende ist also der Bewegungsrichtung des Zylinders entgegengesetzt gerichtet und hat den Betrag

$$W = 4\pi\mu A_1 = \frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2} + \log \frac{2}{\gamma|\sigma|a}}.$$

Diese Widerstandsformel wurde zuerst von Lamb gefunden (1911).

§ 4. Exakte Lösungen der Bewegungsgleichungen einer reibenden unzusammendrückbaren Flüssigkeit.

In den vorigen Paragraphen lernten wir einige Lösungen der Bewegungsgleichungen kennen, die nur bei langsamen Bewegungen angenähert richtig sind. Nur die in § 1, 2 beschriebene Poiseuillesche Laminarbewegung bleibt bei größeren Geschwindigkeiten richtig. Um noch andere strenge Lösungen zu finden, stellte sich G. Hamel[1]) die Frage: Kann

[1]) G. Hamel, Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinigung, 1916.

eine zähe Flüssigkeit stationäre ebene Bewegungen ausführen, bei denen die Stromlinien dieselben sind wie bei einer Potentialbewegung (vgl. S. 762ff.), während die Geschwindigkeitsverteilung eine andere ist?

1. Die Stromfunktion. Wegen der Kontinuitätsgleichung kann eine ebene Strömung immer durch eine Stromfunktion $\psi(x_1, x_2, t)$ auf die folgende Weise beschrieben werden [vgl. S. 755, (8)]:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \qquad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \qquad u_3 = 0. \tag{1}$$

Trägt man dieses in die Gleichungen § 1, (6) ein, so erhält man:

$$\varrho\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x_2},$$

$$-\varrho\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Hieraus eliminiert man p durch Differentiation:

$$\varrho\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2}\right) = \mu\Delta\Delta\psi. \tag{2}$$

In diese einzige Gleichung wurden also alle drei Bewegungsgleichungen § 1, (6), (7) der ebenen Strömung zusammengefaßt. Bei Potentialströmungen (d. h. wirbelfreien Bewegungen) ist $\Delta\psi = 0$ [S. 755, (9)]. Alle Potentialbewegungen genügen also der Gl. (2). Diese Tatsache ist aber von geringer Bedeutung, da zähe Flüssigkeiten an festen Wänden haften und es aus funktionentheoretischen Gründen keine Potentialbewegung mit dieser Eigenschaft geben kann.

Die obenstehende gesperrt gedruckte Frage kann nun so formuliert werden: Gibt es solche Lösungen von (2), für welche

$$\psi = f(\varphi) \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = 0 \tag{3}$$

ist, nicht aber $\Delta\psi = 0$? Denn die Stromlinien werden durch die Gleichung Stromfunktion $\equiv \psi =$ Konst gegeben (S. 755). Wenn φ als die Stromfunktion einer Potentialbewegung aufgefaßt wird, so fallen in der Tat nach (3) die beiden Systeme von Stromlinien $\psi =$ Konst und $\varphi =$ Konst zusammen.

Wir beschränken uns, wie erwähnt, auf stationäre Bewegungen und haben also: $\partial\psi/\partial t = 0$. Unmittelbare Einsetzung von (3) in (2) ergibt

$$\frac{\varrho}{\mu} f^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right] = f^{\mathrm{IV}} Q^2 + 2 f^{\mathrm{III}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) + f^{\mathrm{II}}\Delta Q. \tag{4}$$

Hier wurde

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2=Q, \quad \frac{df}{d\varphi}=f' \text{ usw.}$$

gesetzt.

2. Einführung komplexer Variablen. Wegen (3) ist $F(z)=\partial\varphi/\partial x_1 - i\partial\varphi/\partial x_2$ eine analytische Funktion der Variablen $z=x_1+ix_2$ [s. Bd. 1, S. 97, Gl. (10)]. Dann hat $F'(z)\equiv dF/dz$ einen Wert, der unabhängig davon ist, ob der Zuwachs dz reell, rein imaginär oder komplex gewählt wurde (Bd. 1, S. 96 bis 97). Man findet auch, daß $1/F$ eine Ableitung mit dieser Eigenschaft besitzt und daher eine analytische Funktion ist. Dasselbe gilt auch von der Funktion

$$(5)\quad -2\frac{d}{dz}\frac{1}{F(z)}=-2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{Q}=-2\frac{\partial}{\partial(ix_2)}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{Q}.$$

Bezeichnet man mit a bzw. b den reellen bzw. den imaginären Teil dieser Funktion, so erhält man

$$a=-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{1}{Q}\right)=-2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{1}{Q}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{1}{Q}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{1}{Q}\right)=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial Q}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right),$$

$$b=-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{1}{Q}\right)=2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{1}{Q}\right)=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right),$$

$$a^2+b^2=\frac{1}{Q^3}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right)^2\right].$$

Weil die Stromlinien durch $\varphi=$ Konst gegeben sind, so wird die Form derselben nicht geändert, wenn man φ durch $c\varphi$ ersetzt, wobei c eine Konstante ist. Dann erhält man a/c bzw. b/c statt a und b. Wir können also a und b durch eine beliebige Konstante dividieren. Weil $\log F(z)$ eine Ableitung mit den oben angeführten Eigenschaften besitzt, so muß (vgl. Bd. 1, S. 94 bis 95) $\log F(z)=\log\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=\log Q - i\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$ auch eine analytische Funktion von z sein und somit [1. Bd., S. 98, Gl. (11)]:

$$\Delta\log Q=0 \quad \text{oder} \quad Q\Delta Q=\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right)^2.$$

Es ergibt sich nun $\Delta Q=Q^2(a^2+b^2)$. Mit Hilfe dieser Gleichung und der Ausdrücke für a und b können wir (4) in der folgenden Weise schreiben:

$$(6)\qquad \frac{\varrho}{\mu}f''f'b=f^{IV}+f''(a^2+b^2)+2f'''a.$$

3. Die Bahnkurven. Es läßt sich zeigen, daß diese Differentialgleichung dann und nur dann ein nur von φ abhängiges Integral besitzt, wenn a und b Konstanten sind. Aus der oben stehenden Erklärung von a und b folgt nach Integration $(a + ib)(z - z_0) = -2/F(z)$. Ist nun χ die zu φ konjugierte harmonische Funktion (vgl. Bd. 1, S. 98), so gilt

$$\frac{d(\varphi + i\chi)}{dz} = \frac{\partial(\varphi + i\chi)}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = F(z) = \frac{-2}{(a + ib)(z - z_0)}$$

und also

$$\varphi + i\chi = -\frac{2}{a + ib}\log(z - z_0) + \text{Konst.}$$

Führen wir Polarkoordinaten mittels der Gleichungen $x_1 - x_1^{(0)} = r\cos\vartheta$, $x_2 - x_2^{(0)} = r\sin\vartheta$ ein, so wird (Bd. 1, S. 94) $\log(z - z_0) = \log[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] = \log r + i\vartheta$. Der reelle Teil der oben stehenden Gleichung lautet daher

$$\varphi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a\log r + b\vartheta) + \varphi_0. \tag{7}$$

Die Gleichungen der Stromlinien, d. h. der Bahnkurven der Flüssigkeitselemente, sind nach dem unter **1** Gesagten gegeben durch $\varphi = \text{Konst.}$ Sie sind folglich logarithmische Spiralen:

$$a\log r + b\vartheta = \text{Konst.}$$

$a = 0$ bedeutet reine Radialströmung, $b = 0$ Strömungen in konzentrischen Kreisen.

4. Die Geschwindigkeitsverteilung. Aus (1), (3) und (7) findet man für die radiale Komponente die Ausdrücke

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{f'}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{2b}{a^2 + b^2}\cdot\frac{f'}{r},$$

und für die zirkulare Komponente

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = -f'\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2a}{a^2 + b^2}\frac{f'}{r}.$$

Zur Bestimmung der Funktion f dient die Gleichung (6). Einmalige Integration dieser Gleichung ergibt, wenn $f' = w$ gesetzt wird,

$$w'' + 2aw' + w(a^2 + b^2) - \frac{\varrho}{2\mu}bw^2 = C.$$

In den beiden oben erwähnten Grenzfällen $a = 0$ und $b = 0$ kann man diese Gleichung leicht lösen. Im Falle reiner Radialströmung,

wenn also $a = 0$ ist, läßt sich die obige Gleichung nach Multiplikation mit $w' d\varphi$ noch einmal integrieren. Man erhält

$$\frac{1}{2}(w')^2 + \frac{b^2}{2} w^2 - \frac{\varrho}{6\mu} b w^3 = C w + C_1.$$

$$\frac{dw}{d\varphi} = \pm \sqrt{-\frac{\varrho b}{3\mu}} \sqrt{-w^3 + \frac{3 b \mu}{\varrho} w^2 + c_1 w + c_2},$$

wobei C_1, c_1, c_2 neue Konstanten sind. Nach einer Bemerkung unter **2** können a und b noch durch eine beliebige Konstante dividiert werden. Setzen wir demgemäß $b = -2$, so wird nach (7) $\varphi = \vartheta$ und

$$(8) \qquad \frac{dw}{d\vartheta} = \pm \sqrt{\frac{2}{3\nu}} \sqrt{-w^3 - 6\nu w^2 + c_1 w + c_2}, \quad \left(\nu = \frac{\mu}{\varrho}\right).$$

Führt man hier die neuen Veränderlichen $y = w + 2\nu$ und $t = i\vartheta/\sqrt{6\nu}$ ein, so erscheint diese Differentialgleichung in der Form $y'^2(t) = 4y^3 - g_2 y - g_3$, wobei g_2 und g_3 neue Konstanten sind. Das ist nach Bd. 1, S. 140 die Differentialgleichung für die elliptische $\wp$-Funktion in der Weierstraßschen Normalform. Die radiale Komponente der Geschwindigkeit ist also gleich

$$(9) \qquad \frac{w}{r} = -\frac{2\nu}{r} + \frac{1}{r} \wp\left(\frac{i}{\sqrt{6\nu}}(\vartheta - \vartheta_0);\ g_2, g_3\right),$$

und die zirkulare Komponente ist, wie erwähnt, gleich Null.

Wenn die Strömung von zwei ebenen Wänden $\vartheta = \pm \vartheta_1$ seitwärts begrenzt ist, ergibt die weitere Diskussion der Gl. (8) oder (9) folgendes[1]) Als Kennzahl können wir $w\vartheta_1/\nu$ einführen. Bei kleinen Kennzahlen erhalten wir eine Geschwindigkeitsverteilung, die der bekannten parabolischen Verteilung (§ 1, **2**) zwischen zwei parallelen ebenen Wänden ähnlich ist. Bei größeren Kennzahlen müssen wir zwei Fälle unterscheiden, die konvergente Düse (Senkenströmung) und die divergente Düse (Quellenströmung).

Der erste Fall wird in § 5, **4** näher untersucht werden. Man findet im größeren Teile des Winkelbereichs eine Annäherung an reine Senkenströmung (vgl. S. 763), beinahe als ob keine Wände da wären. In diesem Bereich ist also die Einströmungsgeschwindigkeit fast unabhängig von ϑ. Dicht an den Wänden befindet sich eine stark rotierende Grenzschicht, in welcher die Geschwindigkeit eine rapide Abnahme zum Werte Null an den Wänden durchmacht.

Im zweiten Falle weicht die Geschwindigkeitsverteilung von der parabolischen Strömung in entgegengesetztem Sinne ab. Wenn die Kennzahl wächst, konzentriert sich die Durchflußmenge in der Mitte.

[1]) Th. v. Kármán in Th. v. Kármán und T. Levi-Civitá, Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Berlin 1924.

Bei noch größerer Kennzahl wird eine reine Quellenströmung unmöglich. Anstatt einer solchen entsteht an der einen oder an beiden Seiten ein Gebiet mit Rückströmung. Die Ausströmung konzentriert sich also in einem Strahl, der entweder in der Mitte hervorschießt oder sich an die eine Wand anlegt. Bei noch größeren Kennzahlen gibt es noch zahlreichere mögliche Bereiche mit entgegengesetzten Strömungsrichtungen und daher auch noch mehrere mögliche Strömungsformen.

Dieser Überlegung liegt aber die Voraussetzung zugrunde, daß die Geschwindigkeit überall genau radial gerichtet ist. Diese Voraussetzung ist aber in der Wirklichkeit nur selten erfüllt. Das folgende Ergebnis ist jedoch sehr bemerkenswert:

Man sieht an diesem lehrreichen Beispiel, daß die Strömung in der Richtung des fallenden Druckes (Senkenströmung) wesentlich anders verläuft als die Strömung gegen das Druckgefälle (Quellenströmung). Im ersten Falle weicht die Strömung von der reibungslosen Strömung nur in der Nähe der Wand ab. Im zweiten Falle bewirkt schon die geringste Reibung, daß die Strömung einen ganz andersartigen Charakter erhält.

5. Die Strömung zwischen koaxialen Zylindern. Wenn $b = 0$ ist, hat man noch einfacher

$$w'' + 2aw' + a^2 w = C.$$

Setzt man $w = v + C/a^2$, so erhält man für v die homogene Differentialgleichung $v'' + 2av' + a^2 v = 0$, deren charakteristische Gleichung $r^2 + 2ar + a^2 = 0$ (vgl. Bd. 1, S. 263) die zweifache Wurzel $r = -a$ hat. Die allgemeine Lösung sieht daher so aus:

$$w = \frac{C}{a^2} + e^{-a\varphi}(A + B\varphi),$$

oder wegen $\varphi = -(2\log r)/a$:

$$w = \text{Konst} + r^2(A + B_1 \log r),$$

wobei B_1 eine neue Konstante ist. Rechnet man noch den Druck aus, so findet man, daß die Bedingung dafür, daß der Druck bei einem vollen Umlauf um den Kreisring zu seinem alten Wert zurückkehrt, $B_1 = 0$ ist. Man erhält also $w = f' = A(r^2 - r_0^2)$. Die radiale Komponente der Geschwindigkeit ist gleich Null und die zirkulare

$$\frac{k}{r}(r^2 - r_0^2),$$

wobei k und r_0 Konstanten sind. Die durch diese Formeln beschriebene Bewegung wird in dem Versuch von Couette verwirklicht. In diesem ist die Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen Zylindern eingeschlossen, von denen der eine — genügend langsam — um die Achse rotiert.

§ 5. Die Grenzschichtentheorie.

In einer schwach reibenden Flüssigkeit, wie z. B. Wasser, kommt es manchmal vor, daß die Strömung in großen Bereichen annähernd wirbelfrei ist. Man kann z. B. an die Translationsbewegung eines Körpers denken. Hinter dem Körper herrscht eine unregelmäßige wirbelnde Strömung, aber vor dem Körper und nach den Seiten hin ist die Bewegung annähernd wirbelfrei. Die genaue mathematische Berechnung einer solchen Strömung ist noch in keinem Falle gelungen. Dagegen werden wir in diesem und dem nächsten Paragraphen zwei angenäherte Berechnungsmethoden kennenlernen.

1. Die Grenzschicht. Ist die Strömung in einem Bereich wirbelfrei, so hat sie ein Potential. Denn das Verschwinden der Wirbelkomponenten $\partial u_j/\partial x_k - \partial u_k/\partial x_j$ ist die mathematische Bedingung für die Existenz einer Funktion $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$, welche den Gleichungen $\partial\varphi/\partial x_j = u_j$ genügt. Die Kontinuitätsgleichung $\sum_j \partial u_j/\partial x_j = 0$ ergibt dann $\Delta\varphi = 0$. Die Lösungen dieser Differentialgleichung werden Potentialfunktionen genannt (1. Bd., XIV), die Strömung selbst eine Potentialströmung (vgl. S. 762 ff.).

In dem Bereich der Potentialströmung sind Δu_1, Δu_2 und Δu_3 gleich Null, denn wir haben $\Delta u_j = \Delta\partial\varphi/\partial x_j = \partial\Delta\varphi/\partial x_j = 0$. In den Differentialgleichungen § 1, (6) fallen deshalb die von der inneren Reibung μ abhängigen Glieder weg. In einem Bereich mit Potentialbewegung macht sich also die Reibung, auch wenn μ von Null verschieden ist, nicht geltend.

Bei sehr kleinem μ ist die Strömung vor dem Körper und nach den Seiten hin angenähert wirbelfrei, d. h. angenähert eine Potentialbewegung[1]).

Die Randbedingung, daß die Flüssigkeit an den Körperoberflächen nicht gleiten soll, erfüllt die angenäherte Potentialbewegung im allgemeinen nicht. Auch bei der kleinsten Reibung bildet sich deshalb an den Oberflächen eine dünne Schicht aus, die Grenzschicht, welche den Übergang von der Geschwindigkeit der Potentialbewegung zu derjenigen des Körpers vermittelt. Vor dem Körper und nach den Seiten

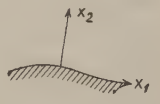
---

[1]) Wenn μ sehr klein ist, kann ein Flüssigkeitselement nämlich nur dann in merkliche Rotation geraten, wenn es in ein Gebiet mit starkem Geschwindigkeitsgefälle gerät. Denn man kann in jedem Augenblick an kugelförmige Elemente denken. Solche werden nur durch Reibung in Rotation versetzt. Nach § 1, (4) sind die Reibungskräfte gleich μ mal einem Gliede, das von der Größenordnung des Geschwindigkeitsgefälles ist. Da vor dem Körper und nach den Seiten hin dieses nur an der Körperoberfläche außerordentlich groß ist, so folgt die Richtigkeit der Behauptung.

hin macht sich also die Reibung nur in der dünnen Grenzschicht an der Körperoberfläche bemerkbar.

Wir sehen im folgenden von derartig großen Geschwindigkeiten, daß die Strömung in der Grenzschicht unregelmäßig wirbelnd (turbulent) ist, ab und beschränken uns auf die Fälle laminar strömender Grenzschicht.

Fig. 86.



2. Die Bewegungsgleichung der Grenzschicht[1]**).** Wir beschränken uns auf zweidimensionale Fälle und wenden als Koordinaten die Bogenlänge x_1 längs der Begrenzungslinie des Körpers und die senkrechte Entfernung x_2 davon an (Fig. 86). Zunächst soll die Begrenzungslinie gerade sein. Die Größenordnung der Dicke der Grenzschicht sei ε. Da die Geschwindigkeit u_1 auf dieser Strecke von Null zu normalen Werten ansteigen soll, wird $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$. Von normaler Größenordnung sind u_1, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \sim 1$, und durch Integration $u_2 \sim \varepsilon$. Wenn der Körper eine konstante Translationsgeschwindigkeit hat, sind die Grundgleichungen

$$\varrho\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)$$

$$1 \qquad 1.1 \qquad \varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon} \qquad 1 \qquad 1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\varrho\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right)$$

$$\varepsilon \qquad 1.\varepsilon \qquad \varepsilon.1 \qquad\qquad \varepsilon \qquad \frac{1}{\varepsilon}$$

Unterhalb jedes Gliedes ist seine Größenordnung aufgeschrieben. Wir werden alle Glieder vernachlässigen, die so klein wie ε oder ε^2 sind. Aus der ersten Gleichung folgt, daß der Einfluß der Reibung von plausibler Größenordnung wird, wenn $\mu \sim \varepsilon^2$ ist. D. h. die Dicke ε der Grenzschicht ist proportional $\sqrt{\mu}$. — Dann fällt das Glied $\partial^2 u_1/\partial x_1^2$ aus der ersten Gleichung fort. — Aus der zweiten Gleichung schließen wir $\partial p/\partial x_2 \sim \varepsilon$. Ist die Begrenzungslinie mäßig gekrümmt, so kommt, wie man durch Umformung der Differentialquotienten findet, nur in der zweiten Gleichung ein nicht zu vernachlässigendes Glied $\varrho u^2/r$ hinzu. r ist der Krümmungsradius. Da dieses Glied ~ 1 ist, so ist $\partial p/\partial x_2$ höchstens von der Größenordnung 1. Wegen der geringen Dicke der Grenzschicht kann der Druck längs der x_2-Achse höchstens

[1]) Nach H. Blasius, Dissertation Göttingen, 1908.

mit kleinen Beträgen der Ordnung ε variieren. Diese Variationen können vernachlässigt werden. Damit ist der grundlegende Satz von Prandtl begründet, daß der Druck p überall in der Grenzschicht dieselbe Größe hat wie in der Potentialbewegung unmittelbar außerhalb der Grenzschicht. Zur Vereinfachung der Rechnungen nimmt man dann an, daß p bekannt ist. Entweder kann die Potentialbewegung bekannt sein und p daraus berechnet werden, oder aber man kennt p aus Messungen. So erhalten wir die 1904 von Prandtl aufgestellten Grundgleichungen für die Strömung in Grenzschichten:

$$\varrho\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0.$$

Grenzbedingungen sind:

für $x_2=0$: $u_1=0$, $u_2=0$;
für x_2 groß: $u_1=$ Geschwindigkeit der Potentialbewegung.

3. Ablösung der Grenzschicht. Die Grenzschicht kann man an einem in Wasser eingetauchten Zylinder leicht beobachten. Man sieht dann, daß die Grenzschicht von dem Zylinder sich ablöst, und zwar an einem Punkte, der etwas weniger als 90° (bei Beobachtung von Hiemenz etwa 82°) von dem vordersten Punkte entfernt ist. Die Grenzschichtentheorie erklärt diese Ablösung auf folgende Weise: Der Druck hat sein Maximum an dem Staupunkt, dem vordersten Punkte des Zylinders. Längs des Umrisses des Zylinders fällt der Druck ab und erreicht nach etwa 72° ein Minimum, das viel kleiner als der Druck im Unendlichen ist. Weiter nach hinten steigt der Druck wieder.

Infolge der Reibung an der Zylinderoberfläche hat diejenige Flüssigkeit, welche in die Grenzschicht eingedrungen ist, einen Teil ihrer Bewegungsenergie verloren. Sie vermag deshalb nicht von selbst weit in das Gebiet des steigenden Druckes einzudringen. Sie wird noch ein kleines Stück von der umgebenden Flüssigkeit mitgerissen. Dabei nimmt aber die Dicke der Grenzschicht schnell zu. Bald begegnet die Grenzschicht einem von der Hinterseite des Körpers eingesaugten Strome, der sich zwischen die Grenzschicht und die Zylinderfläche legt. So löst sich die stark rotierende Grenzschicht von der Körperoberfläche ab und gelangt in die Flüssigkeit hinein.

In welchem Grade erlaubt uns die Grenzschichtentheorie diese qualitativen Überlegungen rechnerisch zu verfolgen? Zunächst können wir die Potentialbewegung nicht genau mathematisch berechnen, weil diese von der turbulenten Strömung im Kielwasser stark beeinflußt wird. Wenn der Druck aber an der Zylinderoberfläche experimentell

gemessen wird, so kann man nachher durch numerische Methoden gute Annäherungen für die Strömung in den Grenzschichten in den Gebieten fallenden Druckes erhalten. In Gebieten steigenden Druckes und besonders in der Umgebung der Ablösungsstelle nimmt die Grenzschicht, wie gesagt, stark an Dicke zu. Daher ist die Voraussetzung „ε klein" oft nicht mehr erfüllt. Trotzdem haben numerische und graphische Rechnungen sehr gute Annäherungswerte für die Lage der Ablösungsstelle gegeben[1]).

4. Die Grenzschicht in Hamels exakter Theorie. Wenn eine Flüssigkeit zwischen konvergierenden festen Wänden einströmt, bilden sich an diesen Grenzschichten aus, wenn die Reibung schwach ist. Hamels exakte Theorie erlaubt uns ein Beispiel durchzurechnen. Die Gl. (8) in § 4 kann, wenn der Wurzelausdruck in Faktoren aufgelöst wird, auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{dw}{d\vartheta} = \pm\sqrt{\frac{2}{3\nu}}\sqrt{(e_1 - w)(w - e_2)(w - e_3)},$$

wobei $e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu$ ist. Wir betrachten den Fall, daß e_1, e_2, e_3 alle reell sind und $e_1 > 0 \geqq w \geqq e_2 > e_3$ ist. Da w negativ ist, haben wir es mit einer Einströmung mit der Geschwindigkeit $-w/r$ zu tun (§ 4, 4). Bei dem Minimum von w muß $dw/d\vartheta$ gleich Null sein. Dann folgt aus der obigen Gleichung $w_{\min} = e_2$. Wird ϑ von dieser Stelle ab gerechnet, gilt

$$\vartheta = \pm\sqrt{\frac{3\nu}{2}}\int_{e_2}^{w}\frac{dw}{\sqrt{(e_1 - w)(w - e_2)(w - e_3)}}.$$

Für einen beliebigen Wert von w ergibt diese Formel entgegengesetzt gleiche Werte von ϑ. Die Strömung ist also symmetrisch. Da die Geschwindigkeit an den Wänden gleich Null ist, findet man für den halben Öffnungswinkel zwischen diesen den Wert

$$\vartheta_1 = \pm\sqrt{\frac{3\nu}{2}}\int_{e_2}^{0}\frac{dw}{\sqrt{(e_1 - w)(w - e_2)(w - e_3)}}.$$

Wie gestaltet sich diese Strömung bei sehr kleinen Werten der kinematischen Zähigkeit ν? Die obige Gleichung verlangt dann, daß das Integral sehr groß sein soll, damit ϑ_1 einen im voraus bestimmten normalen Wert erhält. Da $-e_2/r$ die maximale Einströmungsgeschwindigkeit bedeutet, so nehmen wir an, daß e_2 einen Wert nor-

[1]) K. Hiemenz, Dissertation Göttingen, 1911. Dinglers polyt. Journ. **326**, 321, 1911. K. Pohlhausen, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 252, 1921.

maler Größenordnung haben soll. Das Integral wird aber nur dann sehr groß, wenn e_3 nahezu gleich e_2 ist, was wir also annehmen wollen. Ist $w - e_2$ nicht sehr klein, so gilt, wegen $e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu \sim 0$, annäherungsweise

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 - \vartheta &= \pm\sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_w^0 \frac{dw}{\sqrt{(e_1 - w)(w - e_2)(w - e_3)}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_w^0 \frac{dw}{(w - e_2)\sqrt{-2e_2 - w}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{\nu}{-2e_2}} \left[\lg \frac{\sqrt{-3e_2} - \sqrt{-2e_2 - w}}{\sqrt{-3e_2} + \sqrt{-2e_2 - w}}\right]_w^0 \\
&= \pm\sqrt{\frac{\nu}{-2e_2}} \lg \left[\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{-3e_2} + \sqrt{-2e_2 - w}}{\sqrt{-3e_2} - \sqrt{-2e_2 - w}}\right].
\end{aligned}$$

Da ν sehr klein ist, folgt hieraus, daß auch $\vartheta_1 - \vartheta$ sehr klein ist, sofern w nicht nahe gleich e_2 ist. Im letzteren Falle ist aber diese Gleichung ungültig. So viel ist jedoch gezeigt worden, daß der hauptsächliche Geschwindigkeitsanstieg ganz in der Nähe der Wände vor sich geht, wenn die Geschwindigkeit als Funktion von ϑ betrachtet wird. In dem größten Teile des Zwischengebietes ist w nahezu gleich e_2, d. h. die Geschwindigkeit ist nahezu gleich $-e_2/r$. Da eine Einströmung mit der Geschwindigkeit $-e_2/r$ eine reine Potentialbewegung ist (vgl. S. 763), ist also gezeigt worden, daß die Strömung nahezu eine Potentialbewegung ist, außer dicht an den Wänden, wo sich Grenzschichten befinden. Man sieht ferner aus der letzten Gleichung, daß die Dicke der Grenzschicht proportional $\sqrt{\nu}$ ist, was mit dem unter 1 Gesagten gut übereinstimmt.

§ 6. Ist die Strömung bei unendlich kleiner Reibung annähernd gleich einer Potentialbewegung?

In einer idealen Flüssigkeit, die einmal ruhte, kann, wie wir S. 761 f. gesehen haben, niemals ein Wirbel entstehen. Hieraus folgt unmittelbar, daß in einer idealen Flüssigkeit die Bewegung, die dadurch hervorgerufen wird, daß sich ein starrer Körper in ihr bewegt, wirbellos sein muß. Eine ganz andere Frage ist aber die, ob die unter denselben Umständen entstehende Bewegung einer zähen Flüssigkeit, bei abnehmender Zähigkeit μ, sich immer mehr einer wirbellosen Grenzbewegung nähert. Diese Frage werden wir hier zu be-

antworten versuchen. Der Einfachheit wegen werden wir nur einen ganz speziellen Fall betrachten[1]).

Zuerst sei jedoch daran erinnert, daß nach § 4, 4 die Einströmung zwischen konvergierenden ebenen Wänden bei abnehmender Zähigkeit sich immer mehr einer wirbellosen Strömung nähert, während die Ausströmung sich ganz anders verhält, vorausgesetzt, daß die Strömung genau radial ist.

1. Lösung der vollständigen Differentialgleichungen mittels sukzessiver Annäherung. Wir wollen annehmen, daß sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit U in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Die Komponenten u_1, u_2, u_3 der Strömungsgeschwindigkeit genügen den vollständigen Differentialgleichungen § 1, (6) und (7), welche in § 1, 7 auf die Form (9) gebracht wurden. Wir nehmen an, daß keine Massenkräfte X_j wirken. Ferner werden wir das in § 1, 7 eingeführte Bezugssystem y_1, y_2, y_3 verwenden, welches an der Bewegung des Körpers teilnimmt. Die y_1-Achse fällt in die Bewegungsrichtung. Ist die Bewegung in bezug auf dieses Koordinatensystem stationär, so nehmen die vollständigen Differentialgleichungen folgende Form an:

$$(1)\quad \begin{cases} \mu \Delta u_j + \varrho U \dfrac{\partial u_j}{\partial y_1} - \dfrac{\partial q}{\partial y_j} = -\lambda Y_j, \quad \displaystyle\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial y_i} = 0, \\ \lambda = 1, \quad Y_j = \displaystyle\sum_i \varrho u_i \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) = \sum_i \varrho u_i \Big(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} - \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\Big) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Die Komponenten des Wirbels sind $\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i$ (S. 753 f.). Wenn diese bei abnehmendem μ verschwinden, so ersieht man aus den obigen Gleichungen, daß die Y_j auch verschwinden. Wird diese Annahme gemacht, so muß es also, je kleiner μ ist, um so mehr erlaubt sein, die Y_j zu vernachlässigen. Wir werden so zu den Gleichungen

$$(2)\qquad \mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial y_1} - \frac{\partial q}{\partial y_j} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial y_i} = 0$$

geführt. Wenn der Wirbel gleichzeitig mit μ verschwindet, so dürfen wir erwarten, daß die Lösung dieser Gleichungen bei abnehmendem μ die richtige Grenzbewegung ergeben wird.

Selbst dann, wenn uns die Gl. (2) bei verschwindendem μ nicht zu einer wirbelfreien Strömung führen, in welchem Falle es also nicht erlaubt ist, die aus ihnen hervorgehende Bewegung als die richtige Grenzbewegung aufzufassen, besitzt das Studium dieser Gleichungen

[1]) C. W. Oseen, Nova Acta Soc. Scient. Upsaliensis 1914. Für das allgemeine Problem vgl. sein am Ende des Kapitels zitiertes Lehrbuch.

das größte Interesse. Wir besitzen nämlich keine andere Methode zur Lösung der Gl. (1), als die Methode der sukzessiven Annäherungen, wobei die den Gl. (1) genügende Bewegung so betrachtet wird, als wäre sie durch eine „Störung" der aus (2) bestimmten Bewegung hervorgegangen. Man entwickelt dabei die gesuchte Lösung in Potenzreihen in bezug auf λ:

$$(3) \qquad u_j = \sum_0^\infty \lambda^n u_j^{(n)}, \quad q = \sum_0^\infty \lambda^n q^{(n)}, \quad Y_j = -\sum_1^\infty \lambda^{n-1} X_j^{(n)}.$$

Zur Bestimmung der Funktionen $u_j^{(n)}$, $q^{(n)}$ erhält man dann durch Einsetzen in (1) und Koeffizientenvergleichung Gleichungen von der Form:

$$(4) \qquad \mu \Delta u_j^{(n)} + \varrho U \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial y_1} - \frac{\partial q^{(n)}}{\partial y_j} = X_j^{(n)}, \quad \sum_i \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial y_i} = 0,$$

worin die $X_j^{(n)}$ bekannt sind, wenn die $n-1$ ersten Gleichungen schon aufgelöst sind. Insbesondere ist $X_j^{(0)} = 0$ gesetzt, weshalb die $u_j^{(0)}$ den Gl. (2) genügen. Eine partikuläre Lösung der Gl. (4) erhält man aus § 2, (3), worin die t_{ji} und p_i die Werte § 2, (9), (10) haben. Diese Lösung erfüllt aber im allgemeinen die Randbedingungen nicht. Deshalb muß noch die allgemeine Lösung der homogenen Gl. (2) hinzugefügt werden, damit man die allgemeine Lösung der Gl. (4) erhält. Im folgenden werden wir uns nur mit der ersten Annäherung ($Y_j = 0$) beschäftigen.

2. Verwendung der Fundamentalintegrale. Wir werden uns, wie schon erwähnt, auf einen ganz speziellen Fall beschränken. Wir werden nämlich annehmen, daß der Körper eine ebene Scheibe ist, die sich senkrecht zu ihrer Ebene bewegt. Es ist also unsere Aufgabe, bei sehr kleinem μ eine Lösung der Gl. (2) zu finden, die, solange noch $\mu > 0$ bleibt, die Randwerte

$$(5) \qquad \text{an der Scheibe:} \quad u_1 = U, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

$$(6) \qquad \text{in unendlicher Entfernung:} \quad u_j = 0$$

annimmt. Um die Lösung dieses Problems auf Integralgleichungen zurückzuführen, gehen wir von den Gleichungen § 2, (13) aus. Diese geben uns die u_j und p, wenn die Spannungen τ_{ni} an der Oberfläche der Scheibe bekannt sind. Für t_{ji} und p_i sollen die Werte § 2, (9) benutzt werden. Da nach § 2, 2 $\Delta \Phi = 2/r - 2\sigma \partial \Phi / \partial y_1$ ist, findet man aus § 2, (10) $\Delta \Phi = 2\, e^{-|\sigma| r - \sigma(y_1 - \xi_1)}/r$. Legt man den Anfangspunkt des Bezugssystems auf die Scheibe, so wird $\xi_1 = 0$. Der Unterschied zwischen σ und $|\sigma|$ hat für die folgende Rechnung keine Bedeutung und wird deshalb vernachlässigt. Setzt man ferner

$$(6a) \qquad (\tau_{ni})_{\text{Vorderseite}} + (\tau_{ni})_{\text{Hinterseite}} = 8\pi\mu\sigma\varphi_i$$

so erhält man aus § 2, (13):

$$(7) \qquad u_j = 2\sigma \iint \varphi_j \frac{e^{-\sigma(r+y_1)}}{r} - dF - \sigma \sum_i \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} \iint \varphi_i \Phi \, dF,$$

wobei die Bezeichnungen nach § 2, 2 folgende Bedeutung haben:

$$\sigma = \frac{\varrho U}{2\mu}, \quad r = \sqrt{y_1^2 + (y_2 - \xi_2)^2 + (y_3 - \xi_3)^2}, \quad \Phi = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma(r+y_1)} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \, d\alpha.$$

ξ_2, ξ_3 sind die Koordinaten eines Punktes an dem Flächenelement dF der Scheibe. Der Integrationsbereich ist die eine, etwa die vordere Seite der Scheibe. Aus § 2 wissen wir, daß die Ausdrücke (7) den Differentialgleichungen (2) und den Randbedingungen (6) genügen, wie die φ_i auch gewählt werden mögen. Da die τ_{ni} nicht im voraus bekannt sind, können wir die φ_i nicht in der oben angegebenen Weise, welche zur Ableitung der Gl. (7) diente, praktisch berechnen. Statt dessen müssen die φ_i aus der Randbedingung (5) bestimmt werden.

Setzt man

$$\sigma \partial \Phi / \partial y_1 = (1 - e^{-\sigma(r+y_1)})/r = P,$$

so ergeben die Randbedingungen (5) folgende Gleichungen, die auf der Scheibe erfüllt sein sollen:

$$(8) \qquad \lim_{y_1 \to 0} \left\{ 2\sigma \iint \varphi_1 \frac{e^{-\sigma(r+y_1)}}{r} - dF - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \iint \varphi_i P \, dF \right\} = U,$$

$$(9) \qquad \lim_{y_1 \to 0} \left\{ 2\sigma \iint \varphi_j \frac{e^{-\sigma(r+y_1)}}{r} - dF - \sigma \sum_i \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} \iint \varphi_i \Phi \, dF \right\} = 0$$
$$(j = 2, 3).$$

3. Integralgleichungen zur Bestimmung der φ_i. Wenn

$$(y_2 - \xi_2)^2 + (y_3 - \xi_3)^2 = r_0^2$$

gesetzt wird, so gilt an der Scheibe

$$\lim_{y_1 \to 0} \iint \varphi_1 \frac{e^{-\sigma(r+y_1)}}{r} dF = \iint \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dF,$$

$$\lim_{y_1 \to 0} \iint \varphi_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} dF = \lim_{y_1 \to 0} \iint \varphi_1 \left[\frac{\sigma e^{-\sigma(r+y_1)}}{r} - \frac{y_1}{r^3} \left(1 - (1 + \sigma r) e^{-\sigma(r+y_1)} \right) \right] dF.$$

Wenn $f(\xi_2, \xi_3)$ eine stetige Funktion von ξ_2, ξ_3 ist, so gilt, wenn der Punkt $0, y_2, y_3$ dem Integrationsgebiet angehört (vgl. 1. Bd., S. 477),

$$\lim_{y_1 \to 0} \iint \frac{y_1}{r^3} f(\xi_2, \xi_3) \, dF = \pm 2\pi f(y_2 y_3).$$

Wir finden also sukzessiv (da für $y_2 = \xi_2$, $y_3 = \xi_3$ die Entfernung r einfach y_1 wird)

$$\lim_{y_1 \to 0} \iint \frac{y_1}{r^3} [1 - (1 + \sigma r) e^{-\sigma(r + y_1)}] \, dF = 0,$$

$$\lim_{y_1 \to 0} \iint \varphi_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} \partial F = \sigma \iint \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dF.$$

Die Bedingung (8) ergibt also:

$$\sigma \iint \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dF - \frac{\partial}{\partial y_2} \iint \varphi_2 P_{y_1 = 0} \, dF - \frac{\partial}{\partial y_3} \iint \varphi_3 P_{y_1 = 0} \, dF = U, \tag{10}$$

wobei

$$P_{y_1 = 0} = \frac{1 - e^{-\sigma r_0}}{r_0} \tag{11}$$

ist. Die Bedingungen (9) ergeben, wenn wir

$$2\sigma \iint \varphi_j \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dF = 4\pi \frac{\partial \varkappa}{\partial y_j} \qquad (j = 2, 3) \tag{12}$$

setzen, das Resultat:

$$4\pi\varkappa - \iint \varphi_1 P_{y_1 = 0} \, dF - \sigma \frac{\partial}{\partial y_2} \iint \varphi_2 \Phi_{y_1 = 0} \, dF - \sigma \frac{\partial}{\partial y_3} \iint \varphi_3 \Phi_{y_1 = 0} \, dF = \text{Konst.} \tag{13}$$

Die Beziehungen (10) bis (13) sollen zur Bestimmung der Funktionen φ_j dienen. Nebenbei sei bemerkt, daß man (10) bis (13) auch direkt mit Hilfe von § 2, 4 hätte niederschreiben können. In der oben gewählten Darstellung erkennt der Leser leichter die Unterschiede gegen einen folgenden Grenzübergang $\mu \to 0$.

4. Vereinfachung der Integralgleichungen bei verschwindend kleiner Reibung. $f(\xi_2, \xi_3)$ soll eine stetige Funktion sein. Führt man im folgenden Integral die Polarkoordinaten R und ϑ durch die Gleichungen

$$\sigma(y_2 - \xi_2) = R\cos\vartheta, \quad \sigma(y_3 - \xi_3) = R\sin\vartheta$$

ein, so findet man wegen $\sigma^2 dF = R\,dR\,d\vartheta$

$$\lim_{\mu \to 0} \sigma \iint f(\xi_2, \xi_3) e^{-\sigma r_0} \frac{dF}{r_0}$$

$$= \lim_{\sigma \to \infty} \iint f\Big(y_2 - \frac{R\cos\vartheta}{\sigma}, \quad y_3 - \frac{R\sin\vartheta}{\sigma}\Big) e^{-R} \, dR\,d\vartheta$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(y_2, y_3) e^{-R} \, dR\,d\vartheta = 2\pi f(y_2, y_3),$$

wenn der Punkt 0, y_2, y_3 dem Integrationsbereich angehört, sonst

$$\lim_{\mu \to 0} \sigma \iint \frac{f(\xi_2, \xi_3)}{r_0} e^{-\sigma r_0} dF = 0.$$

Wir haben ferner:

$$\lim_{\mu \to 0} \iint f(\xi_2, \xi_3) P_{y_1 = 0} dF = \iint f(\xi_2, \xi_3) \frac{dF}{r_0},$$

$$\lim_{\mu \to 0} \sigma \frac{\partial}{\partial y_j} \iint f(\xi_2, \xi_3) \Phi_{y_1 = 0} dF = \iint f(\xi_2, \xi_3) \frac{y_j - \xi_j}{r_0^2} dF \qquad (j = 2, 3).$$

Unsere Gl. (10) bis (13) ergeben deshalb im Grenzfall $\mu \to 0$:

$$\varphi_j = \frac{\partial \varkappa}{\partial y_j} \qquad (j = 2, 3), \tag{14}$$

$$2\pi\varphi_1 - \frac{\partial}{\partial y_2} \iint \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi_2} \frac{dF}{r_0} - \frac{\partial}{\partial y_3} \iint \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi_3} \frac{dF}{r_0} = U, \tag{15}$$

$$4\pi\varkappa - \iint \varphi_1 \frac{dF}{r_0} - \iint \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi_2} \cdot \frac{y_2 - \xi_2}{r_0^2} dF - \iint \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi_3} \cdot \frac{y_3 - \xi_3}{r_0^2} dF = \text{Konst.} \tag{16}$$

Wir bezeichnen mit $\varphi_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$ die Lösungen dieser Gleichungen. Mit der expliziten Bestimmung dieser Funktionen $\varphi_i^{(0)}$ wollen wir uns hier nicht befassen.

5. Umformung der Geschwindigkeitskomponenten in dem von der Scheibe nicht durchschrittenen Raume. Die Gl. (7) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$u_j = 2\sigma \iint \varphi_j^{(0)} \frac{e^{-\sigma(r + y_1)}}{r} dF - \frac{\partial}{\partial y_j} \iint \varphi_1^{(0)} (1 - e^{-\sigma(r + y_1)}) \frac{dF}{r}$$
$$- \frac{\partial}{\partial y_j} \iint \frac{\varphi_2^{(0)}(y_2 - \xi_2) + \varphi_3^{(0)}(y_3 - \xi_3)}{r + y_1} (1 - e^{-\sigma(r + y_1)}) \frac{dF}{r}$$
$$+ 2\sigma \iint (\varphi_j - \varphi_j^{(0)}) \frac{e^{-\sigma(r + y_1)}}{r} dF - \sigma \sum_i \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} \iint (\varphi_i - \varphi_i^{(0)}) \Phi \, dF.$$

Wir führen in den drei ersten Gliedern dieses Ausdruckes den Grenzübergang $\mu \to 0$, also $\sigma \to \infty$ aus. Unsere Untersuchung wird überdies zeigen, daß die beiden letzten Glieder, wenn φ_j und $\varphi_j^{(0)}$ stetig differenzierbare Funktionen von ξ_2, ξ_3 sind, gleichzeitig mit μ verschwinden. — Durch jeden Punkt der Randkurve unserer Scheibe ziehen wir eine mit der negativen y_1-Achse parallele Gerade (Fig. 87 a. f. S.). Wenn der Punkt (y_1, y_2, y_3) außerhalb des so erhaltenen Zylinders liegt, kann man den erwähnten Grenzübergang sehr einfach ausführen.

da diejenigen Glieder, welche den Faktor $e^{-\sigma(r+y_1)}$ enthalten, wegen des Nichtverschwindens von $r + y_1$ gegen Null konvergieren. Wir erhalten

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \tag{17}$$

wobei

$$\varphi = -\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} - \iint \left[(y_2 - \xi_2)\frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2} + (y_3 - \xi_3)\frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_3}\right]\frac{dF}{r(r+y_1)} \tag{18}$$

Fig. 87.

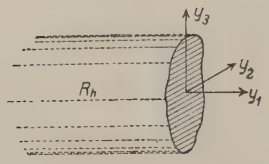
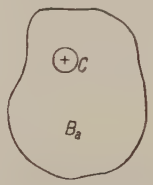


Fig. 88.



eine in dem erwähnten Bereich reguläre Potentialfunktion ist. Dabei bedeutet $\varkappa^{(0)}$ den Ausdruck, der aus $\varkappa$ entsteht, wenn man in (14) $\varphi_j = \varphi_j^{(0)}$ setzt. Da

$$\lim_{y_1 \to +0} -\frac{\partial}{\partial y_1}\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} = 2\pi\varphi_1^{(0)},$$

$$\lim_{y_1 \to +0} -\frac{\partial}{\partial y_1}\iint \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2}\frac{y_2 - \xi_2}{r(r+y_1)}\, dF = \lim_{y_1 \to +0} -\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\iint \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2}\log(r+y_1)\, dF$$

$$= \lim_{y_1 \to +0} -\frac{\partial}{\partial y_2}\iint \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2}\frac{dF}{r} = -\frac{\partial}{\partial y_2}\iint \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2}\cdot\frac{dF}{r_0}$$

ist und da eine entsprechende Formel, in welcher der Index 2 durch 3 ersetzt ist, gilt, folgt aus (15), daß die Funktion φ an der Vorderseite der Scheibe der Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = U \tag{19}$$

genügt.

6. Die Geschwindigkeitskomponenten in dem von der Scheibe durchschrittenen Raume R_h. In diesem Gebiet ist y_1 negativ. Deshalb wird $r + y_1 = 0$, wenn $y_2 = \xi_2$, $y_3 = \xi_3$ ist. Wir untersuchen der Reihe nach die Integrale, welche in dem Ausdruck der u_j vorkommen, und erhalten dabei zuerst

$$\lim_{\mu \to 0} 2\sigma \iint \varphi_i^{(0)}\frac{e^{-\sigma(r+y_1)}}{r}\, dF$$

$$= \lim_{\mu \to 0} 2\sigma \iint \varphi_i^{(0)}(\xi_2, \xi_3)\, e^{-\frac{\sigma}{2|y_1|}[(y_2-\xi_2)^2 + (y_3-\xi_3)^2]}\frac{dF}{r}.$$

Führt man die neuen Integrationsvariablen R und ϑ durch die Gleichungen $\sqrt{\sigma}(y_2 - \xi_2) = R\cos\vartheta$, $\sqrt{\sigma}(y_3 - \xi_3) = R\sin\vartheta$ ein, so wird der obige Ausdruck gleich

$$\lim_{\sigma\to\infty} 2\iint \varphi_i^{(0)}\Big(y_2 - \frac{R\cos\vartheta}{\sqrt{\sigma}},\quad y_3 - \frac{R\sin\vartheta}{\sqrt{\sigma}}\Big)\frac{e^{-\frac{R^2}{2|y_1|}}\,R\,dR\,d\vartheta}{\sqrt{y_1^2 + R^2/\sigma}}$$

$$= 2\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \varphi_i^{(0)}(y_2, y_3)\,e^{-\frac{R^2}{2|y_1|}}\frac{R\,dR\,d\vartheta}{|y_1|} = 4\pi\varphi_i^{(0)}(y_2, y_3).$$

Hieraus folgt

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial}{\partial y_1}\iint \varphi_1^{(0)}\,e^{-\sigma(r+y_1)}\frac{dF}{r}$$

$$= \lim_{\mu\to 0}\iint \varphi_1^{(0)}\,e^{-\sigma(r+y_1)}\Big[-\frac{y_1}{r^2} - \frac{\sigma(y_1+r)}{r}\Big]\frac{dF}{r} = 0,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial}{\partial y_j}\iint \varphi_1^{(0)}\,e^{-\sigma(r+y_1)}\frac{dF}{r}$$

$$= \lim_{\mu\to\infty} -\iint \varphi_1^{(0)}\frac{(y_j - \xi_j)(1+\sigma r)}{r^2}\,e^{-\sigma(r+y_1)}\frac{dF}{r} = 0 \quad (j = 2, 3).$$

Da der Integrand im folgenden Integral für $\xi_2 = y_2$, $\xi_3 = y_3$ nur wie $1/R$ unendlich wird, so ist

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial}{\partial y_1}\iint \varphi_2^{(0)}\frac{y_2 - \xi_2}{r(r+y_1)}\,e^{-\sigma(r+y_1)}\,dF = 0.$$

Diese Gleichung bleibt auch dann gültig, wenn man den Index 2 gegen 3 vertauscht. Dasselbe gilt auch bei der folgenden Berechnung der Grenzwerte der Glieder:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\iint \varphi_2^{(0)}\frac{y_2 - \xi_2}{r + y_1}(1 - e^{-\sigma(r+y_1)})\frac{dF}{r} = \frac{\partial}{\partial y_j}\iint \sigma\,\varphi_2^{(0)}\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\,dF \quad (j = 2, 3).$$

Um den Punkt $(0, y_2, y_3)$ legen wir in der Ebene der Scheibe eine geschlossene Kurve C (Fig. 88). Diejenigen Teile unserer Integrale, die von dem Bereich B_a der Scheibe stammen, der außerhalb dieser Kurve liegt, konvergieren bei abnehmendem μ gegen die Grenzwerte:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\int_{B_a}\int \varphi_2^{(0)}\frac{y_2 - \xi_2}{r(r+y_1)}\,dF.$$

Die Anteile, die von dem inneren Bereich B_i herrühren, formen wir in der folgenden Weise durch partielle Integration um, wobei wir vor-

aussetzen, daß die Funktion $\varphi_2^{(0)}$ stetig differenzierbar und n die nach außen gerichtete Normale der Randkurve ist:

$$-\frac{\partial}{\partial y_j}\int_C \sigma\varphi_2^{(0)}\Phi\cos(n\xi_2)\,ds+\frac{\partial}{\partial y_j}\iint_{B_i}\sigma\frac{\partial\varphi_2^{(0)}}{\partial\xi_2}\Phi\,dF$$

$$=-\int_C \varphi_2^{(0)}\cos(n\xi_2)\frac{y_j-\xi_j}{r(r+y_1)}(1-e^{-\sigma(r+y_1)})\,ds$$

$$+\iint_{B_i}\frac{\partial\varphi_2^{(0)}}{\partial\xi_2}\frac{y_j-\xi_j}{r(r+y_1)}(1-e^{-\sigma(r+y_1)})\,dF.$$

Der Grenzübergang $\mu \to 0$ ergibt:

$$-\int_C \varphi_2^{(0)}\cos(n\xi_2)\frac{y_j-\xi_j}{r(r+y_1)}\,ds+\iint_{B_i}\frac{\partial\varphi_2^{(0)}}{\partial\xi_2}\frac{y_j-\xi_j}{r(r+y_1)}\,dF$$

$$=-\frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\int_C \varphi_2^{(0)}\cos(n\xi_2)\lg(r+y_1)\,ds-\iint_{B_i}\frac{\partial\varphi_2^{(0)}}{\partial\xi_2}\lg(r+y_1)\,dF\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_j}\iint_{B_i}\varphi_2^{(0)}\frac{y_2-\xi_2}{r(r+y_1)}\,dF.$$

Wir erhalten also schließlich unter den oben angegebenen Voraussetzungen:

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial}{\partial y_j}\iint\varphi_2^{(0)}\frac{y_2-\xi_2}{r(r+y_1)}(1-e^{-\sigma(r+y_1)})\,dF$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_j}\iint\varphi_2^{(0)}\frac{y_2-\xi_2}{r(r+y_1)}\,dF.$$

In dieser Gleichung darf der Index 2 auch durch 3 ersetzt werden. Wir haben jetzt die drei ersten Integrale des unter **5** gegebenen Ausdruckes der u_j untersucht. Die beiden letzten Integrale werden gleich Null. Mit Anwendung der durch (18) erklärten Funktion φ kann man das Resultat folgenderweise aussprechen. Bei verschwindendem μ sind die Geschwindigkeitskomponenten in R_h gleich

$$u_j=4\pi\varphi_j^{(0)}(y_2,y_3)+\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}. \tag{20}$$

Eine ähnliche Rechnung wie die, welche am Ende der Abteilung **5** ausgeführt wurde, ergibt mit Anwendung von (15) und (18)

$$\lim_{y_1\to -0} u_1=U. \tag{21}$$

Aus (14), (16) und (18) erhält man

$$\lim_{y_1\to -0} u_2=\lim_{y_1\to -0} u_3=0. \tag{22}$$

Aus (20) folgt, daß in dem von der Scheibe durchschrittenen Gebiet die Bewegung nur dann eine wirbelfreie wäre, wenn die $\varphi_j^{(0)}$, die Lösungen der Gl. (15), (16), (14), wirbelfrei wären, was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Es hat sich also ergeben, daß eine wirbelfreie Grenzbewegung bei $\mu \to 0$ unmöglich ist. Da die klassische Theorie der idealen Flüssigkeiten, bei denen ja $\mu = 0$ ist, Wirbelfreiheit voraussetzt, sind wir also zu einem Widerspruch gegen diese Theorie gelangt. Der Widerspruch löst sich aber auf, wenn man noch die unendlich dünne, aber dafür unendlich stark wirbelnde Grenzschicht an der Körperoberfläche berücksichtigt, wie man durch Nachprüfung finden kann. Unsere Rechnung hat also die Frage nach dem Charakter der Grenzbewegung nicht streng mathematisch entscheiden können.

7. Die kreisrunde Scheibe. Die durch Gl. (12) erklärte Funktion $\varkappa^{(0)}$ ist bisher nur bis auf eine beliebige additive Konstante festgelegt. Wenn die Scheibe kreisrund ist, können wir uns von vornherein auf den Fall beschränken, daß die Funktion $\varkappa^{(0)}(\xi_2, \xi_3)$ nur von der Entfernung vom Mittelpunkt der Scheibe abhängt, d. h. auf den rotationssymmetrischen Fall. Dann hat $\varkappa^{(0)}$ an der Kante der Scheibe einen konstanten Wert, den wir gleich Null setzen können. In diesem Falle ist es möglich, den Ausdruck (18) der Funktion φ zu vereinfachen. Wir führen die Polarkoordinaten R, ϑ mittels der Transformation $\xi_2 - y_2 = R\cos\vartheta$, $\xi_3 - y_3 = R\sin\vartheta$ ein und erhalten

$$\varphi = -\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} - \iint \left\{ \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2} R\cos\vartheta + \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_3} R\sin\vartheta \right\} \frac{R\, dR\, d\vartheta}{\sqrt{R^2 + y_1^2}\,(\sqrt{R^2 + y_1^2} + y_1)}.$$

Im durchschrittenen Gebiet R_h ist y_1 negativ. Daher ist bei kleinen Werten von R der Ausdruck $\sqrt{R^2 + y_1^2} + y_1$ annähernd gleich $R^2/(2\,|\,y_1\,|)$. Der Integrand bleibt deshalb auch für $R = 0$ endlich. Daher kann im letzteren Doppelintegral eine unendlich kleine Kreisfläche um den Punkt $(0, y_2, y_3)$ von dem Integrationsbereich ausgeschlossen werden. Wenn der Halbmesser der Kreisfläche gleich ε ist und die Peripherie C genannt wird, so erhalten wir also, wenn wir zu den alten Koordinaten zurückkehren:

$$\varphi = -\iint \frac{\varphi^{(0)}\, dF}{r} - \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{B_a} \left\{ \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_2}(y_2 - \xi_2) + \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial \xi_3}(y_3 - \xi_3) \right\} \frac{dF}{r(r + y_1)}.$$

Dabei ist B_a der außerhalb von C gelegene Teil des ursprünglichen Integrationsbereiches, d. h. der einen Seite der Scheibe. Durch eine

partielle Integration [1. Bd., S. 13 und 23] erhalten wir, da $\varkappa^{(0)}$ an der Kante der Scheibe verschwindet,

$$\varphi = -\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} - \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{B_a} \varkappa^{(0)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}\right] \lg(r + y_1)\, dF$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_C \varkappa^{(0)} \left[d\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - d\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3}\right] \lg(r + y_1).$$

Der Kreis C wird in negativer Richtung durchlaufen. Da

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}\right) \lg(r + y_1) = 0,$$

$$\left(d\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - d\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3}\right) \lg(r + y_1) = -\frac{R^2\, d\vartheta}{r(r + y_1)}$$

ist, so findet man

$$\varphi = -\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} + \lim_{\varepsilon \to 0} \iint \varkappa^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \lg(r + y_1)\, dF - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \varkappa^{(0)} \frac{2 R^2\, d\vartheta}{R^2}$$

$$= -\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} - \iint \frac{\varkappa^{(0)} y_1\, dF}{r^3} - 4\pi \varkappa^{(0)}(y_2, y_3).$$

Wenn wir die neue Potentialfunktion

$$A = -\iint \frac{\varphi_1^{(0)}\, dF}{r} - \iint \frac{\varkappa^{(0)} y_1\, dF}{r^3} \tag{23}$$

einführen, so gilt $\varphi = A - 4\pi \varkappa^{(0)}$ und also nach (20) und (14)

$$u_1 = 4\pi \varphi_1^{(0)}(y_2, y_3) + \frac{\partial A}{\partial y_1}, \quad u_2 = \frac{\partial A}{\partial y_2}, \quad u_3 = \frac{\partial A}{\partial y_3}. \tag{24}$$

Diese Ausdrücke gelten im durchschrittenen Gebiet R_h. Im Außengebiet gilt $\varphi = A$ und daher nach (17)

$$u_i = \frac{\partial A}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{25}$$

Der Wirbel hat die Komponenten (S. 753 f.) $\partial u_j / \partial y_i - \partial u_i / \partial y_j$. Man findet nun, daß der Wirbel im Außengebiet gleich Null ist und im durchschrittenen Gebiet die Komponenten

$$0, \quad 4\pi \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y_3}, \quad -4\pi \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y_2}$$

hat. Die beiden letzten Komponenten sind, wie eine Berechnung zeigt, von Null verschieden. Die gesuchte Grenzbewegung ist also eine Potentialbewegung, über die sich im durchschrittenen Gebiet eine Wirbelbewegung lagert.

8. Über den Grund des Widerstandes. Nach der Erklärung (6a) der Funktion φ_1 ist $8\pi\mu\sigma\varphi_1 = (\tau_{n1})_{\text{Vorderseite}} + (\tau_{n1})_{\text{Hinterseite}}$. Nach § 1, **6** ist $\tau_{ni} = -p n_i + \mu \frac{\partial u_i}{\partial n}$ die Spannung, mit welcher die Flüssigkeit auf den Körper wirkt. Da aber hier umgekehrt die Wirkung des Körpers auf die Flüssigkeit in Frage kommt, so gilt an der Vorderseite der Scheibe $\tau_{n1} = p - \mu \frac{\partial u_1}{\partial y_1}$. Bei endlicher Reibung sind $u_2 = u_3 = 0$ an der Scheibe. Daher sind dort die beiden letzten Glieder der Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3}$$

gleich Null. Also muß auch das erste Glied gleich Null sein. So findet man

$$(\tau_{n1})_{\text{Vorderseite}} = p_{\text{V}}, \quad (\tau_{n1})_{\text{Hinterseite}} = -p_{\text{H}},$$

wobei p_{V} und p_{H} den Druck an der Vorder- bzw. Hinterseite bezeichnen. Die hieraus folgende Gleichung

$$8\pi\mu\sigma\varphi_1 = p_{\text{V}} - p_{\text{H}} \tag{26}$$

ist, da $2\mu\sigma = \varrho U$ ist, von der Reibung unabhängig. Die y_1-Komponente des Impulses, welchen die Scheibe der Flüssigkeit pro Zeiteinheit erteilt, ist

$$\iint (p_{\text{V}} - p_{\text{H}})\, dF.$$

Das wirbelnde Gebiet, welches wir bei verschwindender Reibung gefunden haben, nimmt pro Zeiteinheit um U Längeneinheiten zu. Die y_1-Komponente des Impulses eines so großen Teiles des Wirbelgebietes ist in größerer Entfernung hinter der Scheibe, wo nach (24) $u_1 = 4\pi\varphi_1^{(0)}$ ist, gleich

$$\iint \varrho U \cdot 4\pi\varphi_1^{(0)}\, dF = \iint (p_{\text{V}} - p_{\text{H}})\, dF.$$

Der Widerstand gegen die Bewegung der Scheibe in einer reibungsfreien Flüssigkeit beruht also darauf, daß zur Erzeugung des Wirbelgebietes hinter der Scheibe Impuls verbraucht wird[1]).

Die obenstehende Rechnung läßt sich leicht mit Berücksichtigung der unendlich starken Rotation in der Grenzschicht vertiefen.

Dieser Satz ist zuerst von Zeilon gefunden worden. Unabhängig davon hat Filon[2]) einen ähnlichen Satz für zähe Flüssigkeiten bewiesen.

9. Die Ergebnisse der Rechnung. Die Bewegung, die den Gl. (2)

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial y_1} - \frac{\partial q}{\partial y_j} = 0, \quad \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial y_j} = 0$$

[1]) Da nach der in Kap. XX enthaltenen Theorie bei idealen Flüssigkeiten keine Wirbel entstehen können, ergab sich auch dort kein Widerstand gegen gleichförmig geradlinige Bewegung eines Körpers durch die Flüssigkeit (vgl. S. 768, 798), was der Erfahrung widerspricht.

[2]) Filon, Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 7—27, 1926.

mit den Randbedingungen:

an einer ebenen Scheibe in der $y_2 y_3$-Ebene: $u_1 = U$, $u_2 = u_3 = 0$,
in unendlicher Entfernung: $u_j = 0$

genügt, konvergiert bei abnehmender Reibung (μ) überall, mit Ausnahme des Raumgebietes, durch welches sich die Scheibe bewegt hat, gegen eine Potentialbewegung, in dem durchschrittenen Raumgebiet aber gegen eine Wirbelbewegung. In der Grenzbewegung gleitet die Flüssigkeit an der Vorderseite der Scheibe, haftet aber an der Rückseite derselben.

Entsprechende Sätze lassen sich auch für beliebig geformte Körper in beliebiger Bewegung beweisen [1]).

Es hat sich bei unserer Berechnung allerdings eine Bewegung ergeben, welche die vollständigen Differentialgleichungen nicht erfüllen kann, weil die Bewegung wirbelig ist, während die Rückwirkung des Wirbels auf die Strömung von uns vernachlässigt wurde. Unsere Bewegung kann also nie verwirklicht werden. Es ist sehr befriedigend, daß die oben gefundene regelmäßige Wirbelbewegung ungefähr den richtigen Raum hinter dem Körper erfüllt. Sie weicht aber sonst stark von der in der Wirklichkeit vorhandenen turbulenten Kielwasserbewegung ab.

Diese Theorie ergibt in durchgerechneten Fällen eine annähernd richtige Druckverteilung an der Vorderseite des Körpers. Auch bei einer unendlich langen Platte (Zeilon) und bei einem unendlich langen Zylinder [2]) *mit Joukowskiprofil (S. 770) ergibt sich eine Zirkulation und also auch ein Auftrieb von annähernd richtiger Größenordnung.*

Lehrbücher.

W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900.
M. Brillouin, Leçons sur la viscosité. Paris 1907.
H. Lamb, Hydrodynamics, 5th ed. Cambridge 1924.
H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch nach der dritten englischen Auflage von J. J. Friedel. Leipzig 1907.
C. W. Oseen, Neuere Methoden und Ergebnisse der Hydrodynamik. Akad. Verlagsges., Leipzig 1927.
L. Hopf, Zähe Flüssigkeiten, in: Handbuch der Physik. Herausg. von Geiger und Scheel. Bd. 7. Berlin 1927.

---

[1]) C. W. Oseen, Neuere Methoden usw.
[2]) T. Gustavsson, Arkiv f. mat., astr. o. fys., Bd. 20 A, 1927.

Register.

Abbildung, konforme 295ff., 297ff., 645ff., 764ff.
Abkühlung durch eine Flüssigkeitströmung 249ff.
— eines erwärmten Körpers 209.
— — Prismas 244.
Abschattungsfaktor 594.
Abschirmung, elektrische 300.
Aerostatisches Gesetz 257.
Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie 561.
d'Alembertsches Prinzip 7ff., 95.
Amperesche Molekularströme 358, 432.
— sches Gesetz 351.
Angepaßte kanonische Veränderliche 36, 148ff.
Anode 313.
Anodenspannung 313.
Anodenstrom 313.
Anomalie, exzentrische 161.
—, mittlere 161.
Anstellwinkel 119, 771.
Antenne, elektrische 542ff.
—, magnetische 563ff.
Antennendipol 570.
Äther 402.
Atmosphäre, Einfluß auf die drahtlose Telegraphie 583ff.
Atommechanik 156ff.
Aufgezwungene Konvektion 249ff.
Auftrieb einer Tragfläche 122, 768ff., 781f.
Ausstrahlung eines schwingenden Dipols 421.

Babinetsches Prinzip 440.
Bahnelemente 157.
—, elliptische 162.
—, kanonische 162.
Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme 23ff.
—, verschiedene Arten von 25ff.
Bahnlinien von Flüssigkeiten 750.
Beanspruchung ebener Platten 652ff.
Bernouillische Gleichung für Flüssigkeiten 757.
Berührungstransformationen 31ff.
Beständige Bewegung 76.
Beugung 433ff.
— an einem Spalt 483.
— — — Zylinder 494.
— — einer rechteckigen Öffnung 481.
— — Kugeln 495ff.
— der Materie 487.
Bewegung, beständige 76.
—, — des Flugzeuges 123ff.
—, ebene einer Flüssigkeit 754f., 762ff.
— eines festen Körpers durch eine ideale Flüssigkeit 798ff.
— eines festen Körpers durch eine zähe Flüssigkeit 824ff.
— eines Massenpunktes im Schwerefeld 2.
— eines Massenpunktes im Schwerefeld mit Luftreibung 2ff.
—, permanente 76.
—, wirbelfreie einer Flüssigkeit 759f., 762ff.
Bewegungsgleichungen des Flugzeuges 119ff.
— — Massenpunktes, Newtonsche 1ff.
— — — in Polarkoordinaten 11.
— eines elastischen Körpers 625ff.
—, Hamiltonsche 29ff.
— im rotierenden Bezugssystem 11ff.
—, Lagrangesche 8ff.
— reibender (zäher) Flüssigkeiten 817ff.
— — Flüssigkeiten, exakte Lösungen 832ff.

Bewegungsgleichungen reibungsfr. Flüssigkeiten 755ff.
— starrer Körper 90ff.
— von Systemen freier Massenpunkte 4.
Bewegungsgröße 4.
Bezugspunkt des Drehmomentes 95.
Biegung eines Stabes 632ff.
Biegungsmoment 636.
Blanker Körper 434.
Bodenbeschaffenheit, Einfluß auf die drahtlose Telegraphie 561ff.
Bodenwellen 563.
Bohrsches Korrespondenzprinzip 61.
Brillouinscher Diffusionsversuch 209ff.
Brownsche Bewegung 195ff.
— — im Schwerefeld 257ff.

Castiglianosches Prinzip 621ff.
Charakteristik einer Glühkathodenröhre 313.
Christoffelsche Symbole 10.
Corioliskraft 12.
Cornusche Spirale 473ff.
Couettesche Strömung 837.
Coulombsches Gesetz 267.

Dämpfung elastischer Schwingungen 83.
— von Drahtwellen 531.
Dämpfungsfaktor einer Antenne 594.
Dämpfungsfläche eines Flugzeuges 121.
Dämpfungsmoment eines Flugzeuges 125.
Deformationsgeschwindigkeit 751.
Dehnung, elastische 606.
— eines Zylinders 632.
Dehnungsgeschwindigkeit 752.
Delaunaysche Transformation 34.
Deltaoperation, vierdimensionale 404.
Diamagnetische Körper 348.
— —, Energie im magnetischen Felde 364ff.
Dielektrikum 268.
Dielektrische Leitfähigkeit 348.
Dielektrischer Körper, Energie im elektrischen Felde 363ff.
Dielektrizitätskonstante 268.
Differentialgleichungen, Cauchy-Riemannsche 755.
— der Bahnkurven 21ff.
— — — eines Massenpunktes 27.
— — — der Zentralbewegung 28.
— — Diffusion 185ff.
— — Flugzeugbewegung 119ff.
Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen 76, 78ff.
— — schwingenden Membran 701ff.
— — — Saite 678.
— — sekularen Störungen 138ff.
— — Wärmeleitung 189ff.
—, linearisierte der zähen Flüssigkeiten 819ff., 824ff.
—, Newtonsche, der Mechanik 1ff.
Differentialgleichung, Hamilton-Jacobische, partielle 37ff.
—, Laplacesche 182, 270, 753.
Diffusion in strömenden Gasen 256ff.
— ohne Einwirkung äußerer Kräfte 182ff.
— unter dem Einfluß äußerer Kräfte 248, 256ff.
— von Elektrolyten 194, 261ff.
Diffusionskoeffizient 184.
Diffusionswellen 229.
Dipol, elektrischer 422.
—, magnetischer 431, 563.
Doppelquelle 793f.
Draht, Temperaturverteilung in einem stromdurchflossenen 240.
Drahtlose Telegraphie 541ff.
— — um die Erde 683ff.
Drahtwellen 526ff.
Drahtwellen im Nichtleiter 536ff.
Drall 801.
Drehimpuls 5.
Drehmoment 5.
Drehungsvektor des starren Körpers 92.
— einer Flüssigkeit 752.
Dreielektrodenröhre 313.
Dreiindizessymbole 10.
Dreikörperproblem 170ff.
Durchgriff 313ff.

Effektiver Strom (Spannung) 398.
Ehrenhaftsche Versuchsanordnung 259.
Eigenfrequenzen eines mechanischen Systems 80.
Eigenfunktionen einer schwingenden Membran 718ff.
Eigenschwingungen eines mechanischen Systems 80.
Eigentliche Winkelvariable 54.
Eigenwerte einer schwingenden Membran 718ff.
Eigenzeit 417.
Eikonal 485.

Eindruck eines Stempels in eine Unterlage 669ff.
Elastische Schwingungen als mehrfach periodisches System 55ff.
— —, Störungen derselben 140ff.
Elastizitätsmodul 610.
Elastizitätstheorie 598ff.
Elektrische Bilder 272ff.
— Strömung, stationäre 321ff.
Elektrodynamische Kraft 412.
Elektromagnetisches Feld, stationäres 351.
Elektromagnetische Schwingungen 391ff.
Elektron 401.
Elektronentheorie 400ff.
Elektrostatik 267ff.
Elementarquantum, elektrisches 401.
Ellipsoid im magnetischen Felde 357ff.
—, Jacobisches 740f.
—, Mac Laurinsches 737ff.
—, Verteilung der Elektrizität auf einem 273ff.
Empfänger für drahtlose Telegraphie 541.
Energieausdruck 49.
— für entartete Systeme 53ff., 135ff.
— — gestörte Systeme 148ff.
— — unharmonische Schwingungen 153ff.
Energie, ausgestrahlte 426ff.
— der schwingenden Saite 694ff.
Energieintegral für ein System freier Massenpunkte 6.
— in generalisierten Koordinaten 12.
Energiekriterium der Stabilität 72ff.
Energiesatz bei Flüssigkeiten 757.
Entartung mehrfach periodischer Systeme 57ff.
Erdkruste, Alter der 237.
Erdleitung 325ff.
Erdungswiderstand 325.
Erstpassagezeiten bei Brownscher Bewegung, einseitige 211.
— bei Brownscher Bewegung, doppelseitige 215.
Erzwungene Saitenschwingung 698ff.
— Schwingungen von Systemen von n Freiheitsgraden 84ff.
— Wärmeleitung und Diffusion 246ff.
Eulersche Bewegungsgleichungen des starren Körpers 96ff.
— — einer Flüssigkeit 757.
Eulerscher Fall der Bewegung des starren Körpers 113.
Eulersche Winkel 91.

Felddarstellung durch komplexe Variable 295ff.
Feld einer bewegten Ladung 419ff.
—, elektrisches 267.
—, elektromagnetisches an der Oberfläche eines guten Leiters 503ff.
—, elektromagnetisches an der Oberfläche eines mäßig guten Leiters 505ff.
—, elektromagnetisches eines Drahtes 511ff.
—, magnetisches 348.
Feldenergie im statischen Felde 361.
— — quasistationären Felde 369ff.
Felder, elektrostatische, zylindrische 288ff.
Feldgleichungen, elektromagnetische 269ff.
Feldstärke, elektrische 267.
—, magnetische 348.
Ferromagnetische Körper 348.
Figurenachse 110.
Flächenintegral 5.
Flugzeugbewegung 118ff.
Flüssigkeiten, ideale 734ff.
— mit Reibung 810ff.
Formänderungsarbeit 617ff.
Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Drahtwellen 529.
Fraunhofersches Beugungsphänomen 481.
Freie Wärmeleitung und Diffusion 177ff.
Fresnel-Kirchhoffsche Beugungstheorie 476ff.
Fresnelsche Beugungsphänomene 481.
Fresnelscher Doppelspiegel 450.
Fresnelsches Integral 473.
Fundamentalintegrale der Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeiten 820ff., 824ff.
Funktionengruppe 19.
Funktion, Hamiltonsche 16.
—, Lagrangesche 12.
—, Routhsche 17.

Gaußsches Fehlergesetz 261.
Gelochter Zugstab 662.
Generalisierte Impulskomponenten 9.
— Koordinaten 9.
— Kraftkomponenten 9.
Geodätische Bahnkurven 24.
Geometrische Optik 433.
— —, ihr Verhältnis zur Wellenoptik 484ff.
Geschwindigkeitsfunktion, komplexe 763.
Geschwindigkeitsmotor 98.

Geschwindigkeitspotential 752.
Gitter der Glühkathodenröhre 314.
Gleichgewicht, elastisches 631ff.
— von Flüssigkeiten 734ff.
Gleichgewichtsgestalt rotierender Flüssigkeitsmassen 737ff.
Gleichgewichtslagen als singuläre Punkte 6ff.
Gleichrichterwirkung der Glühkathodenröhren 314.
Gleichstrom 321.
Glühkathodenröhre 313ff.
Greensche Funktion 478.
Greenscher Satz 272, 476.
Grenzschichtentheorie 838ff.
—, Beziehungen zu den exakten Lösungen 841f.
Grundfrequenzen 53.
Grundton einer Saite 680.
Gruppengeschwindigkeit 487, 790ff.

Haltepunkt 26.
Hamels Lösungen der Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeiten 832ff.
Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung 37ff., 486.
Hamiltonsche Bewegungsgleichungen 16.
— —, Transformationstheorie 29ff.
— Funktion 16.
Hamiltonsches Prinzip 14.
Hauptdehnungen 609.
Hauptkoordinaten 82.
Hauptschwingungen 80, 82.
Hauptträgheitsachsen 97.
Hauptträgheitsmoment 97.
Hauptverzerrungsrichtungen 609.
Heavisideschicht 583, 596.
Heizkörper, Wärmestrahlung von 241.
Helmholtzsche Wirbelsätze 761f.
Hermitesche Polynome 206ff.
Hertzscher Vektor 421.
Himmelsblau 429.
Himmelsmechanik 156ff.
Höhenformel, barometrische 735f.
Holonome Systeme 9.
Hookesches Gesetz 610ff.
Horizontalantenne 541, 563ff.
Huyghenssches Prinzip 479ff.
Hysterese, magnetische 348.

Impedanz 375.
Impuls, translatorischer 4.
Impulsintegral in rechtwinkligen Koordinaten 4.
— — generalisierten Koordinaten 13.
Impulsmotor 99.
Impulssatz bei Flüssigkeiten 757ff., 816f.
Induktion, magnetische 348.
Induktionsgesetze von Faraday 372ff.
Influenzladung 279.
Integrale der Bewegungsgleichungen freier Massenpunkte 4ff.
— — — von Hamilton 17ff.
Integralgleichung der schwingenden Membran 716ff.
— — — Saite 693.
— — Wärmeleitung und Diffusion 203ff.
— für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit 845ff.
— — — Erdströme 325ff.
— — — Flüssigkeitsströmung um einen Rotationskörper 796, 798.
Integralinvarianten 29ff.
Integration der Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen 78ff.
Intensitätsgrößen 406.
Invarianz der Hamiltonschen Gleichungen 32.
— — Maxwellschen Feldgleichungen 403.
Involutionssystem 20ff., 67.
Isothermen 198ff.

Jacobische Identität 19.
— Integrationstheorie in der Mechanik 36.
Jacobisches Ellipsoid 740f.
Joukowskischer Satz 768.
Joukowskisches Profil 770.
Joulesche Wärme 240, 392.

Kalorie 178.
Kanonische Gestalt der Bewegungsgleichungen 16.
— Transformationen 32.
— Zustandsgrößen 16, 35.
Kapazität eines Leiters pro Längeneinheit 377.
—, gegenseitige 273.
—, — pro Längeneinheit 290.
Kapazitätsgleichungen von Maxwell 294.
Kapazitätskoeffizienten 287ff.
Kapillarität 743ff.
Kapillarwellen 788ff.
Keplerbewegung 156ff.

Keplerbewegung, Störung durch ein elektrisches Feld 167ff.
—, — — eine Zentralkraft 166ff.
Kinematische Differentialgleichungen des starren Körpers 97.
Kirchhoffsche Beugungstheorie 476ff.
— Gesetze der Stromverteilung 322.
Klammerausdruck, Poissonscher 18.
Klangfarbe einer Saite 680.
Knotenlinie bei der Planetenbewegung 91.
Knotenlinien einer schwingenden Membran 707ff.
Kolloidale Teilchen, Farben von 499.
Komplementärer Schirm 438.
Kompression 631.
Kondensatorplatten endlicher Breite 307ff.
— unendlicher Breite 302.
Konjugiert-kanonische Veränderliche 35.
Kontinua, Mechanik der 598ff.
Kontinuitätsgleichung der Flüssigkeitsströmung 750.
Konvektionsströmung, erzwungene 249ff.
—, spontane 263ff.
Konzentrationsgefälle 183.
Körperfestes System 90.
Korrespondenzprinzip 61.
Kowalewskischer Fall der Bewegung des starren Körpers 113.
Kräfte auf einen durch eine ideale Flüssigkeit bewegten Körper 766ff., 804ff.
Kraftlinien, magnetische 355.
Kraftmotor 98.
Kreisel, kräftefreie Bewegung 110.
— im Schwerefeld 113ff.
Kugel im Magnetfeld 354ff.
Kugelkondensator 273.
Kugelkreisel 111.
Kugeln, geladene 281ff.
Kugelwellen 397, 493ff.
Kühler 254ff.

Ladung, elektrische 267ff.
—, —, freie 269.
—, —, wahre 268.
Lagrangesche Bewegungsgleichungen 8ff.
— — des starren Körpers 102ff.
— Funktion 12.
— Methode der Variation der Konstanten 129ff.
Lagrangescher Fall der Bewegung des starren Körpers 113.
Lambertsches Gesetz 479.
Laminarströmung 812.
Längsbewegung des Flugzeuges 119ff.
Längsstabilität des Horizontalflugs 125ff.
Laplacesche Differentialgleichung 182, 270, 753.
Laplacetransformation 225ff.
Latenszeit 417.
Lechersches Drahtsystem 527, 540.
Leiter, elektrischer 268.
Leitfähigkeit, elektrische 323.
Levi-Civitás Begriff der quasistatischen Bewegung 65ff.
Libration 156.
Liénard-Wiechertsche Näherung 416.
Linearantenne 431.
Logarithmisches Potential 288.
Longitudinale Saitenschwingungen 678.
Lorentztransformation 402ff.
—, spezielle 408ff.
Loschmidtsche Zahl 185, 262.
Luftwiderstand des Flugzeuges 122.

Mac Laurinsches Ellipsoid 737f.
Magnetische Doppelfläche 351.
— Felder 348.
Magnetischer Fluß 348.
Magnetisches Moment 349ff.
Magnetisierung 401.
Magnetostatik 348ff.
Marconisender, geknickter 563, 567, 569.
Massenpunkt, freier 1.
Massenvergrößerung, scheinbare bei Bewegung durch eine Flüssigkeit 804ff.
Maxwellsche Feldgleichungen 391.
— Theorie 391ff.
Mehrfach periodische Systeme 49ff.
— — —, Störungstheorie 131ff.
Membran, Schwingungen einer 701ff.
—, — — elliptischen 727ff.
—, — — kreisförmigen 709ff.
—, — — rechteckigen 704, 730ff.
Minimalprinzipe der Elastizitätstheorie 617ff.
Mittleres Verschiebungsquadrat bei der Brownschen Bewegung 196.
Motorrechnung 98ff.

Nebenwellen an Drähten 535ff.
Newtonsche Bewegungsgleichungen 1.
Newtonsches Abkühlungsgesetz 180.

Nobilische Ringe 336ff.
Normalspannungen 599.
Nutation des schweren Kreisels 116ff.
Nutenfeld 303.

Oberflächengestalt von Flüssigkeiten 736f.
Oberflächenwellen einer Flüssigkeit 786ff.
— in der drahtlosen Telegraphie 553ff.
— längs Leitern 501.
Obertöne einer Membran 705.
— — Saite 680.
Ohmscher Widerstand 322.
Ohmsches Gesetz 322.
Oseens Form der Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeit 819, 821ff.
Oskulierende Bewegung 130.
Osmose 183.
Osmotischer Druck 183.

Paramagnetische Körper 348, 352ff.
— —, Energie derselben im Magnetfeld 364ff.
Pendelartige Bewegungen 46.
Pendelschwingungen des starren Körpers 117ff.
Perihelbewegung 167.
Perihellänge 157.
Perioden, angenäherte 56ff.
Periodische Bewegungen des starren Körpers 107ff.
— Störungen 134.
Periodizitätseigenschaften der Separationsvariabeln 45ff.
Permanente Bewegung 76.
— — des Flugzeuges 123ff.
— Magnete 349ff.
Permeabilität 348.
Phasengeschwindigkeit 791.
Phasenraum 30.
Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom 375.
Phygoidbewegung des Flugzeuges 126ff.
Poiseuillesches Gesetz 812f.
Poissonscher Klammerausdruck 18.
Poissonsches Theorem 30.
Polarisation, dielektrische 401.
—, elektrolytische 339ff.
Polarisationsebene 435.
Polarkoordinaten, räumliche 11.
Pole, magnetische, rechteckige 303ff.
Polreihe, magnetische 310.
Ponderomotorische Kraft, elektromagnetische 412.
Potentiale, elektromagnetische 402.
Potentialfunktion einer Flüssigkeit 762.
—, elektrische 268.
Potentialströmung, ebene 762ff.
—, — mit Unstetigkeitsflächen 775ff.
—, räumliche 792ff.
— um einen Umdrehungskörper 794ff.
Poyntingscher Satz 393.
— Vektor 393.
Prandtlsche Grenzschichtentheorie 840.
Präzession, pseudoreguläre des schweren Kreisels 116.
—, reguläre des kräftefreien Körpers 111.
—, — — schweren Kreisels 113ff.
Prinzip, d'Alembertsches 7ff.
— der kleinsten Wirkung 16.
— — virtuellen Verschiebungen in der Elastizitätstheorie 618ff.
—, Euler-Jacobisches 16.
—, Hamiltonsches 14.
Prismatische Leiter 297ff.

Quantentheorie 60, 432.
Quantitätsgrößen 406.
Quasistationäre Stromkreise 369ff.
— Wellen in Leitern 375ff.
— — — Spulen 385ff.
Quasistatische Bewegungen im allgemeinen 62ff.
— — beim Dreikörperproblem 174ff.
— — des kräftefreien starren Körpers 109ff.
— — — schweren Kreisels 113ff.
— — nach Routh 64ff.
— — — Levi-Civitá 63ff.
Quellen einer Strömung 763, 792ff.
Quellenintegral der Wärmeleitungsgleichung 189.
Querkontraktionszahl 6.

Radiusvektor, vierdimensionaler 416.
Rahmenantenne 431, 541, 563.
Randwinkel 744.
Raumfestes System 91.
Raumladung 317.
Raumwellen in der drahtlosen Telegraphie 553ff.
Rayleighsches Gesetz 429.
Reduktionskraft 11.
Reflektierende Wand bei der Diffusion 231ff.

Reibung, unendlich kleine in einer Flüssigkeit 842ff.
Reibungslose Flüssigkeitsströmung, Wärmeleitung bei derselben 249ff.
Relativbewegung 11.
Relativitätstheorie 409, 412.
Resonanz 87, 699.
Resonanzkurve 86.
Retardiertes Potential 419ff.
Reziproke Funktion 16.
Reziprozitätstheorie in der drahtlosen Telegraphie 575ff.
Richardsonsche Gleichung 317.
Richtwirkung von Antennen 563, 569.
Riemannsche Fläche 441ff.
— Räume 436ff.
Ritzsches Verfahren 726.
Rouths Begriff der quasistatischen Bewegung 64.
— Energiekriterium der Stabilität 72ff.
Routhsche Funktion 17.

Saint-Venantsches Prinzip 633.
Saite, schwingende 675ff.
—, —, endlose 683ff.
Sattelpunkt 7.
Sättigung, magnetische 348.
Schattengrenze 468.
Schiebungsgeschwindigkeit 752.
Schubmodul 612.
Schubspannungen 599.
Schwarzer Körper 434.
Schwarzsches Abbildungsverfahren 297.
Schwerpunkt 5.
Schwerpunktssatz 5.
Schwingungen als Stabilitätskriterium 89.
— einer Membran 701ff.
—, elastische von einem Freiheitsgrad 83.
—, elektromagnetische 391ff.
—, erzwungene 84ff.
—, gekoppelte von Stromkreisen 374.
—, kleine des Flugzeuges 123ff.
—, nichtharmonische 140ff., 153ff.
— um eine beständige Bewegung 75ff.
— — — Gleichgewichtslage 80ff.
— von Stromkreisen 373ff.
Sechservektor 404ff.
Sedimentation 257ff.
Sekulare Glieder 134.
— Störungen 138ff.
Sekulargleichung 81, 109.
Selbstinduktion einer Spule 524ff.
Selbstinduktion eines Drahtes 517.
— — Leiters pro Längeneinheit 377.
Selbstinduktionskoeffizient 372.
Semipermeable Wand 186.
Sender für drahtlose Telegraphie 541.
Senken einer Strömung 763.
Separation der Veränderlichen bei der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung 38ff.
Separationsvariable 45.
Sichtbare Parameter 261.
Singuläre Punkte der Bewegungsgleichungen 6ff.
Skineffekt 321, 499ff., 50.
Skleronome Systeme 9.
Spannungen an der Grenze zwischen Flüssigkeit und festem Körper 818.
—, elastische 599.
— in zähen Flüssigkeiten 811f.
Spannungs-Deformationsgleichungen in zähen Flüssigkeiten 814f.
Spannungs-Dehnungsgleichungen in elastischen Körpern 612.
Spannungsfunktion, elastische 652ff.
Spannungshauptachsen 604ff.
Spannungstensor in elastischen Körpern 603.
— in zähen Flüssigkeiten 811f.
Spiegelung elektrischer Ladungen 277ff.
Spitzenwirkung 300.
Spule, Wechselstrom führende 518ff.
Stabile Gleichgewichtslage eines Massenpunktes 7.
Stabilisierungsmoment des Flugzeuges 125.
Stabilität der Bewegung 71ff.
— — Rotation des starren Körpers 110.
—, dynamische des Flugzeuges 126.
—, Energiekriterium derselben 72ff.
— rotierender Flüssigkeitsmassen 742f.
—, statische des Flugzeuges 125ff.
Stabilitätskriterium der kleinen Schwingungen 89.
Stabschwingungen 700ff.
Stäckels Bedingungen für die Separation der Veränderlichen 40.
Starre Körper 90ff.
— —, allgemeine Bewegungsgleichungen 102.
— —, Bewegung im Schwerefeld 111ff.
— —, Bewegungsgesetze 94.
— —, Eulersche Bewegungsgleichungen 96.
— —, Geschwindigkeitskoordinaten 92.

Starre Körper, kräftefreie Bewegung 103ff.
— —, Lagekoordinaten 90.
— —, Lagrangesche Bewegungsgleichungen 102ff.
Stationäre Flüssigkeitsströmung 750.
Statistische Mechanik, Zusammenhang mit der Diffusion 260ff.
Stehende Wellen längs Leitern 378.
Steighöhe, kapillare 746.
Steuerelektrode 313.
Stokessche Form der Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeit 820f.
Stokessches Widerstandsgesetz 185, 826ff.
Störungen elastischer Schwingungen 140ff.
— entarteter Systeme 135ff., 151ff.
—, periodische 134.
—, sekulare 134.
Störungsfunktion 128.
—, sekularer Teil 136.
—, zeitabhängige 149ff.
Störungstheorie 127ff.
Strahlbildung in einer Flüssigkeit 782ff.
Strahlenoptik 433.
Strahlungsvektor 392.
Streuung des Lichtes 428.
Strom, elektrischer 321.
Stromfunktion 755, 762.
—, komplexe 762.
Stromlinien von Flüssigkeiten 750.
Stromvektor 750.
Strömung durch enge Röhren, Wärmeleitung bei der 254ff.
— einer idealen Flüssigkeit um einen festen Körper 764ff.
— einer zähen Flüssigkeit um eine Kugel 826, 828ff.
— einer zähen Flüssigkeit um eine kreisrunde Scheibe 851f.
— einer zähen Flüssigkeit zwischen koaxialen Zylindern 837f.
—, wirbelfreie 752f.
Strudelpunkt 7.

Telegraphengleichung 378.
Telegraphie, drahtlose 541.
Temperaturleitfähigkeit 181.
Temperaturschwankungen, jährliche und tägliche 230.
Tonhöhe 679.
Torsion prismatischer Stäbe 636.
Tragfläche (Tragflügel) 121, 768ff.
Trägheitsdyade 96.
Trägheitsdyade, motorische 100.
Trägheitskonstanten des durch eine ideale Flüssigkeit bewegten Körpers 806ff.
Transformationstheorie der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen 29ff.
Transversale Saitenschwingungen 678.
Trennung von Gasgemischen durch Diffusion 257.
Tropfen, zylindrische 747ff.

Umkehrpunkt 26.
Umlaufsintegral 47.
Uneigentliche Winkelvariable 54.
Unstetigkeiten, Fortpflanzung von 685.

Variationsrechnung, Anwendung auf die schwingende Membran 718.
—, Beziehungen zur analytischen Mechanik 13ff.
Vena contracta 782ff.
Verborgene Koordinaten 13, 63.
Verjüngung eines Tensors 406.
Verschiebung, dielektrische 271.
Vertikalantenne 541, 542ff.
Verzerrungstensor 606ff.
Viererpotential 413.
Vierervektor 403ff.
Violinsaite, Bewegung einer 690.
Vordringen des Frostes 220ff.
— der Temperatur 192.

Wahrnehmbare Koordinaten 63.
Wahrscheinlichkeitsgesetz der Brownschen Bewegung 195ff.
Wärme, spezifische 177.
Wärmeisolierende Oberfläche 231ff.
Wärmekonvektion 247.
Wärmeleitfähigkeit, innere 178.
—, äußere 186.
Wärmeleitung, äußere 234.
— in einem geschichteten Körper 215.
— — — Kristall 181, 199.
— — — Stab 241ff.
— — — Zylinder 216.
— — einer Kugel 218ff.
— — — Platte 198ff.
— — festen Körpern 177ff.
— und Diffusion in begrenzten Körpern 208ff.
— — — in unbegrenzten Körpern 186ff.
Wärmestrom 178.
Wärmestromdichte 179.
Wärmeübergangszahl 248.

Wärmeübergangszahl, unendliche 252ff.
Wärmewellen 227ff.
Wechselstrom 321.
Wechselstromwiderstand 375, 499ff., 507.
— einer Spule 524ff.
— eines Drahtes 516ff.
—, elektromotorische Definition 510.
—, energetische Definition 507.
Wellen an einer Flüssigkeitsoberfläche 786ff.
—, elektromagnetische längs Drähten 526ff.
Wellengleichung 396.
Wellenlänge 396.
Wellenmechanik 486.
Wellenoptik 433.
—, Verhältnis zur geometrischen Optik 484ff.
Wellenwiderstand 381.
Weltphysik 412.
Weltpunkt 407.
Widerstand einer Flüssigkeit mit unendlich kleiner Reibung 842ff., 853.
— einer zähen Flüssigkeit gegen die Translationsbewegung einer Kugel 828, 830.
— einer zähen Flüssigkeit gegen die Translationsbewegung eines Zylinders 831f.
—, elektrischer 322.
Widerstandsformel, Lambsche 832.
—, Oseensche 830.
—, Stokessche 826ff.
Windungskapazität 387.
Winkelvariable 49.
— der Keplerbewegung 158ff.
Wirbel 752ff.
—, Entstehung durch unendlich kleine Reibung 842ff., 851f.
Wirbelfaden 754, 763.
Wirbelfluß 754.
Wirbelmoment 754.
Wirbelpunkt 7.
Wirbelströmung 753ff., 760ff.
Wirbelvektor 752.
Wirkungsvariable 49.
— der Keplerbewegung 158ff.
Wurfbewegung mit Reibung 2ff.
— ohne Reibung 2.

Zentralbewegung, Differentialgleichung der Bahnkurven 28.
Zentralbewegung, Kreisbahnen als quasistatische Bewegungen 65, 69ff.
—, —, Stabilität derselben 74ff., 77.
—, Newtonsche 156ff.
—, Separation der Veränderlichen 44ff.
Zentrifugalkraft 12.
Zirkulation 753.
— um die Tragflügel, Berechnung derselben 768ff.
Zustandsebene 6.
Zustandsgleichung 735.
Zustandsgrößen, kanonische 16.
Zustandsraum 30.
Zweikörperproblem 170.
Zylinderwellen 492ff.

Berichtigungen während des Druckes zu Bd. II.

S. 185. Zeile 15 von oben, Gl. (21): Statt XVIII, § 2 soll es XXI, § 3, **1** heißen.

S. 247. Zeile 9 von oben: Statt XVII, § 2, **2** soll es XX, § 2 (1) heißen.

S. 487. Fußnote: Statt XX, § 3, **4** soll es S. 790 heißen.

QA
401
F8
v.2

NOV 6 1970

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
DATE DUE

UNIV OF MAINE
3 7550 01057322 9